FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/CONSÓRCIO CEDERJ

TIAGO LOYO SILVEIRA

MATEMÁTICA 1º ANO – 3º BIMESTRE

PLANO DE TRABALHO

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

NOVA IGUAÇU

2012

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Antes mesmo de iniciar esse Plano de Trabalho (PT), eu já estava introduzindo os primeiros conceitos de Função Quadrática aos meus alunos. Isso fez com que esse plano fosse um esboço do anseio e das necessidades dos alunos que eu vinha percebendo e capturando.

Com isso, esse Plano de Trabalho tem por objetivo atender a uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos, captada por mim, nas funções quadráticas: a contextualização. Muitos alunos não conseguem visualizar a aplicação desses conceitos no seu dia-a-dia, e quando conseguem essa visualização se defrontam com a segunda barreira que é a interpretação dos enunciados.

Portanto, mesmo os alunos que conseguem captar o "porquê" das funções quadráticas serem estudadas, ainda se deparam com a interpretação dos enunciados. Retirar do enunciado uma aplicação que envolva funções do 2º grau, ou ainda, construir a equação que define a função baseado nos dados apresentados se torna a principal dificuldade encontrada por eles.

Logo, esse PT, tem o objetivo de exemplificar essas aplicações ao máximo, mostrando as diversas possibilidades de aparecimento das parábola, seja na arquitetura, engenharia, ciência, tecnologia, física, ou até mesmo em arremessos de pedras e bolas. Essa contextualização traz ao aluno a possibilidade de criação de raízes cognitivas que o ajudarão a construir suas próximas funções por assimilação dos problemas já vistos e resolvidos.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1 – Reconhecer forma e utilização das funções do 2º grau

*** HABILIDADE RELACIONADA:** Identificar uma função polinomial do 2º grau.
H62 – Reconhecer a representação Algébrica ou gráfica da função polinomial do 2º grau.

*** PRÉ-REQUISITOS:** Resolução de equações do 2º grau. Conhecer o conceito de função. Conhecer as coordenadas do plano cartesiano.

*** TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

*** RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Projetor e computador.

*** ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

*** OBJETIVOS:** Apresentar a turma imagens de arquitetura e tecnologia que carregam o conceito de parábola; Definir os conceitos básicos de uma função do 2º grau.

*** METODOLOGIA ADOTADA:** Apresentar uma sequência de imagens com arcos de parábola para a turma, com o intuito de despertar a curiosidade sobre essa forma, bem como deixa-los mais íntimos desse tipo de desenho.

1º Momento – Apresentação das Imagens

Para que o objetivo seja atingido, todas as fotos devem ser debatidas com as seguintes indagações: Como possivelmente foram construídas? Qual o objetivo? É meramente estética? Poderia ser de outra forma?

Na arquitetura e Engenharia:

(http://www.arcoweb.com.br/arquitetura/brt-architekten-edificio-berliner-08-01-2004.html)

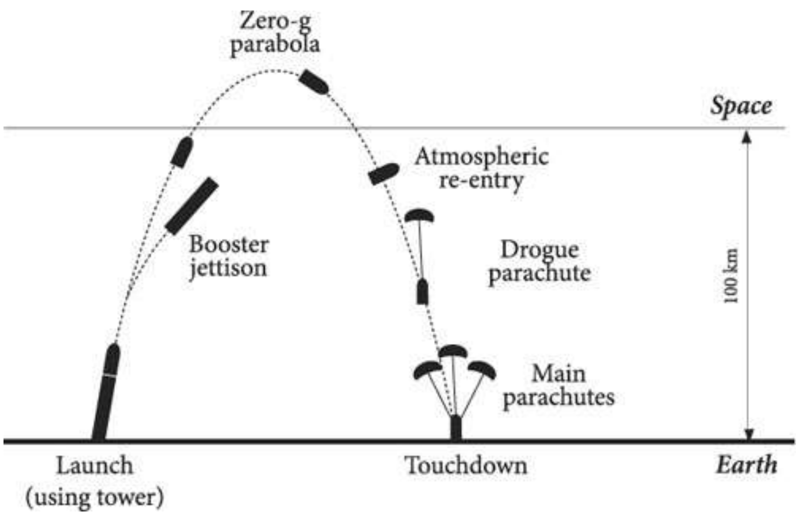
(http://www.mat.uel.br/geometrica/php/gd_t/gd_17t.php)

(http://tudoenumerofafopai.blogspot.com.br/2010/12/as-aplicabilidades-das-curvas-conicas.html)

(http://correiodobrasil.com.br/rio-amplia-sambodromo-que-retoma-tracado-original/196271/)

(DANTE, Luiz Roberto – Matemática: Contexto e Aplicação. São Paulo: Ática, 2010.)

Na Ciência e Tecnologia:



(http://info.abril.com.br/galeria/foguete-para-passeio-espacial.shtml#trajetoria)

(http://noticias.terra.com.br/ciencia/fotos/0,,OI201955-EI301,00-Lancamento+de+foguete+privado+e+realizado+com+sucesso.html)

Após a exposição dessas imagens, deve ser aberta a turma a possibilidade de comentários. Buscar saber se eles conhecem outros fenômenos ou locais que possuem formas de parábola. Criar paralelos com os alunos com outras situações, como uma bola chutada ao gol, ou com uma pedra lançada ao ar. Esse momento tem o objetivo de fazer os alunos construírem a ideia de que as parábolas estão presentes em diversos momentos, basta interpretarmos elas de uma forma mais matemática.

2º Momento – Apresentação das Características Fundamentais da Função do 2º Grau

Definição: Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* ou do 2º grau quando existem números reais **a, b, c,** com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nesse vale ressaltar o porquê do coeficiente **a** não admitir o valor zero, para isso é feita a conexão com as funções lineares (de 1º grau ou afins).

Logo para uma função ser considerada do 2º grau, ela precisa possuir como termo incógnita de maior grau o expoente 2. Sendo assim, o valor de **a = 0**, iria deixar a equação sem o termo de grau 2.

É comum nesse momento os alunos relacionarem a função do 2º grau com a equação do 2º grau. As semelhanças devem ser ressaltadas, inclusive as que irão levar o aluno a resolução do problema. Mas a diferente entre uma equação simples e uma função, na qual podemos determinar diversos valores do domínio X que irão devolver as imagens Y, deve ser ainda mais ressaltada, para que o aluno não acredite que uma função do 2º grau não é nada mais que uma equação do 2º grau com um gráfico.

ATIVIDADE 2 – Definições formais e exemplos de função do 2º grau

*** HABILIDADE RELACIONADA:** Reconhecer as funções polinomiais do 2º grau e suas características; H -57 – Resolver problemas com funções do 2º grau.

*** PRÉ-REQUISITOS:** Conhecer o conceito de função. Conhecer as coordenadas do plano cartesiano.

*** TEMPO DE DURAÇÃO:** 300 minutos

*** RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Projetor, computador, vídeos de frenagens; Teorização por meio de lousa.

*** ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

*** OBJETIVOS:** Reconhecer problemas que recaiam em funções do 2º grau; Reconhecer as características básicas das funções do 2º grau.

*** METODOLOGIA ADOTADA:** Exposição de vídeos com frenagens de veículos, para posterior reflexão sobre gráficos de parábolas com a concavidade voltada para cima. A metodologia adotada será a tradicional teorização do conteúdo por meio de lousa. Nessa atividade o objetivo é apresentar aos alunos as características formais da função do 2º grau, seu gráfico, e os problemas que podem ser resolvidos por meio dessa função.

1º Momento – Apresentação de Vídeos com frenagens

http://www.youtube.com/watch?v=ZP40PoAPDOM&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=eolXhYyt574

Na tabela abaixo encontram-se os valores estimados para as distâncias percorridas (em metros) por um veículo de passeio após o acionamento dos freios e até a sua completa parada, e associados às velocidades (em quilômetros por hora) do veículo no momento em que o motorista aciona os freios. Observe-a.

Velocidade	40	60	80	100	120
Distância Percorrida	16	36	64	100	144

Esses valores são comumente utilizados pela PRF para calcular as distâncias de frenagens de carros de passeio com sistemas de freio comum. Note que os valores não seguem uma linearidade. Na próxima atividade iremos plotar esses pontos no plano cartesiano ou no software Winplot para verificarmos o comportamento dessa parábola.

2º Momento – Teorização do Conteúdo

Definição: Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* ou do 2º grau quando existem números reais **a, b, c,** com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos identificar a função do 2º grau (ou quadrática) com o trinômio do 2º grau a ela associado e a escreveremos simplesmente como $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplos:

1º) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que a = -1, b = 100 e c = 0

2º) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, em que a = 3, b = -2 e c = 1

3º) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$, em que a = -4, b = 4 e c = -1

4º) $f(x) = x^2 - 4$, em que a = 1, b = 0 e c = -4

5º) $f(x) = 20x^2$, em que a = 20, b = 0 e c = 0

Observe que não são funções quadráticas:

- $f(x) = 2x$
- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

CALCULAR O VALOR DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM UM PONTO

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, dois problemas são importantes:

- Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, calcular $f(x_0)$;
- Dada $f(x_0)$, calcular x_0.

1º) Se $f(x) = x^2 - 5x + 6$, vamos calcular o valor dessa função no ponto x = 2, ou seja, $f(2)$.

$$f(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0$$

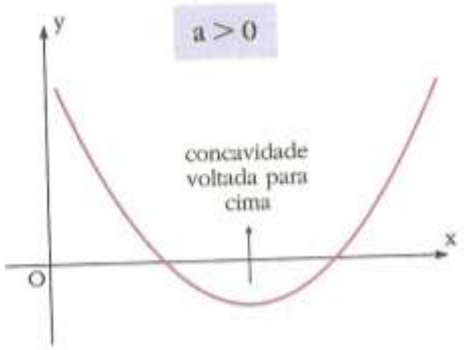
2º) Se $f(x) = 1$ e $f(x) = x^2 - 5x + 7$, qual o valor de x?

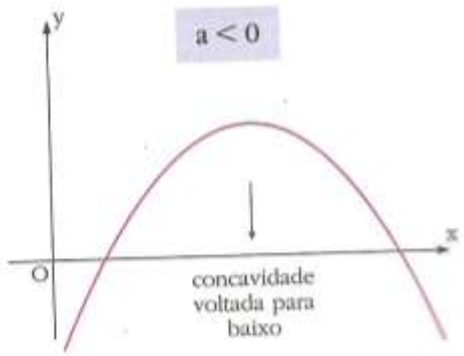
$x^2 - 5x + 7 = 1$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$, o que é uma equação do 2º grau.

Os valores que satisfazem essa equação do 2º grau, ou seja, as raízes dessa equação, são 2 e 3. Logo, x = 2 e x = 3.

RELAÇÃO ENTRE A CONCAVIDADE DE UMA PARÁBOLA E O COEFICIENTE **a**

O gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola, e essa parábola terá a concavidade voltada para cima quando a > 0 e terá a concavidade voltada para baixo quando a < 0.





ZEROS OU RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

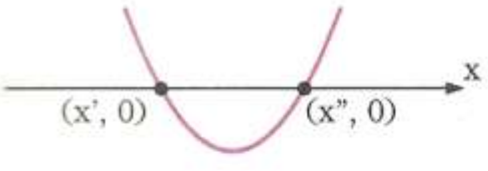
Quando fazemos $ax^2 + bx + c$ igual a zero, isto é, $y = f(x) = 0$, muitas vezes, podemos obter valores de $x \in \mathbb{R}$, aos quais denominamos raízes ou zeros da função.

Para fazer referência a essas raízes, costumamos usar símbolos tais como x' e x'' ou x_1 e x_2.

Então, se $y = 0$, temos que $ax^2 + bx + c = 0$. A fórmula de Bhaskára nos fornece $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x" = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, mas devemos considerar os casos em que o discriminante (Δ) seja:

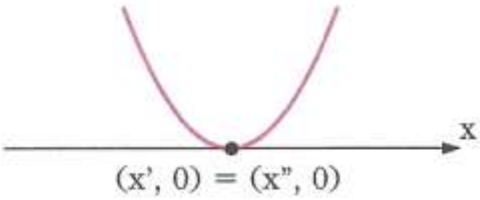
$\Delta > 0$

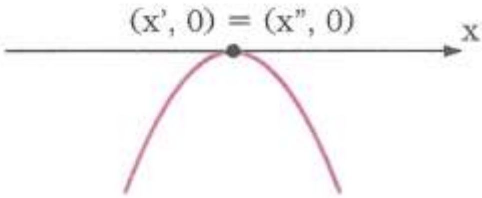
A função tem raízes reais e diferentes, portanto a parábola determina dois pontos distintos no eixo dos x: (x’,0) e (x”,0).



$\Delta = 0$

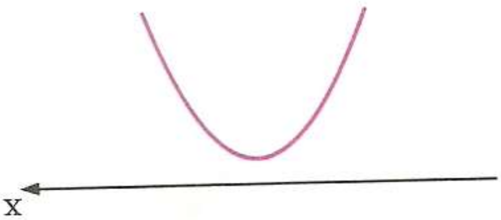
A função tem raízes reais e iguais: x’ = x”, portanto a parábola tangencia o eixo dos x.

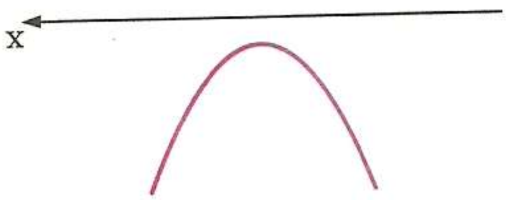




$\Delta < 0$

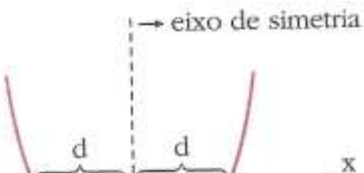
A função não tem raízes reais, portanto a parábola não determina nenhum ponto no eixo dos x.





VÉRTICE DA PARÁBOLA

O vértice V de uma parábola é representado pelo ponto de intersecção do eixo de simetria com a própria parábola. As coordenadas do vértice são:



$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$v\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Dizemos que a parábola de concavidade voltada para cima possui um possuí um ponto mínimo nas coordenadas do vértice. Enquanto na parábola de concavidade voltada para baixo, existem um ponto máximo nas coordenadas do vértice.

PONTO DE INTERSECÇÃO DA CURVA COM O EIXO Y

O ponto onde a curva corta o eixo y possui as coordenadas (0,c), ou seja, c é o ponto onde a curva corta o eixo dos y.

3º Momento – Problemas envolvendo funções do 2º grau

Exemplos de situações que envolvem as funções quadráticas:

1) Em um campeonato de futebol, cada clube vai jogar duas vezes com outro, em turno e returno. Assim, o número **p** de partidas do campeonato é dado em função do número **n** de clubes participantes, conforme vemos na tabela seguinte:

Número de Clubes	Número de Partidas
2	2 (2 – 1) = 2
3	3 (3 – 1) = 6
4	4 (4 – 1) = 12
5	5 (5 – 1) = 20
...	...
n	n (n – 1)

Pela tabela, vemos que o número **p** de partidas é dado por $p(n) = n(n-1) = n^2 - n$. Observe que $n^2 - n$ é o número de pares ordenados (pois há o "mando de campo") menos os jogos de cada time com ele próprio, que não existem.

2) Na queda livre dos corpos, o espaço (**s**) percorrido é dado em função do tempo (**t**) por uma função quadrática $s(t) = 4{,}9t^2$, em que a constante 4,9 é a metade da aceleração da gravidade, que é de 9,8 m/s².

EXERCÍCIOS

1) Identificar *a*,*b* e *c*, nas funções quadráticas abaixo, relacionando a concavidade da parábola com o coeficiente *a*.

a) $f(x) = x^2 - 9x + 8$

b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

2) Determine os zeros das funções quadráticas:

a) $y = -x^2 + 2x + 3$

b) $y = x^2 - 2x + 1$

c) $y = -x^2 + x - 1$

3) Esboçar o gráfico da função $y = -x^2 + x + 6$, determinando:

a) As raízes

b) As coordenadas do vértice

c) A classificação de y_v (valor mínimo ou valor máximo)

d) A intersecção da curva com o eixo y

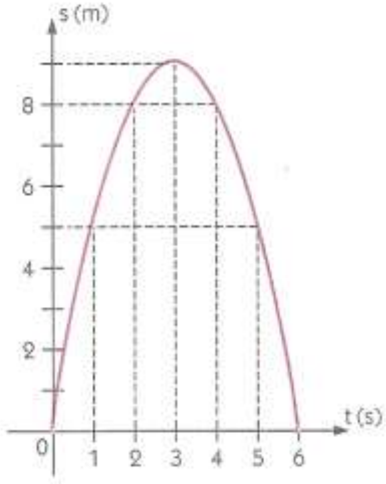
4) A figura representa o gráfico posição X tempo do movimento de uma pedra lançada verticalmente para cima, com certa velocidade inicial, na superfície de um planeta.

Observando o gráfico, determine:

a) Qual é a altura em que deverá estar a pedra, no instante t = 2 s?

b) Em qual instante a velocidade da pedra é nula?

c) O que ocorre com o movimento da pedra nos instantes t = 0 s e t = 6 s? E no instante t = 3 s?



5) Um campeonato é disputado em dois turnos, ou seja, cada time joga duas vezes com cada um dos outros. O total de partidas é 380. Quantos times disputam esse campeonato?

ATIVIDADE 3 – Plotagem de pontos e reconhecimento gráfico da função do 2º grau

*** HABILIDADE RELACIONADA:** H62 – Reconhecer a representação Gráfica da função polinomial do 2º grau.

*** PRÉ-REQUISITOS:** Conhecer o conceito de função. Conhecer as coordenadas do plano cartesiano.

*** TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

*** RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Software Winplot, computador, projetor, alunos com papel milimetrado.

*** ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual ou em grupo, de acordo com a disponibilidade de computadores.

*** OBJETIVOS:** Reconhecer problemas que recaiam em funções do 2º grau. Plotar os pontos necessários para o esboço do gráfico da função do 2º grau.

*** METODOLOGIA ADOTADA:** As metodologias aplicadas nessa atividade podem ser duas. A primeira, no caso de só haver computador disponível ao professor, será a apresentação dos problemas, suas possíveis soluções e a plotagem dos pontos, por parte dos alunos no papel milimetrado, e após, por parte do professor no software Winplot; No caso de haver mais computadores disponíveis, o professor poderá instalar o software nos demais computadores com o intuito de dividir a turma para que os próprios alunos possam plotar os pontos utilizando esse software. Caso não haja computador algum disponível, o professor poderá construir os gráficos na lousa. Um detalhe importante, é que em qualquer das opções, o aluno deverá treinar a marcação dos pontos no papel para que se habitue nessa prática.

1º Momento – Reconhecimento dos diversos gráficos de funções do 2º grau e plotagem de pontos

GRÁFICO DA FUNÇÃO DEFINIDA POR $f(x) = x^2$

Para construir o gráfico, fazemos uma tabela com um número suficiente de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Marcamos esses pontos e desenhamos uma linha contínua passando por eles, pois estamos trabalhando com números reais.

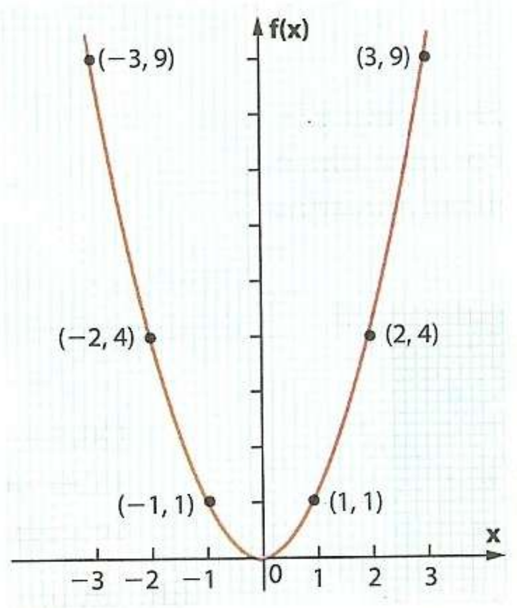
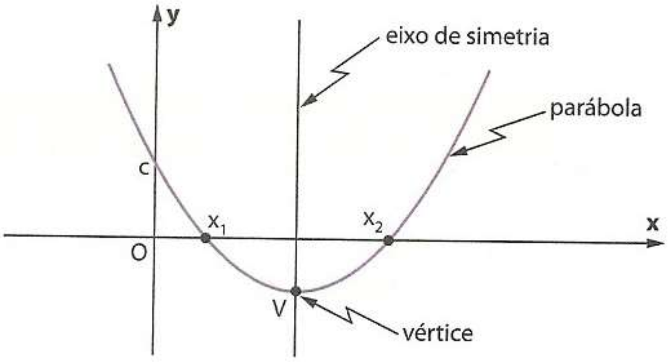


GRÁFICO DA FUNÇÃO DEFINIDA POR $f(x) = ax^2 + bx + c$

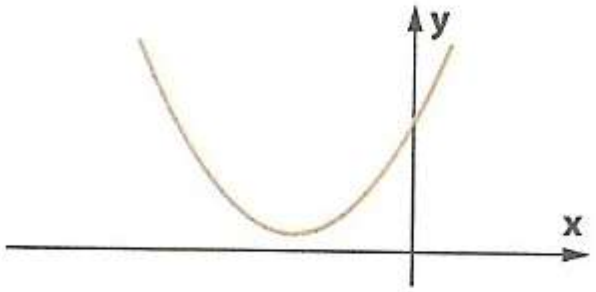
Vamos estudar o efeito dos parâmetros **a, b** e **c** na parábola que representa a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$



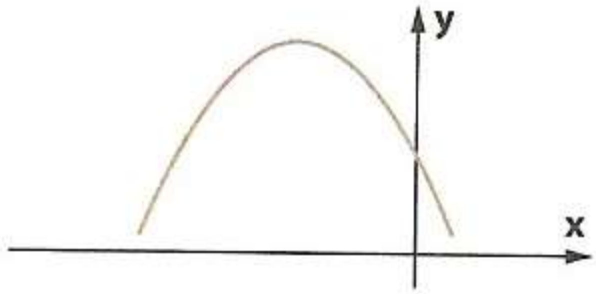
Parâmetro *a*

Responsável pela concavidade e abertura da parábola.

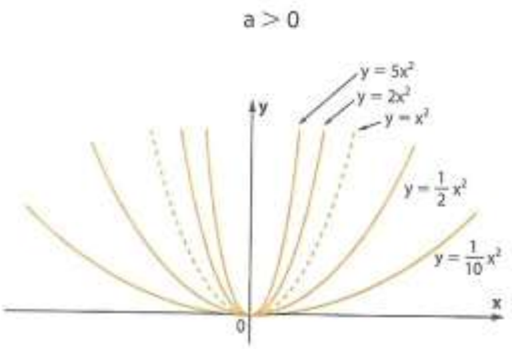
- Se a > 0, a concavidade é para cima

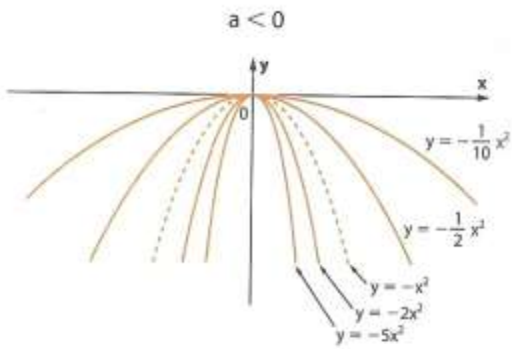


- Se a < 0, a concavidade é para baixo



Além disso, quanto maior o valor absoluto de **a,** menor será a abertura da parábola (parábola mais fechada) independente da concavidade.

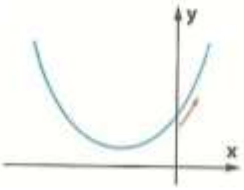


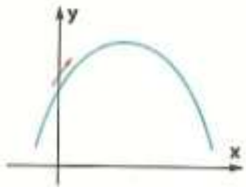


Parâmetro *b*

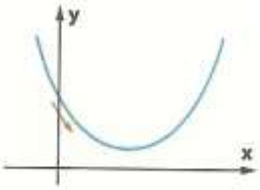
Indica se a parábola intersecta o eixo **y** no ramo crescente ou decrescente da parábola.

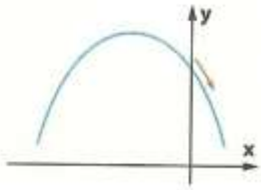
- Se b > 0, a parábola intersecta o eixo **y** no ramo crescente.



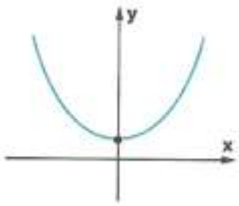


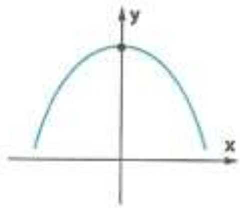
- Se b < 0, a parábola intersecta o eixo **y** no ramo decrescente.





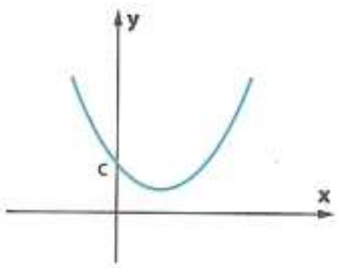
- Se b = 0, a parábola intersecta o eixo **y** no vértice.





Parâmetro *c*

Indica o ponto onde a parábola intersecta o eixo **y.**



A parábola cruza o eixo **y** no ponto (0, c).

2º Momento – Apresentação dos problemas e Plotagem dos Pontos

1) Esboce o gráfico da função quadrática **f** cuja parábola passa pelos pontos (3, -2) e (0, 4) e tem vértice no ponto (2, -4); em seguida, verifique qual das seguintes sentenças corresponde a essa função:

a) $f(x) = -2x^2 - 8x + 4$

b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$

2) A trajetória de uma pedra lançada ao ar corresponde ao trecho da parábola dada por $y = -5x^2 + 20x$ (em metros).

Determine:

a) Se o deslocamento horizontal da pedra for de 2m, a que altura estará a pedra?

b) Quando a pedra estiver a uma altura de 10m, qual será o deslocamento horizontal?

3) A trajetória da bola, num chute a gol descreve uma parábola. Supondo que sua altura **h**, em metros, **t** segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$.

a) Em que instante a bola atinge a altura máxima?

b) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

4) Na atividade 2 encontramos o problema das frenagens de automóveis. Na ocasião podemos perceber que os veículos aumentas a distância percorrida após o acionamento dos freios de uma forma não linear, aumento rapidamente conforme vemos na tabela abaixo:

Velocidade	40	60	80	100	120
Distância Percorrida	16	36	64	100	144

Vamos marcos no plano cartesiano ou no Winplot esses pontos e responder:

a) Esse gráfico representa uma função do 2º grau?

b) Como você classificaria o coeficiente **a** nessa questão, crescente ou decrescente?

AVALIAÇÃO

A avaliação que envolva o professor e os alunos deve ser conduzida com o 2º Momento da Atividade 3. A tarefa deve ser realizada de forma individual para que o professor possa diagnosticar e ajudar cada aluno de forma individual.

A atividade consiste na interpretação dos problemas enunciados e a marcação dos pontos no plano cartesiano com a ajuda do papel milimetrado. Essa atividade engloba simultaneamente os tópicos H57 e H62 da Matriz do Saerjinho, onde o aluno irá se deparar com diversos tipos de funções do 2º grau, bem como terá que trabalhar com os gráficos que surgirão de cada uma.

Apesar de não estar enquadrado na matriz, nos tópicos H57 e H62, um outro ponto importante a ser observado pelo professor é a marcação correta dos pontos no plano cartesiano, pois diversos alunos seguem com déficit nesse conteúdo. Uma avaliação corretiva nesse aspecto, pode liberar o aluno para se desenvolver nas etapas seguintes.

Portanto, o foco principal dessa avaliação, é o diagnóstico e correção de erros e deficiências de conteúdos anteriores ao não.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto – Matemática: Contexto e Aplicação. São Paulo: Ática, 2010.

SILVA, Claudio Xavier da, BARRETO, Benigno Filho – Matemática Aula por Aula. São Paulo: FTD, 2005.

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Funções do 2º Grau – Curso de Formação Continuada - 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/folder/view.php?id=3241.

Vídeos - Endereços eletrônicos acessados de 15/08/2012 a 01/09/2012:

http://www.youtube.com/watch?v=ZP40PoAPDOM&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=eolXhYyt574