Formação Continuada em Matemática
Matemática 9º Ano – 3º bimestre/2012

Plano de Trabalho

Funções

Tarefa 01
Cursista: Silvana de Andrade e Silva
Tutor (a): Claudia Valéria da Silva

Sumário

Introdução

O objetivo deste plano de trabalho é permitir que os alunos percebam o conceito de função partindo de situações comuns do seu cotidiano. Além de poderem identificar nas mesmas uma ferramenta com aplicações em outras áreas do conhecimento tais como: Física, Biologia, química, etc.

A presente proposta visa enfatizar a ideia de variação, ou grandezas que variam, uma dependendo da outra através de gráficos, tabelas e fórmulas. Lembrando a importância de rever os conceitos e diferenças entre a noção de incógnita e variável. Para que o estudo das funções seja completo é necessário destacar noções de variável, dependência, regularidade e generalização.

Outra proposta inclusa no trabalho é a construção do gráfico de uma função. Atualmente, é de suma importância o aluno saber analisar um gráfico e fazer sua leitura. Várias situações do cotidiano são representadas através dessa ferramenta e veiculadas através das mídias. Essas representações gráficas visam retratar os dados numéricos de situações como se fosse um "retrato" da parte algébrica que está por trás das informações levantadas através de pesquisas feitas por determinados órgãos específicos.

Por último, utilizar o conceito de função para nortear a resolução de problemas práticos e teóricos , relacionando as grandezas envolvidas. Até aqui, não serão mencionado os tipos de funções, pois nesse segmento de ensino as principais diretrizes a serem seguidas estão envoltas na construção do conceito de função para a posteriori serem trabalhados os casos particulares no 1º Ano do Ensino Médio.

Parte do plano de trabalho será transformada em uma apostila para os alunos.

Nesse plano de trabalho não será proposto nenhuma atividade que envolva software ou DVD, pois a escola não possui um ambiente de trabalho propício ao desenvolvimento de atividades no laboratório de informática e a única TV que a escola tem encontra-se com problemas.

Desenvolvimento

Atividade 1: Entendo o Conceito de Função

- Habilidades Relacionadas: Compreender intuitivamente o conceito de função como relação entre duas grandezas.
- Pré-requisito: Resolução de expressões algébricas.
- Tempo de Duração: 100 minutos.
- Recursos Utilizados: Ficha de atividade.
- Organização da Turma: Individual
- Objetivos: - Conceituar uma função.
  - Compreender o significado de grandezas dependentes de outras.
- Metodologia Adotada:

I – Funções, suas tabelas e suas fórmulas.

Para desenvolver essa primeira atividade é necessário concentrar-se mais nos significados e nos sentidos das ideias do que em procedimentos e técnicas.

Este procedimento difere-se bastante do habitual, pois levará o aluno a refletir sobre as situações dadas e desta forma, de maneira intuitiva chegar ao conceito de função.

Comecemos por introduzir alguns exemplos do cotidiano. Exemplos esses que permitam o aluno refletir sobre situações reais nas quais sugerem o conceito de função. Onde possam perceber que quando falamos que uma determinada quantidade varia em "função" de outra significa o mesmo que uma quantidade "depende" de outra.

Com isso para termos uma ideia do que é uma função, podemos pensar em duas grandezas que variam, uma dependendo da outra, seguindo uma determinada ordem.

Exemplo 1: Observe o equipamento usado para retirar água de um rio:

Quando uma barra de madeira desce ***x*** centímetros, a outra ponta sobe ***y*** centímetros. O comprimento ***y*** depende do comprimento ***x*** e, por isso, temos aqui uma função. Dizemos que ***y*** é função de ***x***.

Exemplo 2: Em algumas localidades o pãozinho é vendido a quilo, em outras, por unidade. Para facilitar, o funcionário da padaria consulta uma tabela para dar o preço dos pães que estamos comprando. Pense nestas variáveis: n, número de pãezinhos, e P, preço dos n pãezinhos. Temos uma função, pois o P depende de n. A variação de P pode ser observada na seguinte tabela:

n (número de pãezinhos)	1	2	3	4	5	...
P (preço em reais)	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75	...

Exemplo 3: Em 1602, Galileu Galilei fez uma descoberta fundamental para a Física. Fazendo vários experimentos, anotando dados, preenchendo tabelas, ele descobriu que a distância **d** percorrida por um corpo que cai livremente é função do tempo **t**. Se d é dado em metros **t** é dado em segundos, a fórmula dada aproximada para essa função é:

$$\mathbf{d} = 4{,}9.\ \mathbf{t}^2$$

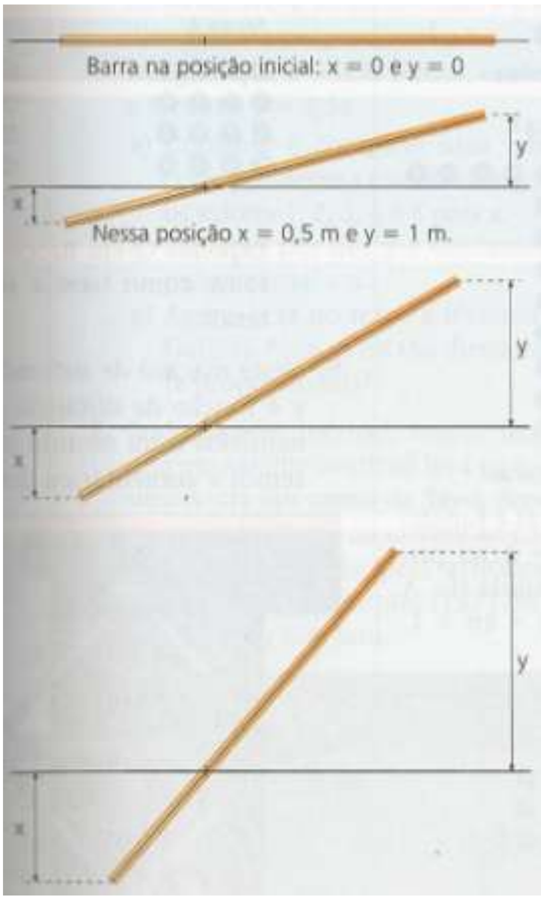
A fórmula mostra como **d** varia em função de **t**.

Até aqui você viu três ideias básicas relacionadas com funções: variação, tabela e fórmulas. Tabelas e fórmulas exprimem como é a variação da função.

O texto com os exemplos acima fará parte do material do aluno.

Atividades

1 – Vamos considerar uma barra giratória como a do exemplo 1 do texto. Os desenhos estão numa escala de 1:100.



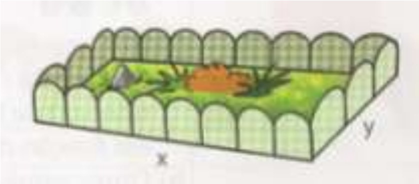
a) Meça os comprimentos x e y em cada posição da barra. Depois complete a tabela com as medidas obtidas:

x (em metros)	0	0,5		
y (em metros)	0	1,0		

2 – Veja no texto a função de Galileu e Galilei, que relaciona a distância percorrida por um corpo que cai com o tempo de queda e responda as seguintes questões:

a) Em 5 segundos, quantos metros caem um metro?
b) Se t = 6s, quanto vale d?
c) Quanto tempo aproximadamente leva uma pedra para cair 80 metros?

3 – Usando 26 metros de tela posso cercar diversos jardins retangulares de 26 metros de perímetro.



Nesse retângulo, o comprimento **y** é função do comprimento **x:**

a) Deduza a fórmula que dá **y** em função de **x**. Para começar, note que, $2x + 2y = 26$.
b) Complete a tabela utilizando a fórmula do exercício anterior:

x(m)	1	2	3	4,5	6,5
y(m)					

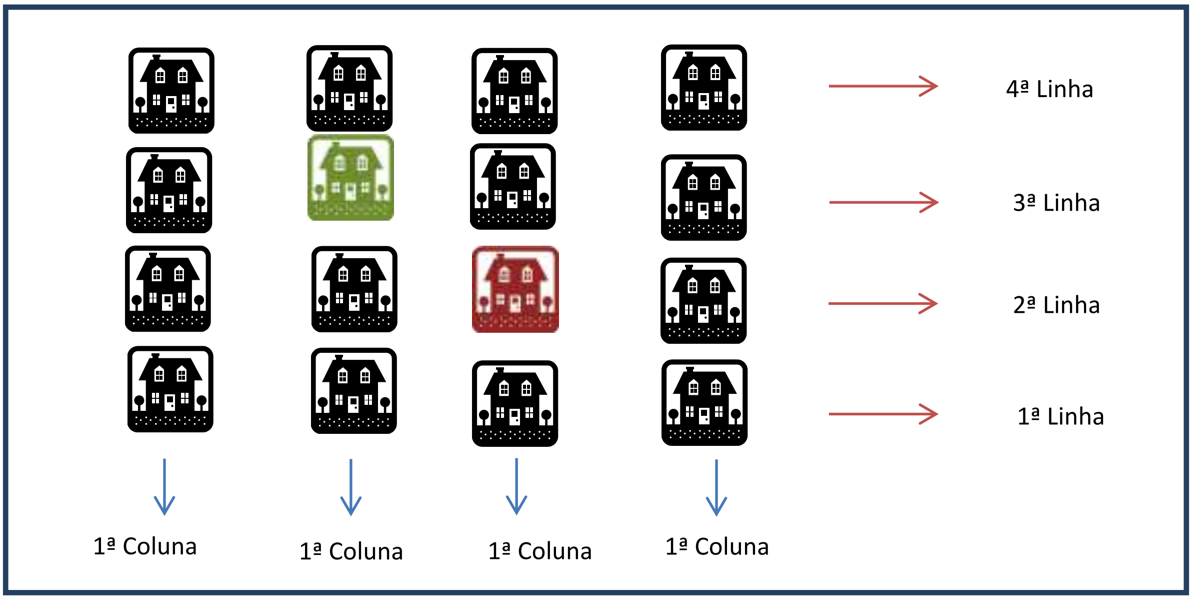
Atividade 2: Pares Ordenados.

- Habilidades Relacionadas: Representar pares ordenados no plano cartesiano.
- Pré-requisito: Resolução de expressões algébricas.
- Tempo de Duração: 100 minutos.
- Recursos Utilizados: Jogo, régua, papel quadriculado ou milimetrado, ficha de atividade.
- Organização da Turma: Individualmente e num segundo momento em dupla.
- Objetivos: - Representar pontos no plano cartesiano;
  - Identificar o par ordenado de um determinado ponto previamente marcado no plano cartesiano.

- Metodologia Adotada:

I - Introduzindo os pares ordenados:

Confeccionar um cartaz com a seguinte imagem.



Construindo a ideia de par ordenado, sugere-se as seguintes questões para a turma:

- *Como poderíamos determinar o "endereço" da casa vermelha tomando primeiro a coluna e depois a linha na qual ela se encontra?*

- *Da mesma maneira como poderíamos determinas o endereço da casa verde?*

Desta forma, utilizando a localização através de coluna e linha, poderíamos determinar o endereço de todas as casas.

Como as casas ocupam lugares diferentes é fácil perceber que seus endereços também são diferentes. No caso das casas vermelha e verde, respectivamente, tem-se:

$$(3,2) \neq (2,3)$$

Daqui para frente chamaremos esse "endereço" de par ordenado. O próprio nome já indica que existe uma ordenação na composição dos elementos que formam o par.

II – Hora de Jogar:

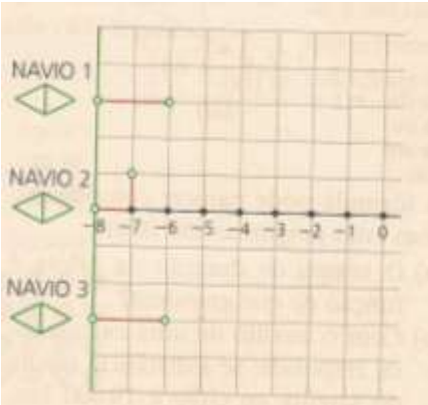
Separar a turma em duplas e propor jogo a seguir. As fichas do jogo serão entregues aos alunos prontas, somente para eles marcarem os pontos.

Batalha Naval de Alvo Móvel

Neste jogo, uma dupla (esquadra verde) enfrenta a outra (esquadra azul). Vejam as regras:

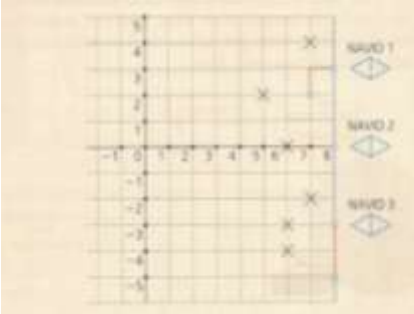
1 – Cada dupla tem seu mapa, onde registra a trajetória de sua esquadra e os tiros dados. A dupla não vê o mapa da dupla adversária.

2 – **Movimentos iniciais**: Os três navios da esquadra verde saem dos três pontos assinalados na linha verde; cada um deles anda para cima, para baixo e para a direita, num total de duas unidades. Veja alguns movimentos possíveis e seu registro.



Os três navios da esquadra azul fazem o mesmo, só que saem da linha azul e avançam para esquerda.

3 – **Tiros iniciais**: a esquadra verde dá seis tiros. Por exemplo, (7;4), (6;0), (6,-3), (5;2), (7; -2), (6 ;- 4). Veja a localização desses tiros:

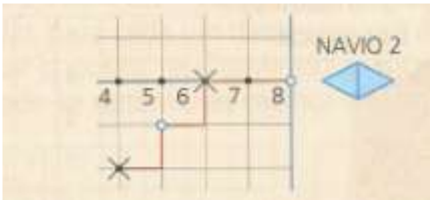


Em seguida a esquadra azul informa se algum navio foi atingido. Quando isso acontece, pinta-se um dos pequenos triângulos que formam o navio atingido.

Na sequência a esquadra azul dá seis tiros, em condições similares.

4 – **Prosseguimento**: Os navios da esquadra verde voltam a andar duas unidades (jamais para a esquerda) e os azuis também (jamais para a direita). Depois cada esquadra volta a atirar. E assim continua o jogo...

5 – **Navio afundado**: É o que foi atingido em duas ocasiões diferentes. Depois que um de seus navios afunda, a esquadra dá dois tiros a menos.



6 – **Vencedor**: Vence a esquadra que afundar todos os navios adversários ou que primeiro atingir a linha base do adversário (linha inicial verde ou azul, respectivamente).

7 – **Registro:** É obrigatório o registro da rota do seu navio. O adversário pode examina-lo após a batalha terminar. Para isso, deverá também registrar todos os tiros.

III – Fixando o conteúdo:

Agora que os alunos já puderam perceber ludicamente a marcação dos pares ordenados no plano através do jogo, será introduzido formalmente o conteúdo.

Material de apoio para o aluno:

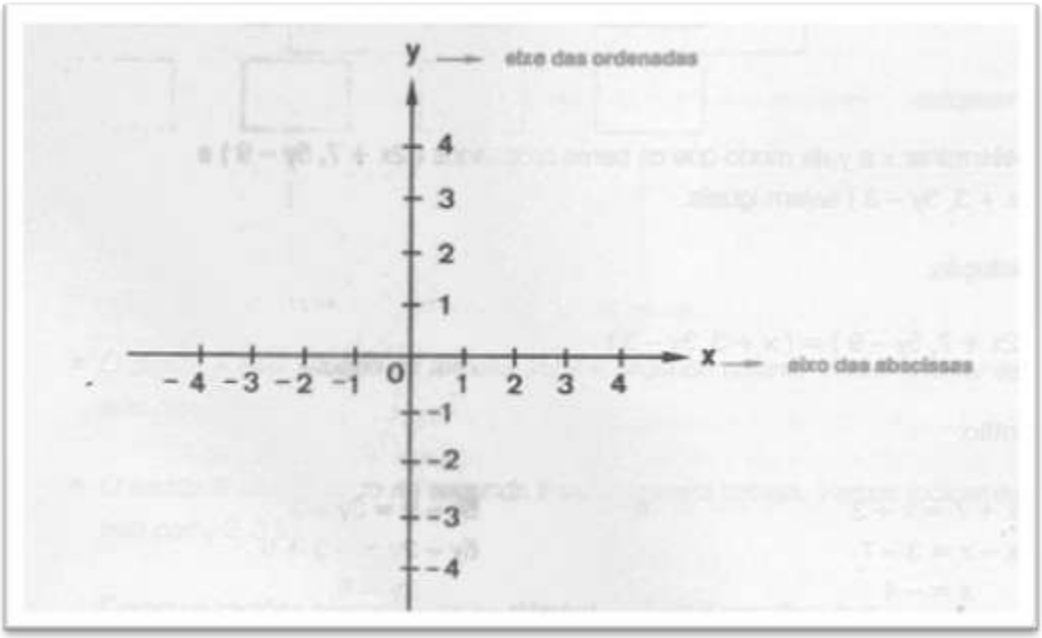
Um pouco da História da Matemática

René Descartes deve ser considerado um gênio da Matemática, pois relacionou a Álgebra com a Geometria, o resultado desse estudo foi a criação do Plano Cartesiano. Essa fusão resultou na Geometria Analítica. Descartes obteve grande destaque nos ramos da Filosofia e da Física, sendo considerado peça fundamental na Revolução Científica, por várias vezes foi chamado de pai da Matemática moderna. Ele defendia que a Matemática dispunha de conhecimentos técnicos para a evolução de qualquer área de conhecimento.

O ***Sistema de Coordenadas Cartesianas***, mais comumente conhecido como ***Plano Cartesiano***, consiste em dois eixos perpendiculares numerados, denominados abscissa (horizontal) e ordenada (vertical), que tem a característica de representar pontos no espaço.

Descartes utilizou o Plano Cartesiano no intuito de representar planos, retas, curvas e círculos através de equações matemáticas. Os estudos iniciais da Geometria Analítica surgiram com as teorias de René Descartes, que representavam de forma numérica as propriedades geométricas. Além do Cálculo e da Geometria Analítica, os estudos de Descartes permitiram o desenvolvimento da Cartografia, ciência responsável pelos aspectos matemáticos ligados à construção de mapas.

Fonte : http://www.brasilescola.com



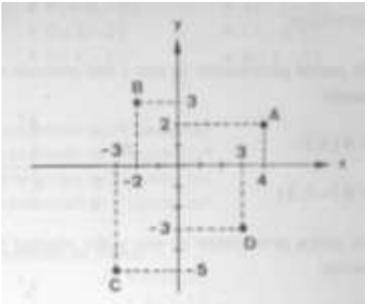
O plano Cartesiano

Consideremos duas retas numeradas, perpendiculares , denominadas eixos que se interceptam no ponto zero (origem).

A representação de um ponto é feita por meio de dois números reais:

- O primeiro número do par ordenado chama-se abscissa do ponto.
- O segundo número do par ordenado chama-se ordenada do ponto.

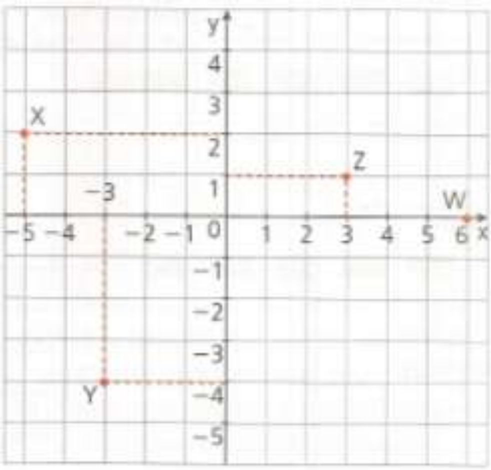
Exemplos: Vamos representar os seguintes pares ordenados:



- A(4,2)
- B(-2,3)
- C(-3,-5)
- D(3,-3)

Atividades

1 – Dê as coordenadas cartesianas dos pontos X,Y,W e Z:



2 – Leia o que eles dizem e responda:

Atividade 3: Gráfico, o retrato de uma função

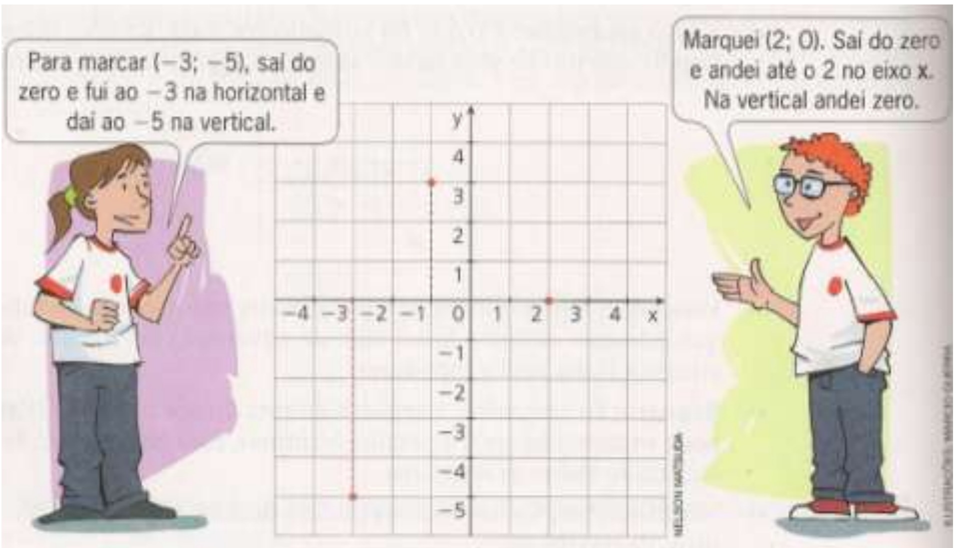
- Habilidades Relacionadas: Representar graficamente uma função no plano cartesiano, utilizando tabelas e pares ordenados.
- Pré-requisito: Pares ordenados e resolução de expressões algébricas.
- Tempo de Duração: 100 minutos.
- Recursos Utilizados: Ficha de atividade.
- Organização da Turma: Individual
- Objetivos: - Construir tabelas e gráficos de funções dadas por fórmulas.
- Metodologia Adotada:

Agora que os alunos já conhecem o plano cartesiano vamos ver como construir o gráfico de uma função a partir de sua fórmula.

Como exemplo considere a função que possui a seguinte fórmula $\mathbf{y} = -x^2 + 4$. Faremos uma tabela da função escolhendo alguns valores de **x** que, de preferência, não apresentem cálculos trabalhosos.

- Se $x = -3$, $y = -(-3)^2 + 4 = 5$
- Se $x = -2$, $y = -(-2)^2 + 4 = 0$
- Se $x = -1$, $y = -(-1)^2 + 4 = 3$
- Se $x = 0$, $y = -(0)^2 + 4 = 4$
- Se $x = 1$, $y = -(1)^2 + 4 = 3$
- Se $x = 2$, $y = -(2)^2 + 4 = 0$
- Se $x = 1$, $y = -(1)^2 + 4 = -5$

Assim vamos formando pares ordenados, onde o primeiro elemento é o valor do x e o segundo o valor do y → (x,y)

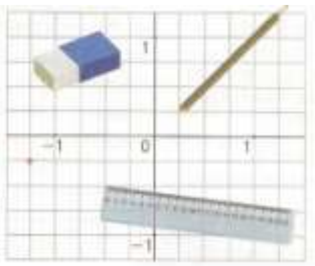


Os números de cada par ordenado são as coordenadas cartesianas do ponto.

*Percebam que a variável dependente fica sempre no eixo horizontal, aqui demos o exemplo com o **x**, mas o nome dos eixos vai variar de acordo com as grandezas envolvidas nas situações. É muito importante chamar atenção para esse fato, pois os alunos tendem a achar que **x** e **y** são sempre "nomes" fixos para os eixos.*

Atividades

1 – Trace os eixos cartesianos em papel quadriculado e use como unidade 4 lados de quadradinhos:



a) Marque os pontos correspondentes à tabela:

x	−1,25	0,75	0	−1,5
y	−0,25	1,75	1	−0,5

b) Esses pontos estão alinhados, ou seja numa mesma reta?

c) Repare na tabela: a coordenada y e sempre igual à coordenada x somada com 1. Isso significa $y = x+1$. Marque mais três pontos obedecendo a essa condição.
d) Todos os pontos estão alinhados (isto é, numa mesma reta?)

2 – Construa o gráfico da função cuja a fórmula é $y = x^2 - 4x$. Na tabela use os valores $-1,0,1,2,3,4,5$ para x. Não se esqueça de construir o gráfico no papel quadriculado:

3 – Um trem sai do marco zero da ferrovia mantendo a velocidade de 60km/h. Após 2 horas de viagem ele para por meia hora e , depois, prossegue por mais duas horas com a velocidade constante de 40 km/h.

a) Com as informações dadas, complete a tabela:

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	4,5
y				120	120			

x é o tempo de viagem dado em horas.

y é a distância dada em quilômetros

b) Na tabela y é função de x. Construa o gráfico dessa função.

Atividade 4: Trabalhando com as Funções

- Habilidades Relacionadas: Resolver situações – problema que envolva o conceito de função.
- Pré-requisito: Pares ordenados, conhecimento do plano cartesiano, resolução de expressões algébricas.
- Tempo de Duração: 100 minutos.
- Recursos Utilizados: Ficha de atividade.
- Organização da Turma: Individual
- Objetivos: Resolver situações que envolvam o conceito de função utilizando tabelas e o plano cartesiano.

Para resolver situações que envolvam o conceito de função muitas das vezes é necessário primeiramente “montar” a fórmula que representará essa função graficamente. Essa fórmula também é chamada lei de formação, ou de associação, da função. Para isso, é importante analisar os dados apresentados pelo problema. Vejamos alguns exemplos utilizando o conceito de função:

Exemplo 1 – Suponha que você tome um taxi que cobre R$ 3,20 de bandeirada e mais R$ 1,30 por quilômetro percorrido. Se eu percorrer *x* quilômetros no taxi qual será o preço P da corrida?
Essa situação é interessante porque alguns alunos não percebem como funciona a tarifa do taxi e nem sabem que é proibido a cobrança de tarifa fixa.

Então vamos pensar:
P é o preço do valor total da corrida que vai depender dos *x* quilômetros percorridos mais o valor da bandeirada. Traduzindo para o idioma da Álgebra, temos

$$P = 1{,}30.x + 3{,}20$$

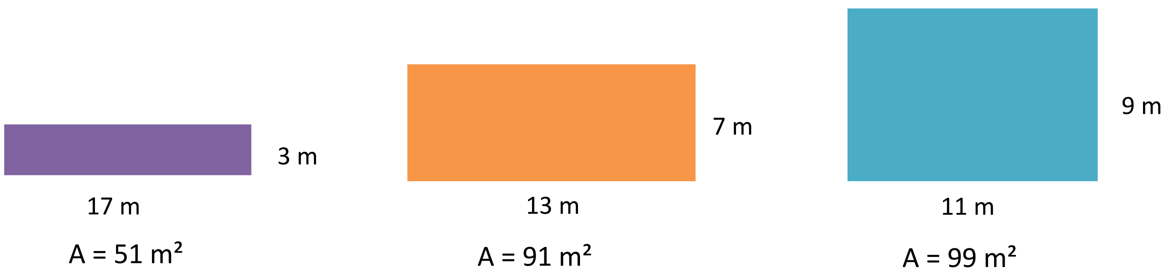
Agora, imagine que você percorreu 15 quilômetros. Qual será o valor da corrida?

$$P = 1{,}30.x + 3{,}20$$
$$P = 1{,}30.15 + 3{,}20$$
$$P = 19{,}50 + 3{,}20$$
$$P = 22{,}7$$

É a partir dessa ideia que os taxímetros funcionam...
Imaginem se não existisse o taxímetro? Como o taxista poderia calcular os valores das corridas? Se ele souber a distância que ele percorreu, o que é fácil, pois nos carros existe um instrumento que faz essa medição, ele pode recorrer a construção de uma tabela para ajuda-lo.
Agora, complete a tabela usando a fórmula e ajude o taxista:

x (km)	1	2	3	4	5	6	7	8	...
P (valor da corrida)									....

Exemplo 2 – Considere os seguintes retângulos com perímetros iguais a 40 m:



Observando que as áreas desses retângulos não são iguais, podemos propor esta questão: dentre todos os retângulos com perímetro de 40 metros, qual deles tem a maior área? Visto que podemos construir vários retângulos com esse perímetro.

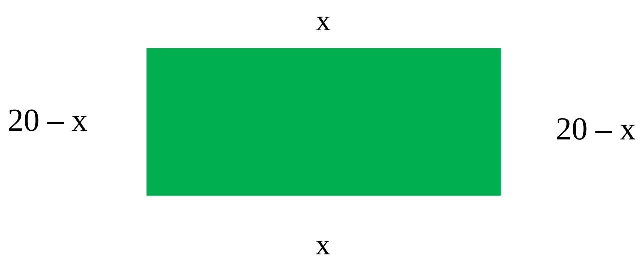
Vamos usar funções para responder essa pergunta. Imagine um retângulo com perímetro de 40 m e um lado de x metros. Quanto medirá o outro lado? Vamos escrever a medida desse lado em função de x, evitando introduzir outra variável no problema. Se o perímetro é 40 metros, a soma de dois lados diferentes é 20 metros. Temos, então:

$$x + \text{“outro lado”} = 20$$

concluímos que

$$\text{“outro lado”} = 20 - x$$

Então veja:

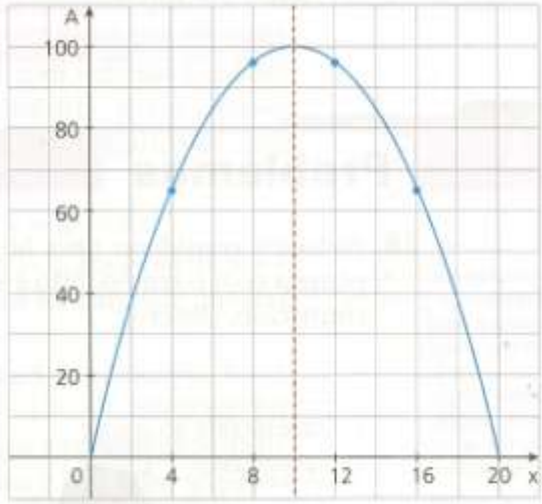


Dessa maneira, também a área aparece como função de **x**. Veja:

$$A = x(20 - x)$$

$$A = -x^2 + 20x$$

$A = -x^2 + 20x$	
x	A
0	0
4	64
8	96
12	96
16	64
20	0



Atividades

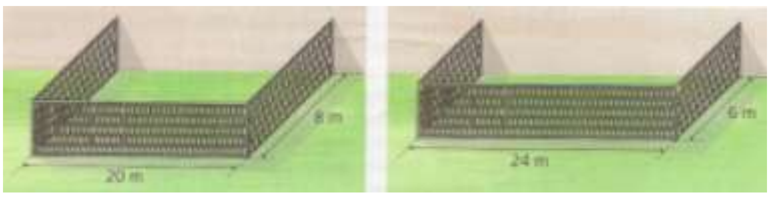
1 – Suponha que cada garrafa de refrigerante de 2 litros custe 3 reais. O preço da quantidade de refrigerante é função do número de refrigerante que se compra: quem compra x refrigerantes paga y reais.

a) Numa tabela, coloque os valores 7,8,9 e 10 para **x** e apresente os respectivos valores de **y.**
b) Qual é a lei de formação da função?

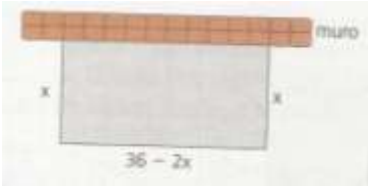
2 – Considere a função dada por **y** = $(8x-14)/(x^2 + 1)$:

a) Quando **x** = 1 quanto vale y ?
b) Para quais valores de x se tem **y** = 1?

3 – O dono de uma granja quer construir um cercado retangular aproveitando um muro já existente. As dimensões do cercado podem variar, desde que seu perímetro seja 36 metros, pois o granjeiro só tem 36 metros de tela. Veja dois cercados possíveis:



a) Determine o comprimento da tela do cercado mostrado na planta seguinte:



b) Determine a área A desse cercado em função de x.

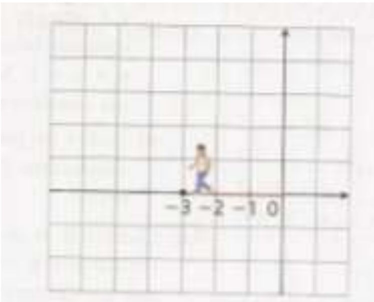
c) Esboce o gráfico dessa função.

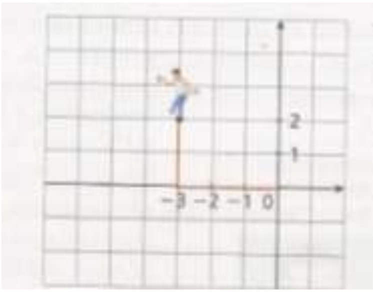
Atividade 5: Revisando todas as ideias

- Habilidades Relacionadas: Todas as citadas nas Atividades 1,2,3 e 4
- Pré-requisito: Pares Ordenados, construção de gráfico, resolução de expressões algébricas.
- Tempo de Duração: 100 minutos.
- Recursos Utilizados: Ficha de atividade com exercícios que envolvam todas as habilidades das atividades 1,2,3 e 4.
- Organização da Turma: Em dupla
- Objetivos: Aplicar os conhecimentos adquiridos nas sessões anteriores.
- Metodologia Adotada: Os alunos, em dupla, farão as atividades propostas que serão entregue ao professor. Essas atividades são para avaliar o nível de aprendizagem da turma podendo ou não valer nota.

Atividade Avaliativa

1 - Veja como marcar pontos no plano cartesiano: Para marcar (-3;2) saio do 0 e ando até o – 3 na horizontal e depois até o 2 na vertical.

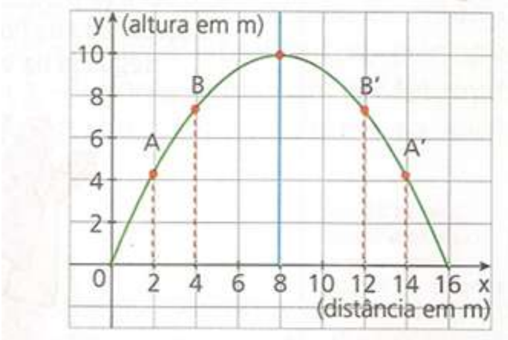




Agora, pegue o papel quadriculado e ...

a) Marque os pontos (-3,-2), (-2,3), (0,1), (2,3),(3,2). Ligue os pontos com uma régua, na ordem que foram dados. Qual é a letra que aparece?

2 – Atirando uma pedra para o alto, sua trajetória será aproximadamente uma parábola.



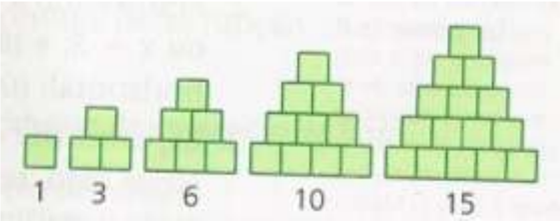
A parábola da figura corresponde à fórmula

$$y = (- 5x^2)/32 + 5x/2$$

a) Quais são as coordenadas dos pontos A e B?

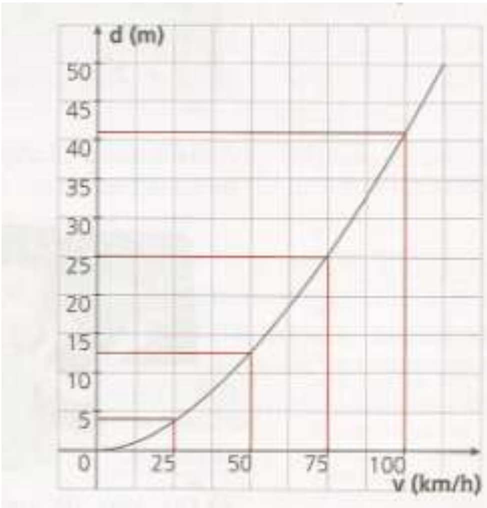
b) Como toda parábola, essa tem um eixo de simetria, que é a reta azul. Quais são as coordenadas dos pontos simétricos de A e B?
c) Qual é a altura máxima atingida pela pedra?
d) A que distância do lançamento a pedra caiu?

3 – A sequência dos números triangulares se relaciona com a soma de números de 1 até n. Veja a sequência dos números triangulares e as figuras correspondentes a cada um deles:



Qual é o centésimo número triangular? Não deixe de explicar como você chegou ao valor.

4 – Você está dirigindo um carro e freia subitamente. Quantos metros o carro ainda vai andar após ter freado? Sob certas condições, a distância d que o carro ainda vai andar após ter freado é função da velocidade v em que o carro e estava no momento em que foi freado. Veja como é essa função para uma certa marca de automóvel, em pista seca e com pneus novos (caso contrário, as distâncias seriam bem maiores):

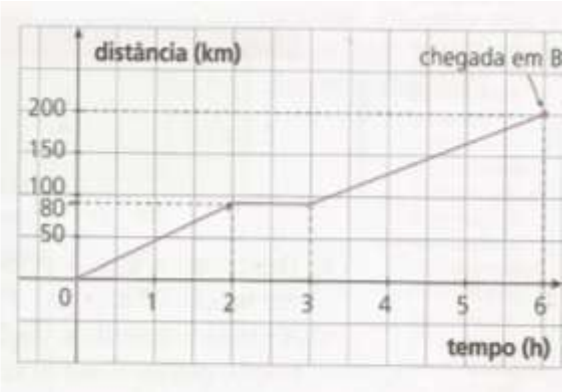


a) A partir do gráfico, complete a tabela. Use valores aproximados:

V(km/h)	d(m)
25	
50	
	25
100	

5 – Esboce o gráfico da função $y = -3x^2 + 12x$ e dê as coordenadas do ponto onde a função atinge um valor máximo. (Utilize papel quadriculado)

6 – Um trem de carga viaja da cidade A para a cidade B, separadas por uma distância de 200 km. A distância percorrida é função do tempo passado após a partida. Veja o gráfico que representa essa função



a) Que distância o trem percorreu nas duas primeiras horas após a partida? E nas três primeiras horas?
b) No gráfico, a distância não varia entre a segunda e a terceira hora. Como isso se explica?
c) Que distância o trem percorreu entre a terceira e sexta hora?
d) Da terceira até a sexta hora, qual foi a velocidade média do trem?
e) Considerando o tempo total de viagem, qual foi a velocidade média do trem?

Avaliação

A avaliação do conteúdo consistirá de atividades que contemplem as habilidades previstas no curriculum mínimo. A atividade proposta na atividade 5, do plano de trabalho, já contará como uma avaliação para investigar em que nível de raciocínio a turma se encontra pois a avaliação não deve ser quantitativa e sim qualitativa.

Será feito também uma prova individual com os mesmos objetivos trabalhados no plano de trabalho, avaliando a capacidade de utilização dos conteúdos apresentados.

Referências Bibliográficas

ANDRINE, A.; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática*. 1 ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática*. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2009.

JACUBOVIC, J.; CENTURION, M. *Matemática na Medida Certa*. 11. ed. São Paulo: Scipione, 2012.

Curriculum Mínimo. Disponível em: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=7> Acesso em 02 de set. 2012.

Formação Continuada. Campo conceitual: Funções <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=7> Acesso em 02 de set. 2012.

Portal Brasil Escola: O Plano Cartesiano. Disponível em: < http://www.brasilescola.com/matematica/plano-cartesiano.htm>. Acesso em 30 de ago. 2012.