

Formação Continuada em Matemática **Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ**

Tarefa 2 - Plano de Trabalho

Trigonometria na Circunferência

Cursista: Jovani Melquiades da Silva
Tutor: André Luiz Rodrigues Santana

Introdução

A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. É possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no *Papiro Rhind* e também uma notável tabela de secantes na tabela cuneiforme babilônica *Plimpton 322*.

A palavra **trigonometria** significa medida das partes de um triângulo. Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagesimais. Mas os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

O astrônomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria" pois, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tabela de cordas. Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. As principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes - duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica - e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios.

As funções periódicas aparecem em uma grande variedade de problemas físicos: vibrações de uma corda, movimento dos planetas ao redor do Sol, rotação da Terra em torno de seu eixo, movimento de um pêndulo, marés e movimento ondulatório em geral, vibrações de uma corda de violino, de uma coluna de ar (por exemplo, numa flauta), e sons musicais em geral. A teoria moderna da luz é baseada na "mecânica ondulatória", com vibrações periódicas como característica; o espectro de uma molécula é simplesmente uma representação das diferentes vibrações que têm lugar simultaneamente nela. Circuitos elétricos envolvem muitas variáveis periódicas; por exemplo, a corrente alternada. O fato de uma viagem ao redor do globo envolver uma variação total de longitude de 360° é uma expressão do fato de serem as coordenadas cartesianas de posição no globo funções periódicas da longitude, com período de 360° ; muitos outros exemplos de tais funções periódicas de coordenadas angulares podem ser dados.

Este plano será aplicado em 8 tempos de cinquenta minutos, sendo dividido da seguinte maneira: seis tempos para aula expositiva e dois tempos reservados a avaliação dos alunos.

HABILIDADE RELACIONADA: Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica.

PRÉ-REQUISITOS: Noções de periodicidade; conceito de função.

TEMPO DE DURAÇÃO: 400 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, quadro branco, folhas de textos e exemplos adicionais.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: A turma será disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e cooperativo

OBJETIVOS: Apresentar ao aluno uma poesia cujo teor nos remete a exemplos de padrões periódicos de comportamento. Apresentar ao aluno um exemplo de padrão periódico de comportamento, estudá-lo e debatê-lo sob o ponto de vista científico. Reconhecer padrões periódicos de comportamento que sirvam para exemplificar, e justificar o estudo de funções periódicas. Identificar nas situações do cotidiano padrões periódicos de comportamento.

METODOLOGIA ADOTADA:

Pôr do sol.

Oscila a onda
Baixa a maré
Vem o pôr do sol
A noite cai
O pêndulo marca a hora
Chega a onda sonora
Os fenômenos sucedem-se em ritmos amenos
Os ciclos repetem-se com simetria
O cientista estudou
E tudo são senos e co-senos
Da trigonometria

Maria Augusta Ferreira Neves

1. O texto acima faz alusão a diversos fenômenos naturais que se manifestam, segundo a autora, em ritmos amenos. Em sua opinião, todos os fenômenos descritos no verso acima são de fato periódicos? Justifique.

R.: Sim, pois se repetem após um ciclo completo: onda sonora, pêndulo, pôr do sol, etc.

2. A natureza de um fenômeno dito periódico reside no fato de que conhecendo um ciclo completo de sua manifestação podemos prever todo o comportamento deste fenômeno, em qualquer momento. Cite dois fenômenos do texto acima que são periódicos.

R.: Pôr do sol e movimento pendular.

3. Você seria capaz de fornecer três exemplos de outros fenômenos físicos que possuem essa propriedade?

R.: Estações do ano, ciclo anual de movimentação de peixes no mar, movimento lunar.

4. Pesquise sobre algum fenômeno que possa servir de exemplo para ilustrar fenômenos periódicos. Traga-o na nossa próxima aula.

R.: Ciclo menstrual, movimento de corpos celestes, batimentos cardíacos, fenômeno da marés, etc .

PERIODICIDADE

Muitas situações cotidianas envolvem a noção de periodicidade. Por exemplo, podemos registrar que os anos bissextos, no calendário gregoriano, repetem-se de 4 em 4 anos, de 8 em 8 anos, de 12 em 12 anos etc. Os anos bissextos, portanto, constituem um fato periódico. O menor intervalo de tempo em que há repetição é chamado de período desse fato.

Com relação aos dias da semana, podemos dizer que eles se repetem de 7 em 7 dias, de 14 em 14 dias, de 21 em 21 dias etc., ou seja, os dias da semana também constituem um fato periódico, cujo período é de 7 dias.

FUNÇÕES PERIÓDICAS

A física e o fenômeno das marés, tensão elétrica, termologia e sistema massa-mola; a biologia e o sistema predador-presa, a quantidade de algas em determinadas baías e a poluição por resíduos industriais; a economia e os empregos temporários e a produção industrial; a medicina e os casos de determinadas doenças infecciosas; a meteorologia e as variações de temperaturas diárias. Bem, todas as situações citadas acima são situações que fazem parte do nosso dia-a-dia e da nossa vida.

Mas, o que tudo isso tem em comum com a matemática? Bom, todas elas podem ser representadas por funções periódicas. Ou seja, funções que executam ciclos, repetições após determinados valores chamados de períodos.

Tais funções periódicas aparecem em uma grande variedade de problemas físicos: vibrações de uma corda, movimento dos planetas ao redor do Sol, rotação da Terra em torno de seu eixo, movimento de um pêndulo, marés e movimento ondulatório em geral, vibrações de uma corda de violino, de uma coluna de ar (por exemplo, numa flauta), e sons musicais em geral. A teoria moderna da luz é baseada na “mecânica ondulatória”, com vibrações periódicas como característica; o espectro de uma molécula é simplesmente uma representação das diferentes vibrações que têm lugar simultaneamente nela. Circuitos elétricos envolvem muitas variáveis periódicas; por exemplo, a corrente alternada. O fato de uma viagem ao redor do globo envolver uma variação total de longitude de 360° é uma expressão do fato de serem as coordenadas cartesianas de posição no globo funções periódicas da longitude, com período de 360° ; muitos outros exemplos de tais funções periódicas de coordenadas angulares podem ser dados.

O sonho dá Matemática...

A princípio você pode achar impossível encontrar uma relação entre sonho e a matemática. Ainda mais entre sonho e trigonometria! Contudo, estudando um pouco sobre o sono e suas diversas fases, fica fácil perceber que de fato tal relação existe.

Atualmente a ciência reconhece a existência de diversas fases durante o processo do sono. O sono, inicialmente, é dividido em duas categorias: o sono **REM** e o sono **NREM**. Este último (NREM) pode ser classificado em quatro fases.

Durante o período de sono, normalmente ocorrem de 4 a 6 ciclos com duração entre 90 a 100 minutos cada. Estes ciclos são compostos pelas fases: NREM, com duração entre 45 a 85 minutos; e REM, que dura entre 5 a 45 minutos. Para medir o sono de uma pessoa, e determinar em qual fase o indivíduo se encontra, os cientistas utilizam três aparelhos capazes de medir variações mínimas em certos parâmetros fisiológicos básicos, são eles: o Eletrencefalograma (EEG), o Eletroculograma (EOG) e o Eletromiograma (EMG).

O Eletrencefalograma (EEG) é o registro gráfico das correntes elétricas desenvolvidas no encéfalo, realizado através de eletrodos aplicados no couro cabeludo, na **superfície encefálica**, ou até mesmo dentro da **substância encefálica**.

O Eletromiograma (EMG) é um teste que é usado para registrar a atividade elétrica dos músculos. Quando os músculos estão ativos, eles produzem uma corrente elétrica. Esta corrente é geralmente proporcional ao nível de atividade muscular.

O Eletroculograma (EOG) é um teste usado para registrar a voltagem constante entre as partes anterior e posterior do olho, com relação ao movimento do globo ocular.

Cada um dos estágios que compõem o sono têm suas próprias características fisiológicas, que são mensuradas com a ajuda dos EEG, EOG e EMG. Verifiquemos cada uma destas características.

i. Vigília ou Estágio

O registro do EEG se caracteriza por ondas rápidas, de baixa amplitude que indicam alto grau de atividade dos neurônios corticais. Também fazem parte desse estágio, movimentos oculares aleatórios e um acentuado tônus muscular. Após 5 a 15 minutos no leito, o indivíduo alcança o primeiro estágio do sono. O período de tempo entre o ato de deitar-se e o de adormecer denomina-se latência de sono.

ii. Estágio 1 – NREM

É a transição entre o estado de vigília e o sono, quando a melatonina é liberada, induzindo-o. Corresponde a 2-5% do tempo total deste. O traçado do EMG apresenta redução do tônus muscular.

iii. Estágio 2 – NREM

Corresponde a 45-55% do sono total. Ocorre a sincronização da atividade elétrica cerebral, que reflete a redução do grau de atividade dos neurônios corticais. Com isto, diminuem os ritmos cardíacos e respiratórios (sono leve), relaxam-se os músculos e cai a temperatura corporal.

iv. Estágio 3 – NREM

Comumente observa-se combinado ao estágio 4. Os movimentos oculares são raros e o tônus muscular diminui progressivamente. Corresponde a 3-8% do sono total.

v. Estágio 4 – NREM

Corresponde a 10-15% do sono total. As ondas delta estão presentes em mais de 50% do tempo neste estágio, podendo até dominá-lo completamente. Ocorrem picos de liberação do HG (hormônio do crescimento) e da leptina. Nesse estágio, o cortisol começa a ser liberado até atingir seu pico (sono profundo), no início da manhã.

vi. Sono REM

O EEG apresenta ondas de baixa amplitude e frequência mista que se assemelham aquelas encontradas no estágio 1, além de ondas no formato de dentes de serra. O indivíduo apresenta máxima hipotonia da musculatura esquelética, exceto pelas oscilações da posição dos olhos, dos membros, dos lábios, da língua, da cabeça e dos músculos timpânicos. É neste período que ocorre a maioria dos sonhos, e corresponde a 20-25% do sono total.

Durante o sono, o indivíduo passa, geralmente, por ciclos repetitivos, começando pelo estágio 1 do sono NREM, progredindo até o estágio 4, regride para o estágio 2, e entra em sono REM. Volta de novo ao estágio 2, e assim se repete novamente todo o ciclo.

Um indivíduo que seja acordado no estágio REM, quase sempre, é capaz de se lembrar do sonho que estava tendo, com riqueza de detalhes. Nesse estágio, o cérebro processa as informações sensoriais externas unindo-as ao sonho que estamos tendo. Por exemplo, é muito comum sonharmos com o telefone tocando e acordarmos no momento em que ele está de fato tocando.

Acordado - ondas de baixa voltagem



Vigília - 8 a 12 ciclos por segundo - ondas *alpha*



Estágio 1 - 3 a 7 ciclos por segundo - ondas *theta*



Estágio 2 - 12 a 14 ciclos por segundo - fusos do sono e complexos K



Sono delta - 1/2 a 2 ciclos por segundo - ondas delta > 75 μ V



Sono REM - baixa voltagem - atonia muscular



Eletronecefalograma (EEG) destacando o comportamento dos diferentes estágios do sono.

a) Baseado no texto acima sobre sono, responda: Você acha que o sono é um exemplo de fenômeno natural que se processa de forma periódica?

R: O aluno deverá usar a “intuição” para tecer sua opinião. Provavelmente ele estabelecerá uma linha de raciocínio baseado nas afirmações que o texto fornece sobre os fenômenos, ou utilizará os gráficos acima para justificar suas teorias. Normalmente, esta é a linha usual de raciocínio da grande maioria das pessoas que entendem, pelo menos, o conceito de periodicidade; contudo, não se pode afirmar que nenhuma das fases do sono, acima descritas, são de fato periódicas. Por

exemplo, o tempo de cada uma dessas fases pode divergir de pessoa para pessoa, e de um dia para o outro, mesmo que analisemos um único indivíduo.

b) Descreva todos os estágios do sono de um indivíduo, que teve cinco ciclos completos durante a noite, e foi acordado no fim do quinto ciclo durante o estágio denominado de REM.

R: Estágio 0 ou Vigília -> Estágio 1 -> Estágio 2 -> Estágio 3 -> Estágio 4 -> Estágio 2 -> Sono REM (1º Ciclo) -> Estágio 2 -> Estágio 3 -> Estágio 4 -> Estágio 2 -> Sono REM (2º Ciclo) -> Estágio 2 -> Estágio 3 -> Estágio 4 -> Estágio 2 -> Sono REM (3º Ciclo) -> Estágio 2 -> Estágio 3 -> Estágio 4 -> Estágio 2 -> Sono REM (4º Ciclo) -> Estágio 2 -> Estágio 3 -> Estágio 4 -> Estágio 2 -> Sono REM (5º Ciclo) -> Acordado

O ELO MATEMÁTICA – MÚSICA

Igor Stravinsk, compositor russo nascido em 1882 (autor de “O Pássaro de Fogo”, “A Sagração da Primavera”, “Petruchka” etc), observou certa vez que a forma musical está muito mais próxima da forma matemática do que da literária. Assim como Stravinsk, muitos compositores compartilham esse ponto de vista.

E desde quando o homem a suspeitar desse inter-relacionamento?

Podemos dizer que suas origens remontam à Antiguidade, quando Pitágoras e seus discípulos fizeram um estudo das cordas vibrantes.

A CORDA VIBRANTE

Embora certamente não tenham sido os pitagóricos os primeiros a observar que a vibração de uma corda tensionada é capaz de produzir variados sons, a eles devemos a primeira teoria sobre o relacionamento entre a Música e a Matemática. Na sua forma mais simples, tal teoria pode ser assim descrita:

Tomemos uma corda de violão, de 60 cm de comprimento, distendida ao máximo.

Ao fazê-la vibrar, a corda emitirá um som, num determinado tom.

O tom é a medida do grau de elevação ou abaixamento do som de um instrumento.

Suponhamos, agora, que só a metade da corda (30 cm) vibre.

Um novo tom será ouvido, ou seja: uma oitava harmônica acima do primeiro.

Quando só $\frac{2}{3}$ da corda vibrarem (isto é, 40 cm), o tom será uma quinta harmônica acima do primeiro tom considerado.

A razão do nome quinta harmônica é devido ao fato de que a nota representativa desse tom se acha, numa pauta musical, a 2 espaços e 3 linhas da nota original perfazendo um total igual a 5.

No caso da oitava acima, a sua nota representativa se acha a 4 linhas e 4 espaços da nota original (total igual a 8).

Tomemos, agora, uma corda, igualmente tensionada, cujo comprimento seja o dobro da primeira (isto é, 120 cm). Ao vibrá-lo, o tom ouvido será uma oitava harmônica abaixo do inicial.

Assim, Pitágoras descobriu que se pode abaixar ou aumentar um tom inicial, aumentando-se ou diminuindo-se, respectivamente, o comprimento da corda vibrante.

A importância desses fatos, para Pitágoras, residia em que os novos tons se associavam com o original por meio de frações, estabelecendo relações entre os números naturais. Confirmava-se, pois, ainda a sua teoria de que tudo no Universo estaria relacionado com os números naturais.

Pitágoras elaborou sua teoria musical indicando as notas por meio dessas relações.

Assim, para os pitagóricos, a fração $\frac{1}{2}$ indicava uma oitava acima do primeiro tom.

Vejamos como isso se aplica à escala musical. (A escala musical, tomando-se dó como tom inicial, é: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó).

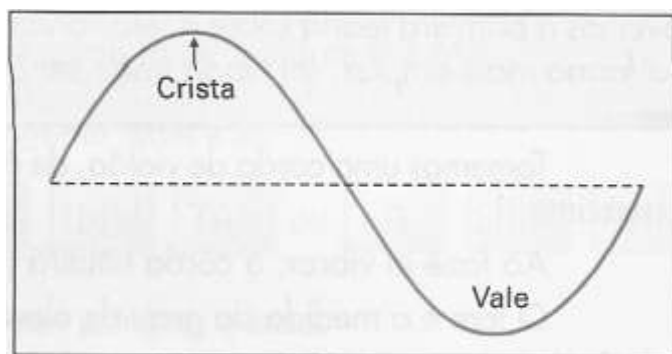
Por exemplo, se o tom inicial é dó, a nota indicada por $\frac{2}{3}$ será sol, ou seja, a quinta nota acima de dó.

FREQUÊNCIAS E INTERVALOS

Sabemos, atualmente, que tais razões são relações entre frequências.

A frequência de uma corda corresponde ao número de vibrações que emite por segundo, medidas numa unidade denominada hertz (abreviatura: Hz).

O tom mais baixo, perceptível pelo ouvido humano é de 16 oscilações por segundo. Isto significa que ele tem uma frequência de 16 hertz. Podemos representar duas vibrações sucessivas por uma onda constituída de uma crista e de um vale. Tal onda recebe o nome de onda senoidal. Um tom cuja frequência corresponde a 16 hertz é representado por 16 cristas de onda com 16 vales adjacentes.



Os tons mais altos audíveis pelo ouvido humano têm frequência entre 14000 e 16000 Hz. Um contrabaixo, por exemplo, produz tons cujas frequências se acham entre 40 e 240 Hz. Os instrumentos que apresentam maiores faixas de frequência são os órgãos e pianos (30 a 5000 Hz).

A experiência nos mostra que o efeito musical de dois sons emitidos sucessiva (melodia) ou simultaneamente (acordes) só depende das relações entre as suas frequências (chamadas intervalos).

Supondo-se que a primeira nota, dó, tenha frequência 1, obteremos para as outras notas as seguintes frequências (frequências relativas ou intervalos)

dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Isto significa, por exemplo, que:

$$\frac{\text{frequência de ré}}{\text{frequência de dó}} = \frac{9}{8}$$

Avaliação

Por mais que tentemos tornar a avaliação algo objetivo, ela é parcialmente subjetiva. O avaliar não se resume na medição do quanto o aluno aprendeu ou da profundidade do que aprendeu, mas na percepção do aprendizado do aluno com base em critérios previamente elaborados que levaram em consideração aspectos como valores e outros objetos formativos.

A avaliação possui as características de ser contínua, sistemática, funcional, integral ou orientadora. Ou seja, ela deve ocorrer durante todo o processo e ser planejada previamente.

Para podermos avaliar o que fora proposto nesse plano, a avaliação se dará em dois dias: No primeiro dia de avaliação cada dupla (ou trio) deverá fazer uma síntese (resenha) a cerca do entendimento por parte da dupla sobre periodicidade, fenômenos periódico e sua importância no dia a dia.

No segundo dia cada dupla (ou trio) deverá pesquisar e trazer para a aula pelo menos dois textos sobre fenômenos físico-químicos do corpo humano ou naturais que possam servir de exemplo para ilustrar fenômenos periódicos e a partir deles destacar qual fenômeno que está acontecendo em cada texto e qual sua importância?

Obs: Caso os alunos não encontrem nenhum texto para o segundo dia de avaliação, serão utilizados dois textos do livro de Física para o ensino médio (vide bibliografia) páginas 313 e 314 (Poluição sonora) e 317 e 318 (O Timbre).

Referência Bibliográfica

ROTEIROS DE AÇÃO – Trigonometria na Circunferência – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012 – <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/> acessado em 16/09/2012.

MATEMÁTICA: ciência e aplicações, 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et. al]. – 6ª Ed. – São Paulo: São Paulo, 2010.

MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO – VOLUME 1 – 1ª série / Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz – 5ª Ed. – São Paulo: Saraiva, 2005.

FÍSICA PARA O ENSINO MÉDIO, VOLUME 2 / Luiz Felipe Fuke, Kazuito Yamamoto. – 1ª edição – São Paulo: Saraiva, 2010.

Endereço eletrônico acessado de 14/09/2012 a 16/09/2012, citado ao longo do trabalho:

http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm