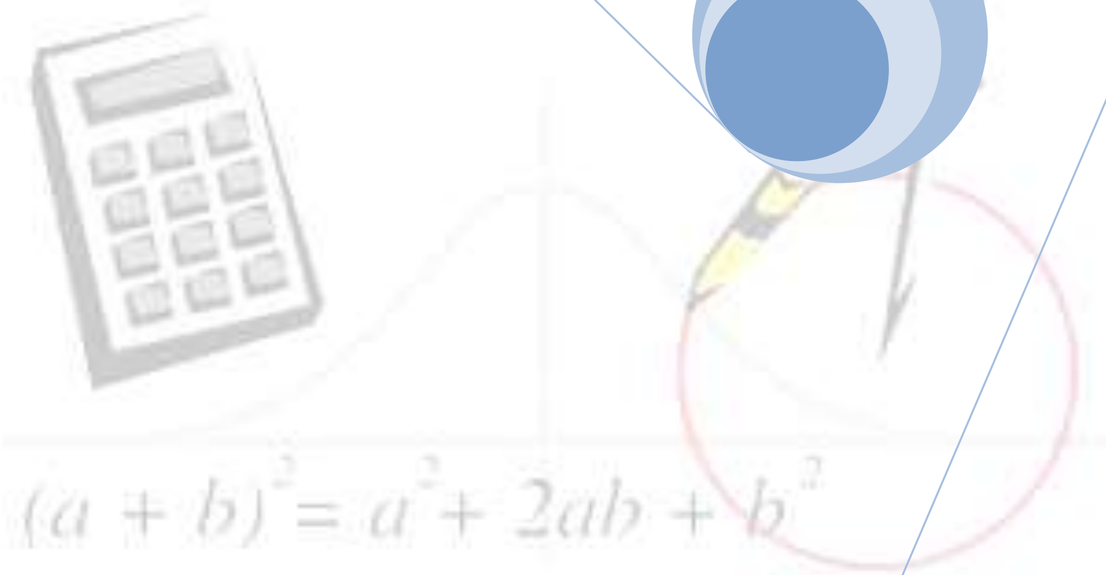


Plano de trabalho

Funções polinomiais do 2º grau.

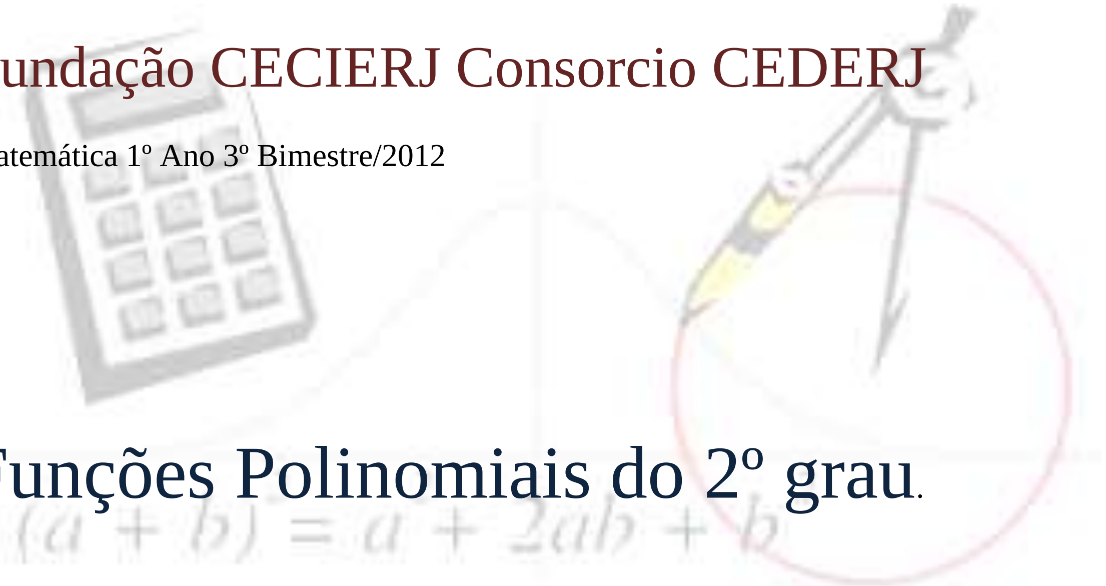
É preciso tornar o ensino da matemática mais prazeroso de uma forma prática e objetiva unindo a matemática do cotidiano com a matemática da escola. Acreditar que sou capaz disso é que motiva a realizar esse Plano de trabalho.

Plano de trabalho 1.

Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ Consorcio CEDERJ

Matemática 1º Ano 3º Bimestre/2012



Funções Polinomiais do 2º grau.

Tarefa 1

Cursista: Marcia Eliane Furtado de Oliveira

Tutor: Edson de Souza Pereira

Sumário:

Introdução:

O objetivo desse plano de trabalho é lançar um olhar detalhado para as funções polinomiais do 2º Grau (ou funções quadráticas) que envolva o cotidiano do aluno. Saber reconhecê-las, observar suas características, o significado dos coeficientes, vértice, raízes, concavidades enfim tudo relacionando a esse estudo de maneira natural e agradável.

Os alunos do 1º ano já vêm com um conhecimento de equação do 2º grau, do ensino fundamental, mas sempre é bom fazer uma revisão para filtrar possíveis casos que não tenham visto o assunto. O próximo passo é instigar a curiosidade e deixá-los abertos a novos conhecimentos.

Espera-se com esse Plano de Trabalho um ensino que possibilite aos alunos analise discussões, formação de opiniões apropriação do conhecimento. Tornando se necessário um estudo integrado digamos bem amarrado com começo, meio e fim. Por isso achei conveniente um pouquinho de história da matemática. Serão necessárias 12 aulas para realização desse Plano de trabalho mais 2 aulas para avaliações.

Desenvolvimento:

Atividade 1

- Habilidade: H02 Associar pontos no plano cartesiano

  H38- Identificar o gráfico de uma função

- Pré-requisito: Localização de pontos no plano cartesiano.

  Definição de função.

  Resolução de equação do 2º grau.

- Tempo de duração: 100 minutos
- Recursos educacionais utilizados: Data show para apresentação do texto e figuras de montanha russas, fontes de água e figuras que formam parábolas.

Quadro negro

- Organização da turma: em circulo para facilitar a discussão, opiniões e observações.
- Objetivo: Introduzir o conteúdo de funções polinomiais do 2º grau mostrando que o conteúdo faz parte do seu dia a dia.
- Metodologia Adotada: Apresentar o texto provocar a curiosidade e ir aumentando as informações de forma gradual e natural.

Quem gosta de brincar na montanha-russa?

Nos parques diversão, a montanha-russa é um brinquedo que chama a atenção não só pelo seu tamanho, mas também pela sensação de perigo, que para uns é divertida e para outros aterrorizante. Em sua forma característica apresentam aclives e declives que resultam em arcos de vários tipos. Originárias da Rússia (séc. XV e XVI), no início eram compostas de rampas de gelo sustentadas por estruturas de madeira. Com o tempo, foram aperfeiçoadas e hoje podem ser encontradas em todo mundo, apresentando, quase sempre estruturas metálicas.

Uma montanha-russa geralmente é projetada para dar a sensação de desafiar a lei da gravidade. Por isso, seus projetistas estudam a relação entre energia e a altura de um corpo que nela viaja. Para tanto, é necessário conhecer muito bem os efeitos que a inclinação, a massa e a altura causam no carro que a percorre. A inclinação depende da curva, que pode ser um arco de parábola, como na foto abaixo.

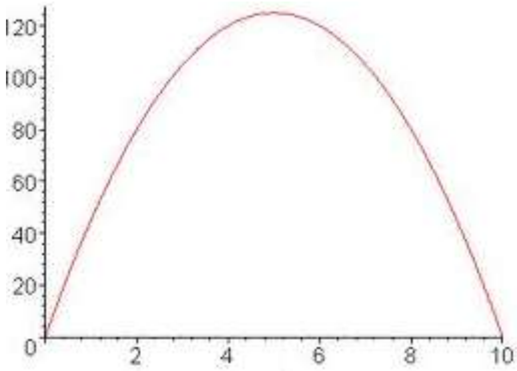
A parábola aparece como padrão de comportamento de muitos fenômenos, como, por exemplo, a trajetória de um projétil ao se lançado, a linha descrita pela água numa fonte e a estrutura que sustenta o farol de um automóvel. As antenas parabólicas, por seu próprio nome, sugerem a aplicação do formato de uma parábola na sua estrutura. De fato, basta imaginarmos uma curva em forma de parábola em uma orbita geoestacionária, emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, formando um feixe de raios. Estes, ao atingirem a antena de formato parabólico, são refletidos para um único ponto chamado foco, que é componente de parábola.

A função quadrática expressa algebricamente o comportamento dos pontos do gráfico de que descrevem uma parábola e será um dos objetos de estudo deste bimestre.

Começar um questionamento dando voz ao aluno.

1. Você gosta de montanha-russa?
2. Você é capaz de desenhar o perfil de uma montanha russa? E que figura geométrica é essa?
3. Você sobe até que ponto? E começa a descer a partir de que ponto?
4. Poderíamos classificar como uma parte crescente, pois está subindo e outra decrescente, pois está descendo? Que ponto separa esses dois “pedaços”?

   Vamos imaginar que colocamos o perfil da montanha russa num plano cartesiano.   Essa forma geométrica é a parábola.



E é ela que encontraremos quando esboçarmos o gráfico de uma função do 2º grau.

Uma função $f: R \to R$ chama-se quadrática (ou polinomial do 2º grau) quando existem números reais a, b, e c com a≠0, tal que $f(x) = ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ para todo $x \in R$.

Por falar nisso. Por que será que a função que tem essa forma? E por que é chamada de função do segundo grau?

Espera-se que o aluno associe o nome ao expoente de x.

E perceba que a relação não será mais linear como na função do 1º grau.

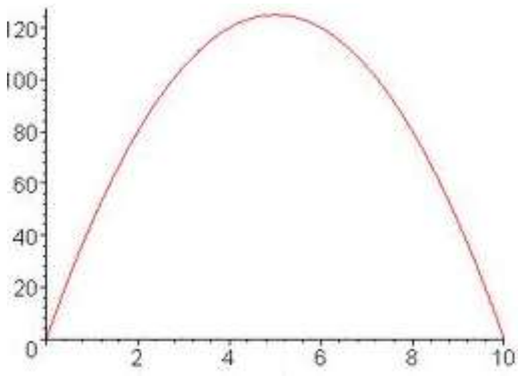
A maioria dos alunos do 1º ano já estudou equações do 2º grau, por isso as comparações serão um ponto positivo. Vão responder tranquilamente quem são os coeficientes a, b e c. O que acrescentaremos é as relações dessas com o gráfico.

Vamos começar com o coeficiente a.

Primeiro veremos dois exemplos de funções do 2º grau e seu respectivos gráficos.

1º) $f(x) = -5x^2 + 50\mathrm{x}$

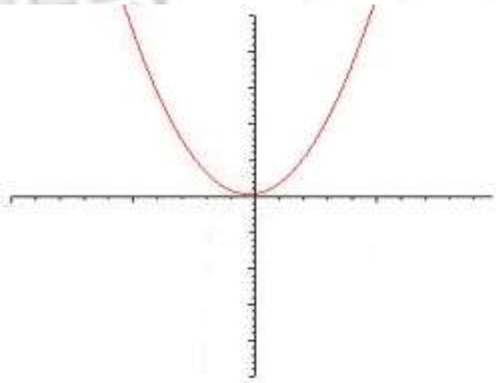
Aqui temos a= -5, logo a<0. O gráfico referente a essa função é:



Concavidade voltada para baixo. (Digamos ”triste”).

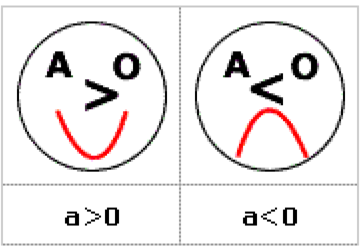
2º $f(x) = x^2$

Já aqui o a=1, logo a>0 o gráfico referente a essa função é:



A concavidade voltada para cima (Digamos “feliz”).

Resumindo a concavidade depende só do valor de a



E agora como começar a resolver uma função do 2º grau?

1º Passo é identificar quando ela é função do 2º grau.

Vamos ver se você já é capaz de perceber quando se trata de uma função do segundo grau.

Exercícios:

1. Quais das seguintes funções são quadráticas?

a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = 3x^2 - 4\text{x}$

c) $\text{f(x)} = \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = x(x-3)+1$

Solução: São funções quadráticas os itens: a, b e c.

Atividade 2.

- Habilidade: H57 C1- Resolver problemas envolvendo função do 2º grau

C6 - resolver problemas $ax^2 + bx + c = 0$ com a$\neq 0$

- Pré-requisitos: Resolução de equação do 2º grau e conhecimento do plano cartesiano.
- Tempo de duração: 100minutos.
- Objetivo: Aprender a resolver as funções do 2º grau.

Vamos analisar a função $f(x) = x^2 - 3\text{x} - 4$ e esboçar seu gráfico.

Para esboçar o gráfico referente a essa função vamos precisar calcular:

- Os coeficientes $a = 1 \;\; b = -3 \;\; e\; c = -4$
- A concavidade voltada para cima, pois o a=1, isto é a>0 (“feliz”);
- O ponto c é a interseção com o eixo y.
- As raízes ou zeros da função, do mesmo modo que fazíamos na função do primeiro grau. Temos que fazer $f(x) = 0$, Logo teremos uma equação do 2º grau que já sabemos resolver.

$x^2 - 3\text{x} - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-4)$

Δ=9+16

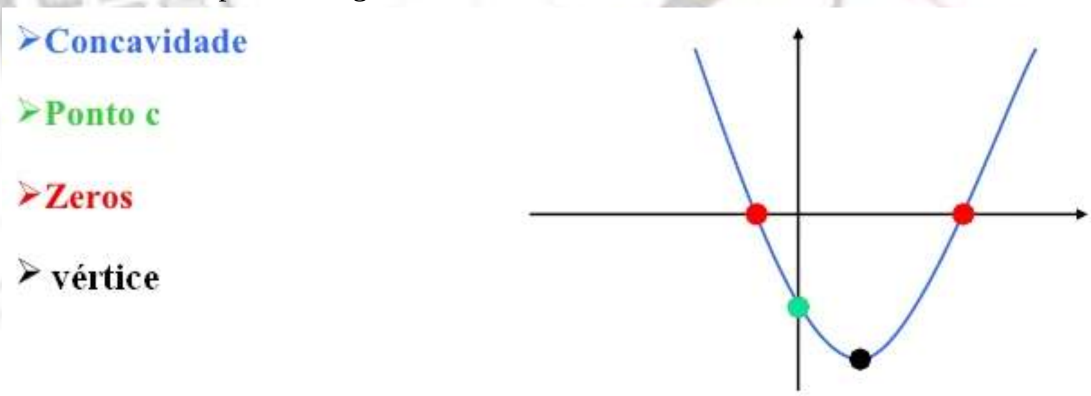
Δ=25 Δ>0, portanto encontraremos duas raízes reais e diferentes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad\qquad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{25}}{2}$$

logo $x' = -1 \;\; e \; x'' = 4$

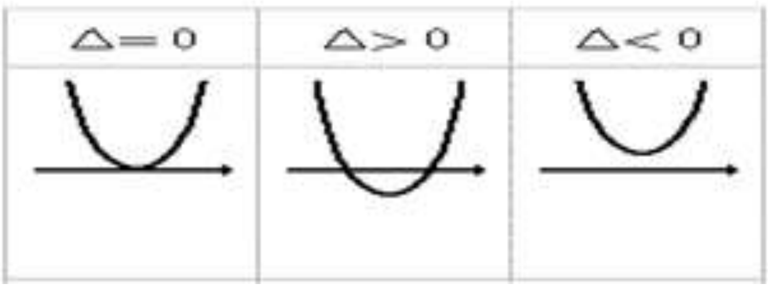
- O vértice é um ponto da parábola. E com ele podemos determinar o ponto máximo ou mínimo da função. Neste caso o y_v determina o ponto mínimo. Conforme podemos visualizar no ponto preto. Como calculá-lo?
  Usando as fórmulas:
  $$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2(1)} = 1{,}5$$
  $$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25}{4} = -6{,}25\text{m}$$
  V=(1,5;-6,25)

  Marcamos esses pontos no gráfico e teremos:



É importante esse passo. Saber quais pontos são fundamentais e a partir desse estudo teremos todas as informações necessárias.
Faremos um breve resumo que relaciona o discriminante Δ e a concavidade(a>0 ou a<0):

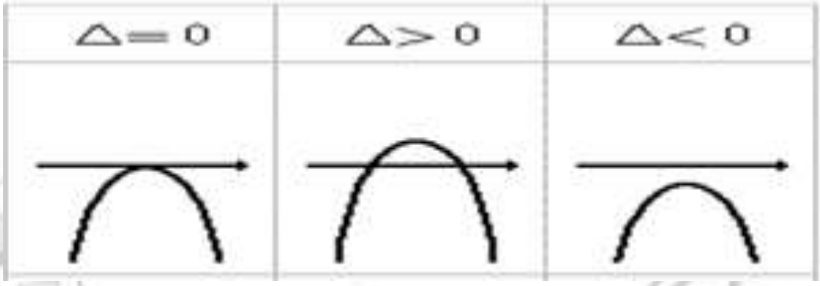
Para $a > 0$ (“$feliz$”): O descriminante(Δ) poderá ser:



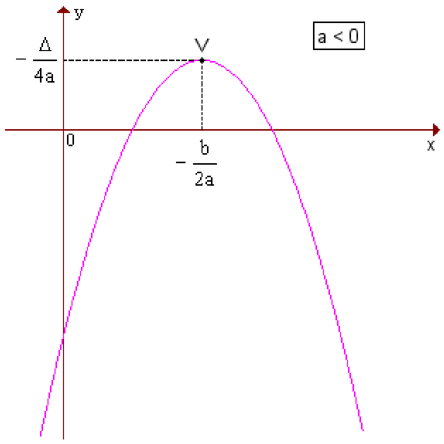
A parábola poderá ter :

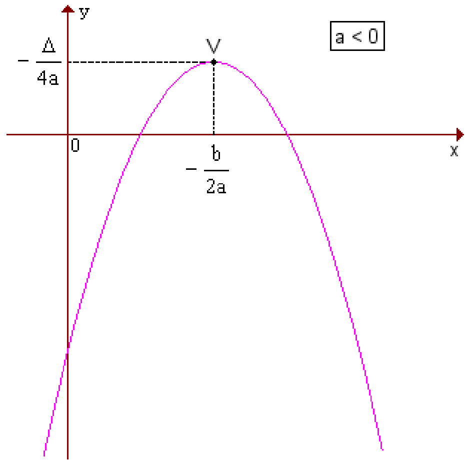
- Um ponto ($\Delta=0$) de interseção com o eixo X, isto é duas raízes reais iguais (ou zeros) da função.
- Dois pontos diferentes ($\Delta>0$) de interseção com o eixo X, isto é duas raízes reais e diferentes da função.
- Ou nenhuma raiz. Quando o discriminante ($\Delta<0$) for menor que zero.

E para $a < 0$ ("triste"):



Análogo ao anterior.
Com relação ao vértice;
O vértice ó o ponto mais alto, ponto máximo (a<0), ou o mais baixo da função, ponto mínimo (a>0).





$x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

$$V(x_v, y_v)$$

Embora pareça uma forma mecânica de memorização se faz necessária, pois quando temos as informações de forma sistematizadas fica mais fácil organizar as ideias e interpretar os problemas.

Exercícios

1. Verificar quais dos itens abaixo representam função do 2º grau e destacar nos casos positivos os coeficientes a, b e c e por fim determinar se a concavidade nos dá um ponto máximo ou mínimo.

$A)\ f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

B) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$

C) $f(x) = x^2 + x - 5$

D) $f(x) = -x^2 - x - 6$

2. Sendo a função $f(x) = -2x^2 + x - 5$

calcule:

a) $f(-5)$ b) $f(8)$ c) $f(-2)$

Atividade 3.

- Habilidade: H57 C5 – problemas que envolvam a determinação do y_v como valor máximo.

C6 - resolver problemas que envolvam a determinação do x_v, que fornecem o valor máximo

- Pré-requisitos: Resolução de equação do 2º grau.
- Tempo de duração: 50minutos.
- Objetivo: Criar uma rivalidade boa. Motivá-los com um assunto que todos gostam e discutem.

Exemplo:

A trajetória de um chute a gol descreve uma parábola. Supondo que sua altura h, em metros, t em segundos após o chute dado por

$h(t) = -t^2 + 8t$

a) Em que instante a bola atingiu a altura máxima?

$h(t) = -t^2 + 8t$

Ponto de máximo: $V(t_v, h_v)$ A bola atingi sua altura máxima quando:

$$t_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = 4s$$

Logo, a bola atinge a sua altura máxima 4 segundos após o chute.

b) Qual a altura máxima atingida pela bola?

A altura máxima atingida pela bola é:

$$h_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{64}{4(-1)} = 16m$$

A altura máxima atingida pela bola é 16m.

Exercício 1:

No clássico Flamengo x Vasco:

Durante uma partida emocionante o jogador do Flamengo dá um chute a gol e a bola segue a trajetória $f(x) = -3x^2 + 18x$, embora o jogador tenha perdido o gol, ele afirmou que mandou a bola muito mais alto do que qualquer jogador do vasco. Mas foi contrariado pelo jogador do time adversário que garantiu ser ele o autor da bola mais longe e mais alta do jogo isso aconteceu durante um tiro de meta, onde a bola seguiu a trajetória $g(x) = -x^2 + 10x$, segundo o matemático. (considere todas as medidas em metros). E ai você concorda com eles? A final quem mandou a bola mais alta e mais longe?

Solução: É preciso analisar cada função e no final comparar. Sabe-se que a<0, portanto possui um ponto de máximo, esse ponto é o y do vértice. Como queremos saber também a distancia que a bola atingiu basta calcularmos as raízes.

Vamos visualizar através de uma figura.

Faremos agora os cálculos:

- Flamengo: $f(x) = -3x^2 + 18x$ os coeficientes $a = -3$ $b = 18$ e $c = 0$

  O discriminante Δ; $\Delta = b^2 - 4ac$ $\rightarrow \Delta = (18)^2 - 4(-3)(0) = 324$

  $\Delta > 0$ (2 raízes reais $\neq$).

Vamos achá-las: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{324}}{-2}$$

$$x' = \frac{-(-18) + \sqrt{324}}{-2} = 18\text{m}$$

$$x'' = \frac{-(-18) - \sqrt{324}}{-2} = 0\text{m}$$

$Daqui\ concluimos\ que\ a\ distancia\ que\ a\ bola\ atingiu\ foi\ de\ 18m.$

Resta-nos agora determinarmos a altura máxima que essa bola atingiu.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = -\frac{324}{4(-3)} = 27\text{m}$$

$Concluimos\ agora\ que\ o\ jogador\ mandou\ a\ bola\ a\ 27m\ de\ altura.$

- Vasco: $g(x) = -x^2 + 10x$ os coeficientes são $a = -1$ $b = 10$ $e\ c = 0$

O discriminante Δ; $\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (10)^2 - 4(-1)(0) = 100$

$\Delta > 0$ (2 raízes reais $\neq$).

Vamos achá-las: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{100}}{-2}$$

$$x' = \frac{-(-10) + \sqrt{100}}{-2} = 10\text{m}$$

$$x'' = \frac{-(-10) - \sqrt{100}}{2} = 0\text{m}$$

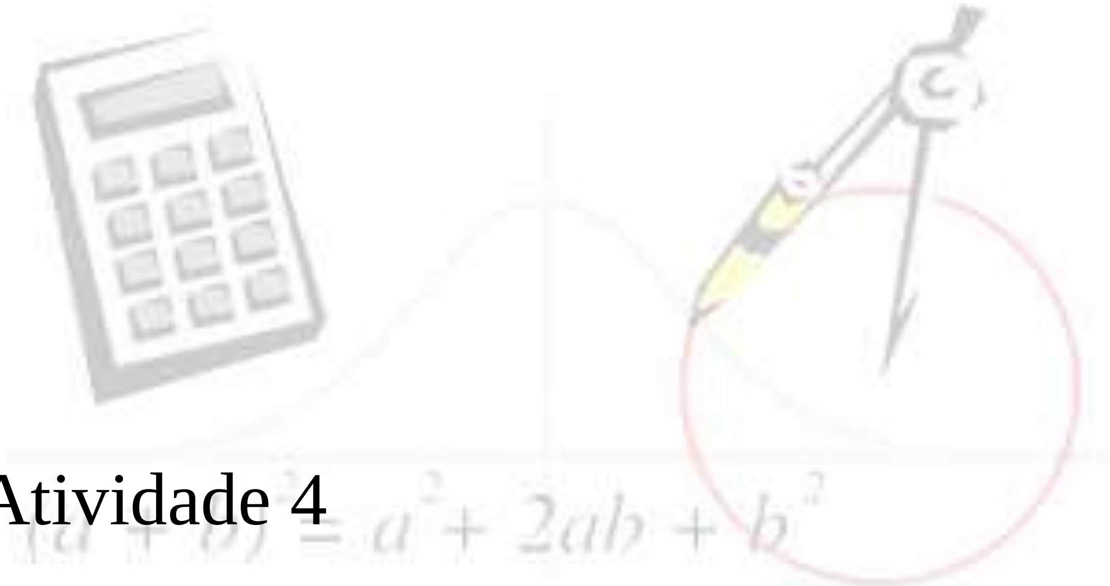
$Daqui\ concluimos\ que\ a\ distancia\ que\ a\ bola\ atingiu\ foi\ de\ 10m.$

Resta-nos agora determinarmos a altura máxima que essa bola atingiu.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = -\frac{100}{4(-1)} = 25\text{m}$$

$Concluimos\ agora\ que\ o\ jogador\ mandou\ a\ bola\ a\ 25m\ de\ altura.$



Atividade 4

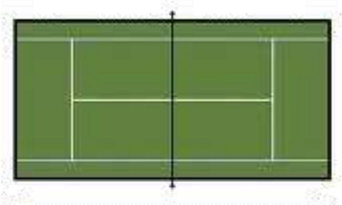
- Habilidades: H57 Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.

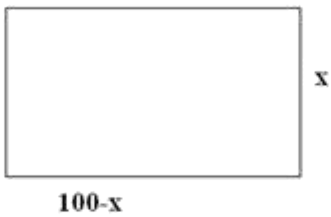
C6 Resolver problemas que envolvam a determinação do x_v, que fornece o valor máximo.

- Pré-requisito: Resolução de equações do 2º grau
- Tempo de duração: 50minutos
- Recursos educacionais utilizados: Livro didático e exemplos adicionais.
- Organização da turma: Grupos de 2 alunos.
- Objetivos: Estimular o raciocínio através da interpretação de enunciados e Generalização de situações para resolver problemas.
- Metodologia adotada: Exposição de exemplos e questionamentos.

Exemplo:

Seu Luiz deseja cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de tênis retangular. Tendo recebido 200metros de tela, seu Luiz quer saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível.





Criando um modelo matemático: Para visualizar melhor temos um retângulo com dimensões 100-x e x, visto que o perímetro é 200m. (perímetro: $2(100-x)+2x=200$) Como queremos área do retângulo basta multiplicar base por altura. Logo: Área do retângulo: $(100-x)(x)=100x-x^2$. Portanto a área é uma função e podemos representá-la por $f(x)=100x-x^2$

A área máxima procurada é o valor máximo da função $f(x)=-x^2+100x$

A área assume o valor máximo no vértice da parábola, ou seja, quando:

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-1)} = 50$ (largura)

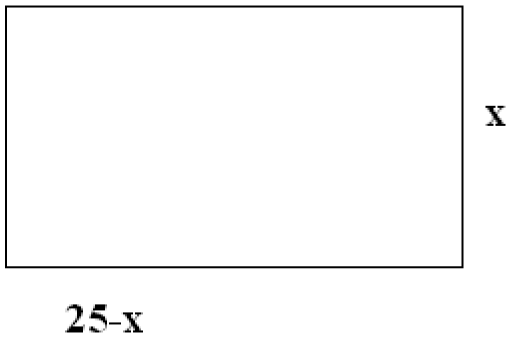
Concluímos então que a área máxima a ser cercada é uma região quadrada cujo lado mede 50m.

Exercício 1

Lucas resolve com 50m de tela, construir um cercado para seus animais. De todos os retângulos possíveis, ele quer determinar aquele de maior área. Quais devem ser as dimensões do retângulo construído?

Solução:

Modelo matemático



Como queremos área do retângulo: $A = (x)(25 - x) = 25x - x^2$

A área máxima procurada é o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 25x$

A área assume o valor máximo no vértice da parábola, ou seja, quando:

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2(-1)} = 12{,}5\text{m}$(largura)

Logo: o outro lado: $25 - x = 5 - 12{,}5 = 12{,}5m$. Trata-se de um quadrado de lado 12,5m.

Exercício 2.

Karla faz bijuteria. E ela começa a fazer um colar para isso enfia uma pérola em um arame fino com o formato da parábola $f(x) = x^2 - 5$. Deixa-se a pérola deslizar até chegar a seu ponto mais baixo. Quais as coordenadas desse ponto?

Solução:

1º passo: analisar a parábola que a função nos dá. Como a>0 teremos um ponto mínimo. Que é o vértice dessa parábola. Então basta calcula-lo usando as fórmulas.

Os coeficientes: a=1, b=0 e $c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0^2 - 4(1)(-5)$

$\Delta = 20$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} = 0$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{20}{4} = -5\text{m}$

As coordenadas desse ponto são:

$V(0, -5)$

Atividade 5

- Habilidade relacionada: H57 Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.
- Pré-requisito: conhecer o gráfico da função do 2º grau.
- Tempo de duração: 150 minutos
- Recursos educacionais utilizados: Laboratório de informática, Programa geogebra.
- Organização da turma: em dupla.
- Objetivo: dar a oportunidade para o aluno conhecer o programa geogebra e com ele construir e solidificar o conhecimento construindo etapas das funções do 2º grau.

- Metodologia Adotada: Trabalhar em equipe no laboratório de informática.

1º Passo: Apresentar o programa Geogebra, fazer alguns exemplos mostrar os comandos que iremos usar e deixá-los explorar um pouco para ver se entenderam ou tem alguma dúvida. Nosso principal objetivo é analise de gráficos.

Dar novas orientações e propor o trabalho então eles vão testar comandos de como inserir a função e como ficará o gráfico. Tentar através da pesquisa e experiência responder a seguintes perguntas, não se quer nessa etapa nada cientifico, mas meras observações devidamente registradas.

Relatório: O significado dos coeficientes que informações eles nos fornecem?
Começaremos com a $f(x) = x^2$, isto é teremos os coeficientes a=1, b=0 e c=0.
E usando o geogebra. Vamos modificar os coeficientes sempre relatando o que iremos observar.
1ª etapa: Vamos variar o valor de $a\ para\ 2, depois\ para\ 4{,}5\ e\ 8$. O que você observou no gráfico?
Nessa atividade espera-se que o aluno perceba que a concavidade está voltada para cima, pois o “a” é positivo e que a parábola fique mais “magrinha” ou mais “fininha” ou com uma abertura menor (mais estreita).

Vamos testar agora os valores próximos de zero, mas lembrando de que o $a \neq 0$.
Então vamos tentar $a = 0{,}8\ \ ou\ a = 0{,}5\ \ ou\ ainda\ a = 0{,}1$
Agora se espera que ele perceba que quanto mais perto de zero mais larga mais aberta fica a parábola.
Resta-nos agora mudar o sinal de a.
Que tal começarmos com $a = -1; a = -3\ ou\ a = -5$
Neste momento o mais importante é ele observar a mudança da concavidade (passa a ser voltada para baixo: “triste”) e que quanto mais de afasta do zero mais fina fica a parábola
Agora só nos resta aproximação para zero com o “a” negativo. Acho que você já desconfia não é?
Agora vamos observar que quanto mais perto de zero for o “a” mais larga será a parábola.
Concluiremos daqui que o sinal de “a” define se a concavidade é voltada para cima, a>0 (carinha feliz) ou voltada para baixo, a<0(carinha triste). Que para nós nesse momento é o mais importante, pois nosso objetivo não é a construção geométrica da parábola e sim um simples esboço.

2º Momento: Fixando o $a = 1\ e\ c = 0$, vamos variar agora o valor de “b”
Que tal começarmos com $b = 1;\ b = 3;\ b = 5.$
Queremos agora que o aluno observe que quanto maior o valor “b” a parábola se desloca mais para baixo e se b for positivo ela também se deslocará para

esquerda (lado negativo de x), e passando a ter duas raízes ou dois zeros da função.

E para b <0?

A parábola se desloca para baixo e para direita (lado positivo do eixo x).

3º Momento: Fixando $a = 1$ e $b = 0$ vamos variar o coeficiente c;

O vértice da parábola coincide com o ponto c escolhido. Queremos nesse caso que o aluno observe e lembre que a parábola intercepta o eixo y no ponto c.

Atividades Extras:

1. Usando o geogebra:

Determine as raízes (caso existam) e o vértice das funções abaixo:

$a) f(x) = -x^2 + 3x - 1$

b) $f(x) = 2x^2 + 3$

$c)\ f(x) = x^2 + 4x - 4$

$d)\ f(x) = -x^2 - x + 6$

2. Elabore uma atividade para dupla que está a sua esquerda. Usando função do 2º grau e o geogebra. (livre).

Atividade 6:

- Habilidade relacionada: H57 Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.
- Pré-requisito: Conhecer a função dos pontos no gráfico.
- Tempo de duração: 50 minutos.
- Organização da turma: em grupos de 2 ou 3 alunos.

- Objetivos: Apresentar a forma fatorada da função do 2º grau e a partir das informações contidas no gráfico encontrarem a lei de formação daquele gráfico. Podemos dizer o caminho inverso ao qual vínhamos andando.

Trabalhando a forma fatorada da função do 2º grau.

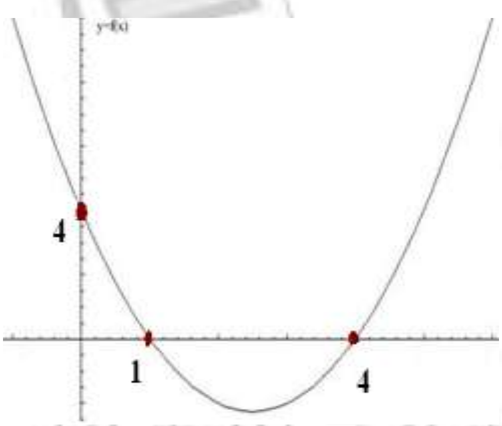
Exemplo: Dado o gráfico como determinar a função que o originou

$f(x) = a(x - x')(x - x")$

Ou $f(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ou $f(x) = x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P}$ Onde S é a soma das raízes e P o produto delas.

Vamos a um exemplo prático.

Observando o gráfico abaixo. Você é capaz de determinar sua lei de formação?



Observando o gráfico podemos concluir que $a > 0$, o ponto $c = 4$ e as raízes são $x' = 1 \ e \ x" = 4$. Lembrando que a lei de formação do 2º grau é: $f(x) = ax^2 + bx + c$, então teríamos que encontrar $a \ e \ c$ que daria um pouco de trabalho, mas nada que não se possa resolver, porem vamos usar a forma fatorada para encontrarmos mais rápido essas informações:

$f(x) = a(x - x')(x - x")$

Substituindo as raízes:

$f(x) = a(x - 1)(x - 4)$

Usando o ponto $(0, c) = (0,4)$ encontraremos a equação:

$4 = a(0 - 1)(0 - 4)$

$4 = a(-1)(-4)$

$4 = 4a$

$a = 1$

Substituindo **a** por 1 em:
$f(x) = 1(x - 1)(x - 4)$

Teremos: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Ou ainda por soma e produto das raízes: como a=1 basta fazer $S = x' + x''$ e $P = x'.x''$

$S = 1 + 4 \quad S = 5$ e $P = 1.4 \quad P = 4$

$f(x) = x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P}$ Substituindo temos: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

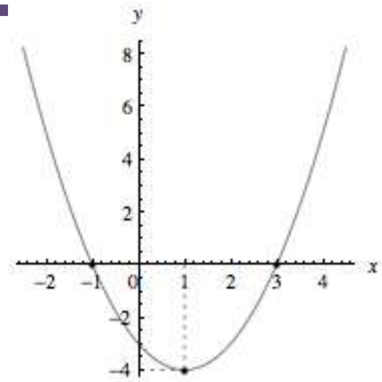
Curiosidade (sobre o plano cartesiano);

"Talvez a criação mais famosa de Renée Descartes na matemática ocorreu quando ele estava na cama observando uma mosca voar e percebeu que toda posição ocupada pela mosca poderia ser determinada pela intersecção de três planos ortogonais, paralelos às faces do quarto. Com isso ele desenvolveu o sistema de coordenadas utilizado até hoje para produzir gráficos bidimensionais e tridimensionais. Esse princípio levou ao desenvolvimento de uma geometria baseada em suas próprias observações."

Um gráfico nos fornece informações de maneira mais clara, mais direta, apenas olhando para ele.

Exercício 1.

Determine a lei de formação do gráfico abaixo:



Solução:

As informações que temos nesse gráfico são: as raízes e o vértice. Portanto são elas que usaremos. Devemos nesse caso determinar a, b e c.

$x' = -1 \quad e\ x'' = 3$ e $V(1, -4)$

1º Passo: Vamos determinar **a**: (sabemos que a>0)

Usando as informações na forma fatorada:

$f(x) = a(x - x')(x - x'')$

$-4 = a(1 - (-1))(1 - 3)$

$-4 = a(2)(-2)$

$a = 1.$

Agora substituindo **a** por 1 e usando as raízes teremos:

$f(x) = 1(x - (-1))(x - 3)$

$f(x) = (x + 1)(x - 3)$

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

Ou ainda por soma e produto.

$f(x) = x^2 - Sx + P$

Onde $S = -1 + 3$ e $P = (-1).3$

$S = 2 \quad P = -3$

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

Curiosidade (sobre soma e produto):

"O problema de achar dois números conhecendo sua soma S e seu produto P é um dos mais antigos da matemática. Ele já se encontra em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios, mil e setecentos anos antes de Cristo. Pode-se formular esse problema em termos geométricos, assim: determinar os lados de um retângulo, do qual se conhecem o semiperímetro e a área." (Elon Lages Lima, A equação do segundo grau, RPM 13, 1988, 21-33).
A solução deste problema leva-nos a estudar as funções do segundo grau. Além da importância histórica, as funções do segundo grau (também chamadas de funções quadráticas) aparecem naturalmente em vários contextos. Eis alguns exemplos:

a) Quando se considera a relação entre a medida do lado de um quadrado e a sua área, se duplicarmos o lado do quadrado o que acontecerá com a sua área?

b) Em problemas simples de contagem: qual é o número de diagonais em um polígono convexo de n lados?

c) Em problemas de máximos ou mínimos: se tenho uma cerca de 100 metros, quais são as dimensões do terreno retangular de *maior área* que pode ser cercado utilizando toda a cerca? Outro exemplo do mesmo tipo: "João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolé por R$ 20,00. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que
a sua receita fosse máxima?" (veja a referência: A Matemática do Ensino Médio, vol. 1, E.Lima et al, SBM, 2001).
d) Em problemas da Física, como por exemplo: calcular a altura máxima de um projétil lançado por um canhão que faz um ângulo de 30 graus com a horizontal sabendo-se que a velocidade inicial é de 35 metros por minuto. Assim, o tópico equações do segundo grau deve ser ensinado porque ele modela e resolve várias situações relevantes.

Atividade7

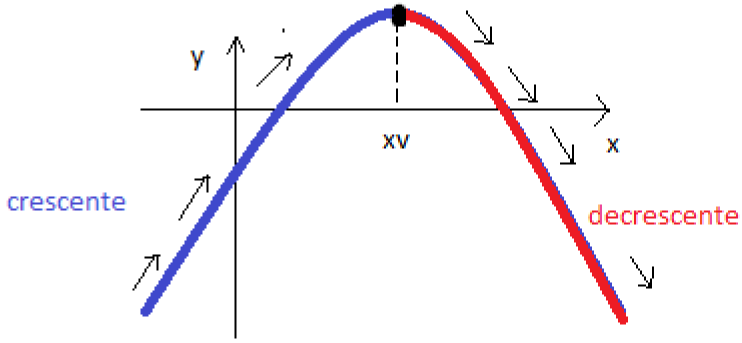
- Habilidade relacionada: H57 Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.
- Pré-requisito: Conhecer o gráfico da função do 2º grau.
- Tempo de duração: 50 minutos.
- Organização da turma: em grupos de 2 ou 3 alunos.
- Objetivos: Analisar gráficos determinar os intervalos crescentes e decrescentes da função.

Estudo do sinal, crescimento e decrescimento da função quadrática:

Crescimento e decrescimento de uma função quadrática
O crescimento de uma função quadrática depende do valor do coeficiente "a" da função $f: R \to R$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$
Para descobrirmos em qual intervalo a função é crescente ou decrescente, devemos analisar os valores no eixo x.(domínio da função)
para assim estabelecermos o intervalo de crescimento ou decrescimento da função.
observe as figuras abaixo:

Vamos analisar dois gráficos:

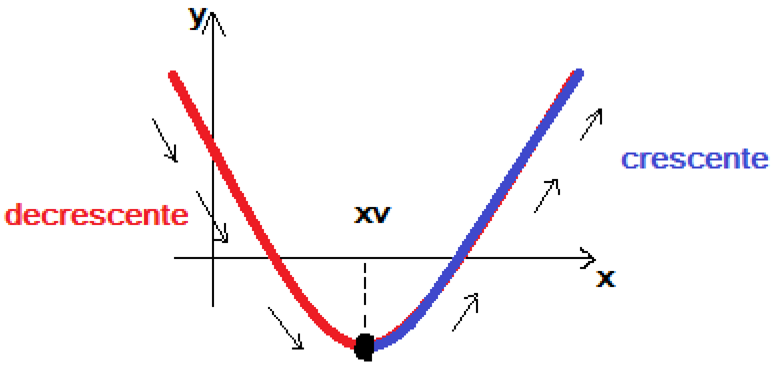
1º $a < 0$



O ponto x_v é quem divide os intervalos em crescente ou decrescente. No exemplo acima, a<0. A função é:

Crescente $]-\infty, x_v[$ Decrescente $]x_v, \infty[$

2º $a > o$ Veja o gráfico:



Decrescente $]-\infty,\ x_v[$ crescente $]x_v,\infty[$

Exercício 2.

Faça o estudo de crescimento e decrescimento das funções abaixo. Registrando seus intervalos.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$
b) $f(x) = -2x^2 - 6x + 1$

Atividade8

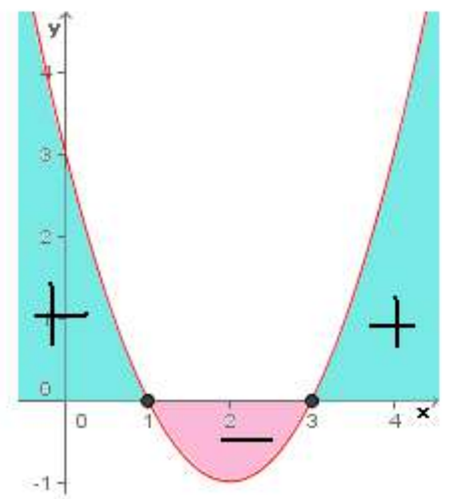
- Habilidade relacionada: H57 Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.
- Pré-requisito: Conhecer o gráfico da função do 2º grau.
- Tempo de duração: 50 minutos.
- Objetivos: Analisar gráficos determinar quando a função é positiva, negativa ou nula.

Estudo do Sinal de uma Função Quadrática

Estudar a variação do sinal de uma função polinomial do 2° grau é identificar para quais valores de x temos f(x) com valor negativo, nulo ou positivo.

- Vamos analisar o gráfico da $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1ºcaso: $a > 0 \; e \; \Delta > 0$



- A função $f(x)$ assume valores positivos para $x < 1 \;\; ou \; x > 3$

- A função $f(x)$ é nula, (isto é, $f(x) = 0$) nas raízes $x = 1 \;\; ou \; x = 3$

- A função $f(x)$ assume valores negativos na "barriga", isto é , entre as raízes $1 < x < 3$.

Exercício.

De maneira análoga analise o estudo dos sinais para os demais casos. Faça um esboço do gráfico para visualizar melhor.

2 º caso: $a > 0$ e $\Delta = 0$

3º caso: $a > 0$ e $\Delta < 0$

4º caso: $a < 0$ e $\Delta > 0$

5º caso: $a < 0$ e $\Delta = 0$

6º caso: $a < 0$ e $\Delta < 0$

Avaliação.

Esse plano de trabalho tem o objetivo de cumprir parte do conteúdo do 3º bimestre do 1º Ano Ensino Médio do Colégio Estadual Nilo Peçanha em São Gonçalo RJ. Então será avaliado para nota de participação que ocorrerá em todas as atividades, e em três momentos específicos: um teste dado após a 5ª atividade, o próprio saerjinho e uma prova final onde parte cobrará funções quadráticas.

Onde encontramos as parábolas?

Catedral da Sé, SP

Catedral de Brasília

Um pouco de história.

“O primeiro registro de equação do 2º grau que se tem notícia foi feito por um escriba, em 1700 a.C., aproximadamente, em uma tábua de argila, cuja apresentação e a forma de resolução era retórica, ou seja, através de palavras, considerada como uma “recita matemática” infalível para solucionar tal tipo de equação e que fornecia somente uma raiz positiva (as raízes negativas só entraram no contexto matemático a partir do século XVIII).

Estamos falando de um período muito anterior ao da descoberta da fórmula de Báskara. Segundo Eves, em seu livro “**Introdução à História da Matemática**”, os mesopotâmios apresentaram a primeira equação do segundo grau da seguinte forma:

“Qual é o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá 870?”

Chamando o lado do quadro de x, o problema, atualmente, produziria a equação: $x^2 - x = 870$.

Para problemas desta natureza eles tinham a seguinte “**receita matemática**”:

“Tome a metade de um, multiplique por ele mesmo. Some o resultado ao valor conhecido, em seguida determine a raiz quadrada do valor encontrado e finalmente adicione a metade de um e obterás o valor procurado.”

Vamos aplicar o método dos babilônios para resolvermos o problema proposto anteriormente.

1º Passo: Tome a metade de 1→0,5

2º Passo: multiplique por ele mesmo (0,5).(0,5)=0,25

3º Passo: Some o resultado ao valor conhecido→0,25+870=870,25 (uma vez que a único valor conhecido no problema é área do quadrado).

4º Passo: determine a raiz quadrada do valor encontrado $x = \sqrt{870,25} = 29,5$

5º Passo: adicione a metade de 1 e encontrarás o valor →29,5+0,5=30
Portanto, o lado do quadrado mede 30.

Verificação da resposta encontrada:

O problema proposto foi: “Qual é o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá870?”.

Descobrimos que o lado mede 30, logo, a área do quadrado é 900. Fazendo a área menos o lado→ 900 – 30 =870. Verifica-se que a resposta é mesmo correta.

Outro exemplo: Resolver a equação $x^2 - x = 12$ ou $x^2 - x - 12 = 0$.

Solução:

Metade de 1 = 0,5.

Multiplique por ele mesmo: $(0{,}5).(0{,}5) = 0{,}25$

Some o resultado ao valor conhecido: $0{,}25 + 12 = 12{,}25$

Determine a raiz quadrada do valor encontrado: $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$

Adicione a metade de 1 e encontrarás o valor procurado: $3{,}5 + 0{,}5 = 4$

Portanto, a raiz positiva da equação é 4.

Atenção: a “receita” proposta pelos babilônios só é válida para equações do 2º grau cujas constantes a e b sejam iguais a 1.”

Por Marcelo Rigonatto
Especialista em Estatística e Modelagem Matemática
Equipe Brasil Escola

Referencias bibliográficas:

Dante, Luiz Roberto, Matemática, Contexto e aplicação, São Paulo: 1ª edição, ática, 2011.

Endereços eletrônicos acessados de 22/08/2012 a 02/08/2012, citados ao longo do trabalho:

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br

http://pt.scribd.com/doc/7145398/Matematica-Aula-09-Vertice-Da-Parabola-Imagem-Da-Funcao-de-2-Grau

Portal das Curiosidades

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Renée Descartes - Cientista e Filósofo

www.exatas.hpg.ig.com.br

www.brasilescola.com

http://pt.scribd.com/doc/58251829/56/Crescimento-e-decrescimento-de-uma-funcao-quadratica

http://crv.educacao.mg.gov.br