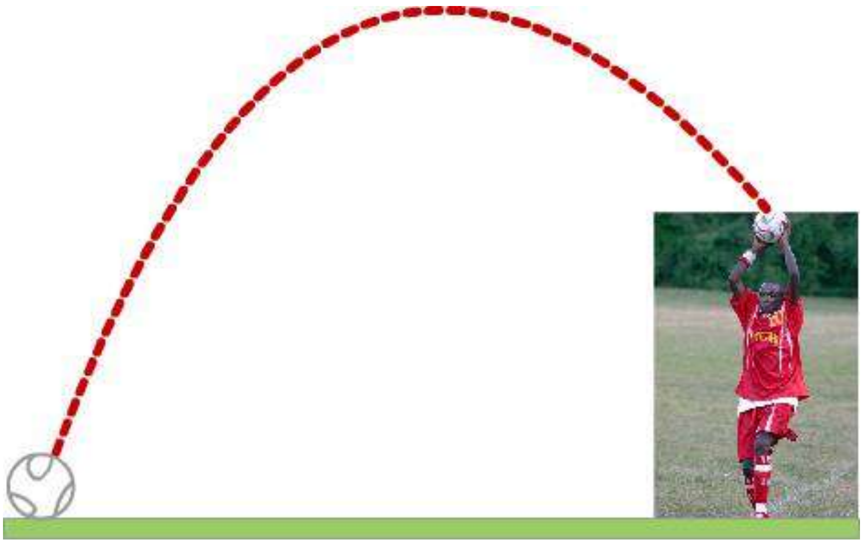
Formação Continuada em MATEMÁTICA
Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ

Matemática 1º Ano - 3º Bimestre / 2012

PLANO DE TRABALHO

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU



Tarefa 1

Cursista: Mariane Ribeiro do Nascimento

Tutora: Elisiane Aparecida Nunes Silva

INTRODUÇÃO

Embora a Matemática esteja presente em nosso dia a dia, é comum os alunos terem um bloqueio nessa disciplina. Há vários fatores que contribuem para esta situação, tais como: má formação dos professores, o distanciamento entre a matemática ensinada nas escolas e a prática no cotidiano, dificuldade de raciocínio lógico-matemático, número de aulas insuficientes e tudo isso acaba causando o desinteresse nos alunos.

Cabe a nós, professores, criarmos situações que incentive os nossos alunos, levando a exercitarem sua capacidade de pensar e buscar soluções para as situações e problemas apresentados e que os mesmos tenham relação com sua vivência.

Inicialmente, será necessário fazer uma revisão de conteúdos já trabalhados, como: potenciação, usos dos sinais, localização de pontos num plano cartesiano, etc. Para totalização do plano serão necessários 12 tempos de 50 minutos para desenvolvimento dos conteúdos mais 4 para avaliação de aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

HABILIDADE RELACIONADA:

H 52 – Resolver problemas com números reais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)
H 02 – Associar pontos no plano cartesiano as suas coordenadas e vice-versa
H 62 – Reconhecer a representação algébrica da função polinomial do 2º grau

PRÉ-REQUISITOS: Não há

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 min

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:
Livro didático, quadro e caneta,resumo/explicações, JOGO (trabalhando o plano cartesiano).

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS:
Sanar as dúvidas que envolva as operações com números reais, e através do jogo desenvolver o aprendizado de localização de um ponto e inserção de pares ordenados no plano cartesiano.

METODOLOGIA:

Entregar ao aluno uma folha contendo questões básicas envolvendo conteúdos vistos anteriormente que serão utilizados na aprendizagem de função quadrática.

EXERCÍCIOS

1- Gustavo tinha R$ 300,00 de saldo bancário. Se durante o dia ele deu um cheque de R$ 480,00 e fez um depósito de R$ 210,00, qual foi o saldo no final do dia ?

2- Uma loja de calçados tem quatro departamentos: um de calçados masculinos, uma de calçados femininos, um terceiro de calçados infantis e um quarto de calçados esportivos. O quadro a seguir mostra a venda de cada departamento no mês de Março, em relação ao mês anterior.

CALÇADOS MASCULINOS	60 PARES A MAIS
CALÇADOS FEMININOS	45 PARES A MENOS
CALÇADOS INFANTIS	18 PARES A MENOS
CALÇADOS ESPORTIVOS	30 PARES A MAIS

Qual foi o resultado final da loja do mês de Março, em relação a Fevereiro?

4- O saldo de Sérgio, no dia 01/08/2012, era de R$ 7200,00. No período de 01/08 a 05/08, o seu extrato mostrava o seguinte movimento:

DATA	MOVIMENTO	VALOR
02/08	depósito	R$ 10 000,00
03/08	débito	R$ 13 000,00
04/08	débito	R$ 8 000,00
05/08	depósito	R$ 5 000,00

Qual foi o saldo bancário de Sérgio no dia 05/08/2012?

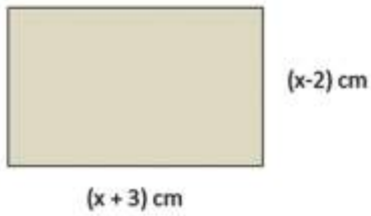
5 – Luciana vai trabalhar todos os dias de táxi. O preço da corrida de táxi é composto de um valor fixo somado a outro que varia de acordo com a distância percorrida. Supondo que o valor fixo seja de R$ 5,40 e que o valor cobrado por quilômetro percorrido seja de R$ 1,50, quanto Luciana pagará por uma corrida de 12 km ?

6- Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

a) escreva a lei da função que fornece o custo total de x peças;

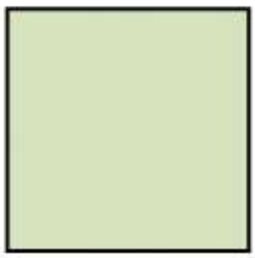
b) calcule o custo total de 100 peças.

7- Observe o retângulo abaixo cujas dimensões estão indicadas em cm:



a) Qual é a função que relaciona as medidas dos lados deste retângulo com sua área?
b) Qual é a função que relaciona as medidas dos lados deste retângulo com seu perímetro?
c) Verifique que ambas as expressões definem funções polinomiais e dê o grau de cada uma dessas funções.

8- A medida do lado do quadrado da figura abaixo é x.



Qual é a relação entre a área y desse quadrado e a medida de seu lado?
a. ( ) y = x2
b. ( ) y = 2x
c. ( ) y = 4x
d. ( ) y = x+2
e. ( ) y = x + 4

9- Complete a tabela abaixo, indicando o grau de cada uma das funções listadas.

Expressão da função polinomial	Grau
f(x) = x + 2 f(x) = x2 f(x) = x2 + 4x - 1 f(x) = -3x + 4 f(x) = 2x3 + 4x - 1	

Agora, através do Jogo, iremos fazer uma revisão sobre o eixo das abcissas, eixo das ordenadas, quadrantes, marcação de pontos e Teorema de Pitágoras.

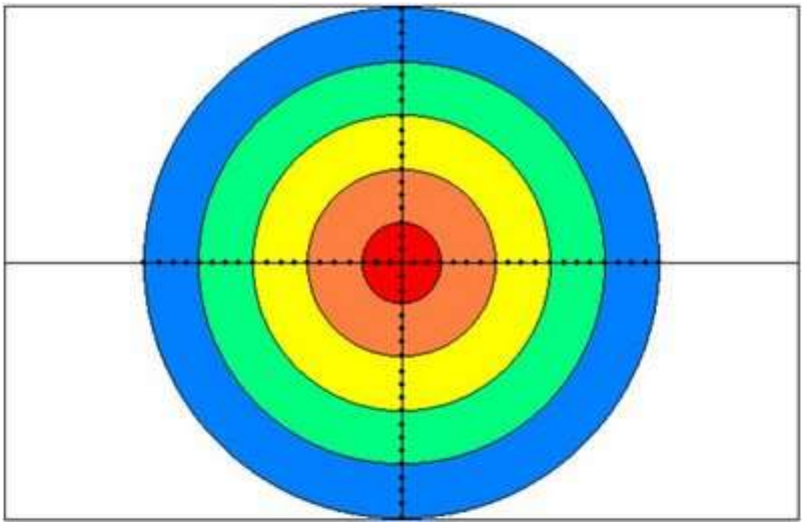
TRABALHANDO O PLANO CARTESIANO

Material Utilizado

1) 1 alvo montado em papel cartão, revestido com plástico colante.

2) Caneta retroprojetora.

O Alvo



O Jogo

Cada área colorida do Alvo equivale a uma quantidade de pontos a definir. Utilizando números pré-definidos que variam de –20 a 20, sorteiam-se 2 números formando um par ordenado. Localiza-se o ponto no plano cartesiano marcando com a caneta retroprojetora. Observa-se a região em que o ponto se localiza anotando a quantidade de pontos. Aquele que, ao final do jogo, somar maior pontuação, vencerá a rodada.

Serão confeccionados 2 conjuntos de peças numeradas. Cada qual com um número, variando de –20 até 20.

Durante as aulas envolvendo o plano cartesiano, utilizar esse jogo para melhor exposição do assunto, de modo a reunir todos os alunos a trabalharem juntos.

Cada aluno sorteia 2 números, formando um par ordenado (x, y) e ele mesmo marca o ponto no plano.

Pode-se fazer uma variação desse jogo: após localizar o ponto ***P*** no plano, pede-se ao aluno para calcular a distância da origem ao ponto ***P*** através do Teorema de Pitágoras. Após algumas jogadas, somam-se todas as distâncias e aquele que obteve a maior soma, ganha o jogo.

ATIVIDADE 2

HABILIDADE RELACIONADA: H 62- Reconhecer a representação gráfica da função do 2º grau

PRÉ-REQUISITOS: Identificar a parábola como sendo o gráfico da função quadrática.

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 min

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:

Folha-resumo com atividades, quadro e caneta

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: turma disposta em grupo (2 ou 3 alunos) propiciando um trabalho organizado e cooperativo.

OBJETIVOS: Relacionar a concavidade da parábola e o coeficiente a; identificar o ponto (0, c) como o ponto em que a

parábola intersecta o eixo y; perceber que o vértice da parábola corresponde ao ponto extremo da função quadrática.

METODOLOGIA:

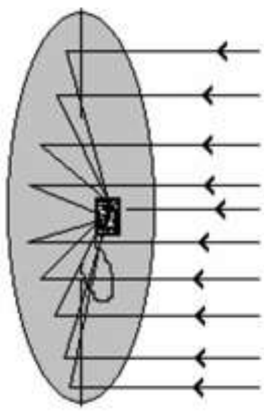
Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são números reais e a $\neq$ 0.
Vejamos alguns exemplos de função quadráticas:

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1
2. $f(x) = x^2 -1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1
3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde a = 2, b = 3 e c = 5
4. $f(x) = - x^2 + 8x$, onde a = 1, b = 8 e c = 0
5. $f(x) = -4x^2$, onde a = - 4, b = 0 e c = 0

Gráfico

Observe as situações a seguir:

- A seção de um farol de automóvel tem o formato de uma parábola. A lâmpada, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola são refletidos numa mesma direção, seguindo retas paralelas ao eixo da parábola.



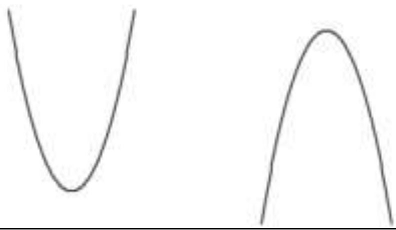
- Uma antena parabólica tem a forma de um parabolóide especial. Como no caso do farol, ela é tal que seu corte por qualquer plano que contenha seu eixo de simetria é uma parábola. Quando um satélite artificial emite ondas, estas podem ser captadas pela sua antena parabólica. Ocorrerá então a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, um aparelho de recepção que converterá as ondas em um sinal. Este será captado por sua TV e transformado em filmes, jornais e outros programas a que você assiste normalmente.

- O movimento descrito por um foguete depois de lançado é uma curva. Nela, podemos observar que o foguete atingirá uma determinada altura e voltará a descer.

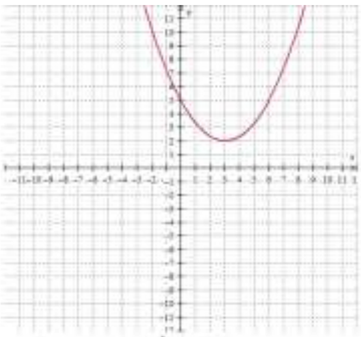
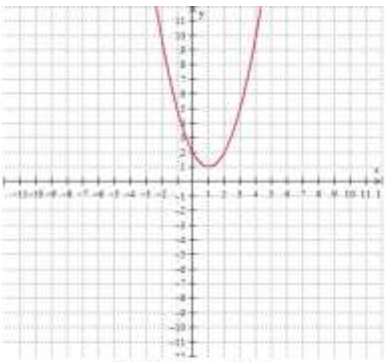
O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada **parábola**.

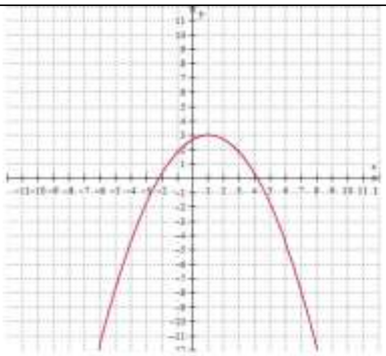
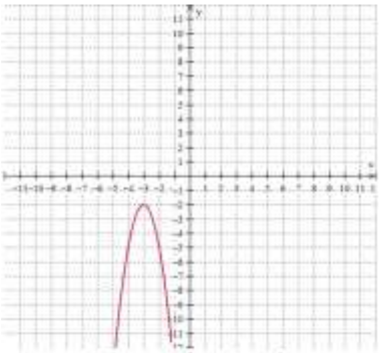
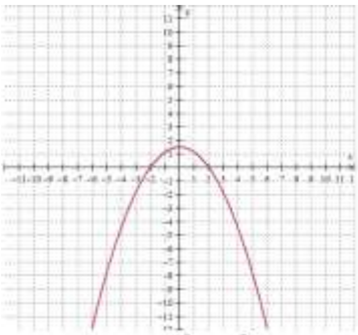
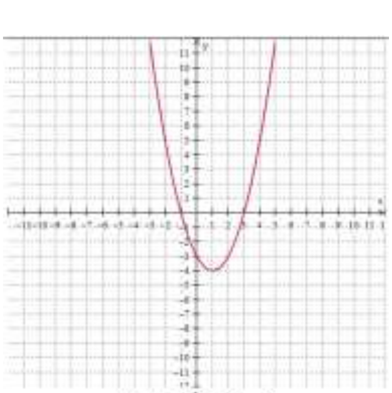
Função quadrática		
Lei de formação: Forma Geral	**Representação gráfica**	
	Parábola côncava para cima	Parábola côncava para baixo

o c.w

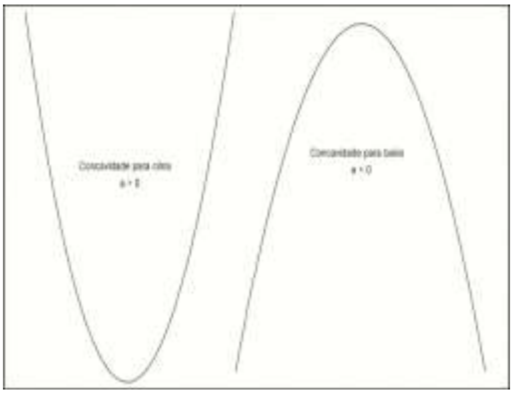


A seguir você encontra funções quadráticas representadas através da sua lei algébrica e também da sua representação gráfica. Identifique o sinal do coeficiente (positivo ou negativo) e a concavidade da parábola (para cima ou para baixo) em cada item proposto:

	Gráfico e Lei Algébrica	Concavidade da Parábola	Coeficiente
1	 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+5$		
2	 $f(x)=x^2-2x+2$		

3	 $f(x)=-0,3x^2+0,6x+2,7$		
	 $f(x)=-3x^2-18x-29$		
	 $f(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}$		
	 $f(x)=x^2-2x-3$		

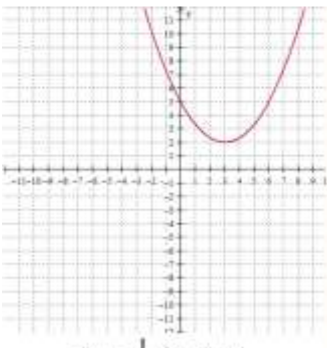
a) Observando a concavidade e o sinal do coeficiente a, você seria capaz de relacioná-los? Discuta com seus colegas e veja se vocês chegam a alguma conclusão. Escreva o que foi observado.

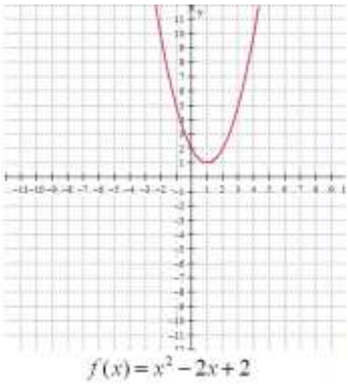
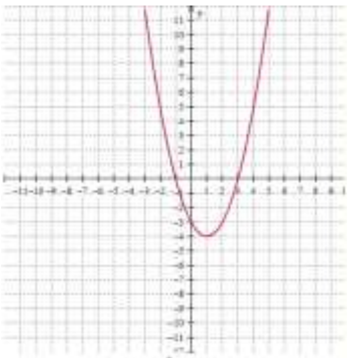
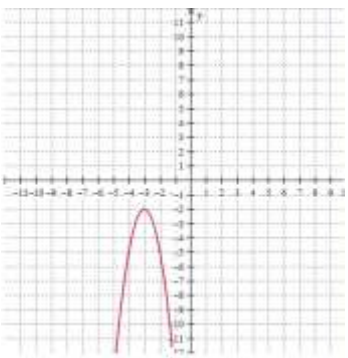


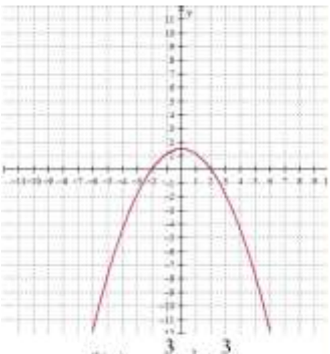
b) Determine a concavidade da parábola associada a cada uma das funções quadráticas a seguir:

i. $J(x) = x^2 - 2x$
ii. $H(x) = 3x^2+2x-1$
iii. $K(x) = 1 - x^2$
iv. $F(x) = 6x - 3x^2$
v. $G(x) = -2(3 - x)(x-4)$

c) Agora, você deve identificar o ponto em que cada parábola intersecta o eixo vertical e o valor do coeficiente das funções quadráticas.

	Gráfico e Lei algébrica	Ponto de interseção entre a parábola e o eixo y	Coeficiente c
	 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$		

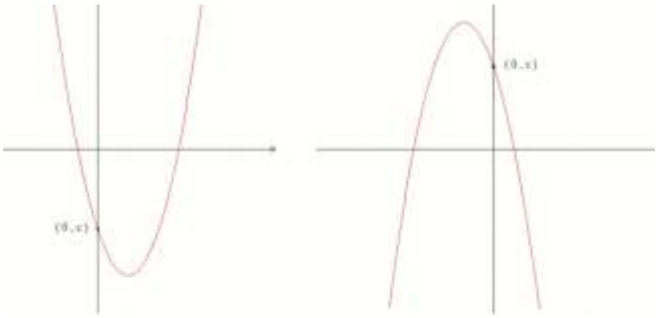
	 $f(x)=x^2-2x+2$		
	 $f(x)=x^2-2x-3$		
	 $f(x)=-3x^2-18x-29$		

	 $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}$		

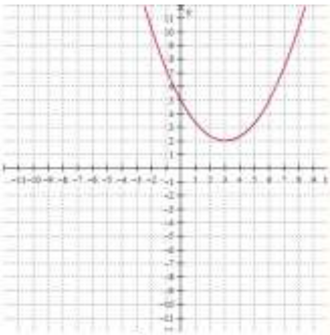
É possível que você tenha encontrado alguma dificuldade para determinar o ponto de interseção da última parábola com o eixo y... Observando as outras parábolas, tente descobrir uma relação entre as duas últimas colunas da tabela. Não deixe de trocar idéias com seus colegas!
Verifique se a relação observada pode ajudar na determinação dos pontos referentes à última parábola.

d) Você seria capaz de escrever uma relação entre o coeficiente e a ordenada (y) do ponto de intersecção entre a parábola e o eixo y?

Na função quadrática de forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são os coeficientes, o coeficiente c é a ordenada do ponto em que a parábola que representa essa função intersecta o eixo y. A figura a seguir exibe esta relação:

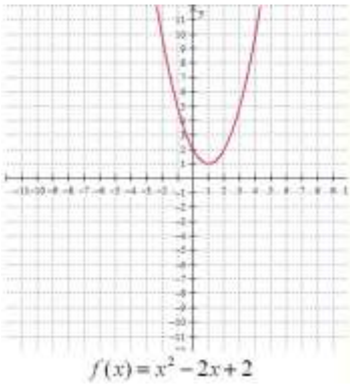


e) Observe atentamente os gráficos abaixo e responda:

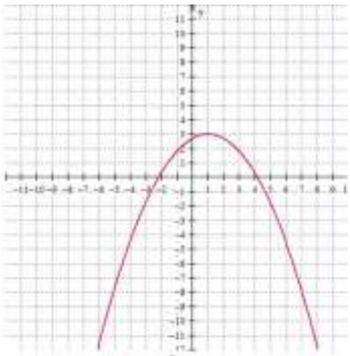


$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$

Valores de x para os quais a função é crescente	
Valores de x para os quais a função é decrescente	
Ponto em que a função passa de crescente a decrescente (ou de decrescente a crescente)	
Conjunto Imagem da função quadrática	
Ponto mais alto/baixo da parábola	
Reta x = ______ que divide a parábola em duas partes iguais	

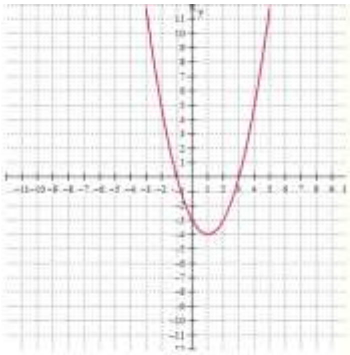


Valores de x para os quais a função é crescente	
Valores de x para os quais a função é decrescente	
Ponto em que a função passa de crescente a decrescente (ou de decrescente a crescente)	
Conjunto Imagem da função quadrática	
Ponto mais alto/baixo da parábola	
Reta x = ______ que divide a parábola em duas partes iguais	



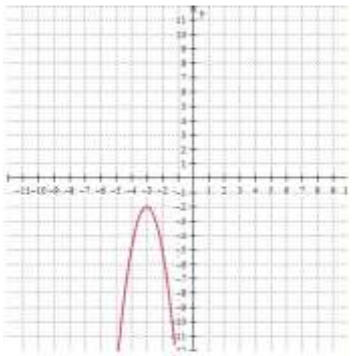
$f(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 2,7$

Valores de x para os quais a função é crescente	
Valores de x para os quais a função é decrescente	
Ponto em que a função passa de crescente a decrescente (ou de decrescente a crescente)	
Conjunto Imagem da função quadrática	
Ponto mais alto/baixo da parábola	
Reta x = ______ que divide a parábola em duas partes iguais	



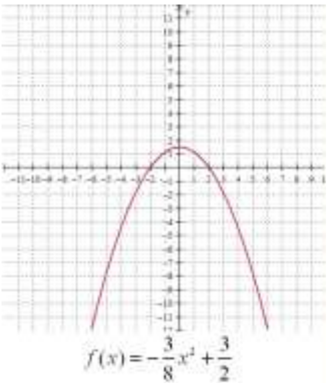
$f(x) = x^2 - 2x - 3$

Valores de x para os quais a função é crescente	
Valores de x para os quais a função é decrescente	
Ponto em que a função passa de crescente a decrescente (ou de decrescente a crescente)	
Conjunto Imagem da função quadrática	
Ponto mais alto/baixo da parábola	
Reta x = ______ que divide a parábola em duas partes iguais	



$f(x) = -3x^2 - 18x - 29$

Valores de x para os quais a função é crescente	
Valores de x para os quais a função é decrescente	
Ponto em que a função passa de crescente a decrescente (ou de decrescente a crescente)	
Conjunto Imagem da função quadrática	
Ponto mais alto/baixo da parábola	
Reta x = ______ que divide a parábola em duas partes iguais	



Valores de x para os quais a função é crescente	
Valores de x para os quais a função é decrescente	
Ponto em que a função passa de crescente a decrescente (ou de decrescente a crescente)	
Conjunto Imagem da função quadrática	
Ponto mais alto/baixo da parábola	
Reta x = ______ que divide a parábola em duas partes iguais	

Na função quadrática de forma geral forma f(x) = ax^2 + bx + c é sempre representada por uma parábola, o vértice é o ponto onde a função passa de crescente a decrescente, se ela tem a concavidade voltada para baixo, ou de decrescente a crescente, se ela tem a concavidade voltada para cima. O vértice então será, nas parábolas voltada para baixo, o ponto mais alto da função – PONTO DE MÁXIMO – e a sua ordenada será o maior valor assumido pela função quadrática – VALOR MÁXIMO. Da mesma maneira, se a concavidade é voltada para cima , o vértice será o ponto mais baixo – PONTO DE MÍNIMO – e sua ordenada será o menos valor assumido pela função – VALOR MÍNIMO.

Zeros e Equação do 2º Grau
Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau f(x) = $ax^2 + bx + c$, a $\neq$ 0, os números reais x tais que f(x) = 0.
Então as raízes da função f(x) = $ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observação
A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, <u>há duas raízes reais e distintas;</u>
- Quando Δ é zero, há <u>só uma raiz real</u>;
- Quando Δ é negativo, <u>não há raiz real</u>.

No gráfico, os zeros de uma função quadrática são as abscissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo x.

<u>Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de interpretação de enunciados e do raciocínio lógico.</u>

ATIVIDADE 3

HABILIDADE RELACIONADA:

H 57 – Resolver problemas envolvendo função do 2º grau

H 62 – Reconhecer a representação algébrica de uma função polinomial do 2º grau

PRÉ-REQUISITOS: **Interpretação de problemas**

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 min

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: folha de atividades, quadro e caneta

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: dupla

OBJETIVOS: Investigar a capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano

METODOLOGIA:

Devido aos alunos terem muita dificuldade em questões de interpretação, foram selecionados situações-problemas para que eles possam trabalhar o raciocínio.

EXERCÍCIOS

1- Sabe-se que o vinho é uma bebida muito consumida no Rio Grande do Sul. Devido a isso, dois amigos resolveram abrir uma indústria de vinho tendo sua produção diária P, em garrafas, variando com o número de operadores em serviço x, de acordo com a função $P(x) = x^2 + 50x + 20000$. Qual será a produção diária, se o número de operadores for 40?

a) 22080

b) 23600

c) 20280

d) 21800

2- Dada a função quadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, determine:

a) f(1)

b) f(0)

c) x, de modo que $f(x) = 1$

e) x, de modo que $f(x) = -1$

4- Quando variamos a medida l do lado de um quadrado, a área da região quadrada também varia. Então, a área da região quadrada também varia. Então, a área é dada em função da medida l do lado, ou seja, $F(L) = L^2$. Calcule:

a) f(10)

b) f(25)

c) l, tal que $f(l) = 225$

5- Um foguete é atirado para cima de modo que sua altura h em relação ao solo, é dada, em função do tempo, pela função $h = 10 + 120t - 5t^2$, em que o tempo é dado em segundos e a altura é dada em metros. Calcule:

a) a altura do foguete 2s depois de lançado;

b) o tempo necessário para o foguete atingir a altura de 485 m.

6- Se a função $f(x) = (2m - 8)x^2 - 7x + 11$ é representada graficamente por uma parábola de concavidade para baixo, qual é o valor do número m?

7- Um corpo lançado do solo verticalmente para cima tem posição em função do tempo dada pela função $\mathbf{f(t) = 40t - 5t^2}$**,** onde a altura **f(t)** é dada em metros e o tempo **t** é dado, em segundos. De acordo com essas informações, responda:

a) O tempo que o corpo levou para atingir a altura máxima é:

a) 2 segundos

b) 3 segundos

c) 8 segundos

d) 4 segundos

b) A altura máxima atingida pelo corpo foi de:

a) 80 metros

b) 40 metros

c) 60 metros

d) 30 metros

<u>Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de interpretação de enunciados e do raciocínio lógico.</u>

ATIVIDADE 4

HABILIDADE RELACIONADA:

H 57 – Resolver problemas envolvendo função do 2º grau

PRÉ-REQUISITOS: Resolução de equações

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 min

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:

Laboratório de informática, quadro e caneta

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: individual

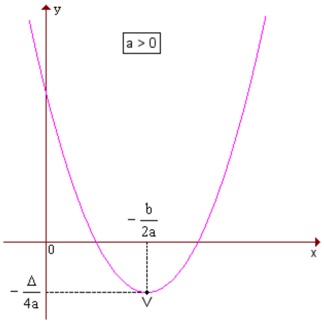
OBJETIVOS: exercitar a capacidade de pensar e buscar soluções para situações e problemas apresentados e que os mesmos tenham relação com sua vivência

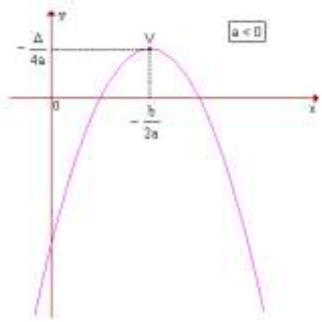
METODOLOGIA:

Apresentar o vídeo "RODA DE SAMBA" para que eles façam associação as coordenadas do vértice. E este também é uma situação do nosso dia a dia que está presente o conhecimento de função quadrática.

COORDENADAS DO VÉRTICE

Em qualquer caso, as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Veja os gráficos:





Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de interpretação de enunciados e do raciocínio lógico.

ATIVIDADE 5

HABILIDADE RELACIONADA:

H 62 – Reconhecer a representação gráfica da função polinomial do 2º grau/

H 66 – Reconhecer intervalos de crescimento e decrescimento e/ ou zeros das funções reais representadas em um gráfico

PRÉ-REQUISITOS: **Resolução de equações e conhecimento dos coeficientes de uma função quadrática e suas características**

TEMPO DE DURAÇÃO: **100 min**

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: folha-resumo, papel quadriculado, quadro e caneta

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: **individual**

OBJETIVOS: **Relacionar a concavidade da parábola e o coeficiente a; determinar os zeros da função; ponto de intersecção com o eixo y; ponto extremo da parábola, intervalo de crescimento e decrescimento; conjunto imagem**

METODOLOGIA:

Será entregue aos alunos uma folha contendo resumo/explicação de como traçar o gráfico sem precisar definir inúmeros pontos.

Construção da Parábola

É possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem montar a tabela de pares (x, y), mas seguindo apenas o roteiro de observação seguinte:

1. O valor do coeficiente **a** define a concavidade da parábola;
2. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x;
3. O vértice V $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se a > 0), ou máximo (se a< 0);
4. A reta que passa por V e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola;
5. Para x = 0 , temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.

EXERCÍCIOS

1- Utilizando o papel quadriculado, faça o esboço das funções dadas pelas leis seguintes, determinando os zeros da função, ponto de intersecção com o eixo y, coordenadas do vértice:

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $f(x) = -2\,x^2 + 4x$

c) $y = x^2 - 4x +4$

d) $f(x) = -4\,x^2 + 6x -9$

2- Com base na questão anterior, responda em cada item:

a) Concavidade voltada para cima ou para baixo;
b) Intervalo de crescimento
c) Intervalo de decrescimento
d) Ponto de Máximo ou Mínimo?
e) Conjunto Imagem

Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de interpretação de enunciados e do raciocínio lógico.

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve o aluno e o professor e deve ser realizada de maneira que ambos podem avaliar o quanto desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

No decorrer do desenvolvimento das atividades, o professor poderá analisar até que ponto os alunos integraram e deram sentido às informações, através do Jogo (trabalhando o plano cartesiano), do vídeo “Roda de Samba” e dos Exercícios de Fixação realizados ao longo das aulas.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões do SAERJINHO, pois através deste o professor poderá verificar a aprendizagem do conteúdo visto neste plano de trabalho.

Aplicação de uma avaliação individual (100 minutos) para investigar a capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano.

FONTES DE PESQUISAS

- BARRETO FILHO, Benigno, XAVIER, Cláudio. Matemática aula por aula. Volume 1. São Paulo: FTD, 2003
- BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. Volume 1. São Paulo: Editora Moderna, 2010.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. Volume 1. São Paulo: Editora Ática, 2012.
- ROTEIROS DE AÇÃO – Função Polinomial do 2º Grau – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br /
- TELE AULAS – TELECURSO 2000
http://www.somatematica.com.br