

**Curso de Aperfeiçoamento de  
professores de matemática.**

**9° ano do ensino fundamental**

**3° Bimestre/2012**

**Plano de trabalho**

**Circunferências, círculos e razões  
trigonométricas.**

**Cursista: Andre Luiz Pimentel  
Ferreira .**

**Tutor: Emílio Rubem Batista Junior .**

## Pontos positivos

Com o trabalho para relatar eu elaborei melhor as aulas, com mais riquezas de detalhes, e a compreensão e a atenção dos alunos em relação as aulas foi melhor, em relação a experiências anteriores, principalmente nas aulas de matemática (odiado por todos e amados por poucos), dessa forma melhorando minha metodologia de ensino e ampliando meus horizontes pedagógico. A correção dos exercícios com o auxílio dos alunos aumenta os interesses deles, havendo uma certa disputa entre alguns alunos, para verificar quem errou ou acertou as questões propostas, uma disputa saudável.

## Pontos negativos

Alguns alunos apresentavam dificuldades com cálculos primários, principalmente quando envolvem variáveis (letras, é difícil somar os expoentes quando não aparecem) e também principalmente quando ao diferenciar cateto oposto e cateto adjacente no triângulo retângulo após passar essa dificuldade entrei nas leis dos senos e dos cossenos e aí os alunos fizeram bastante confusão na sabiam qual fórmula (ideia) usar em qual triângulo

## Interesse dos alunos

As experiências propostas foram bem proveitosas pois a partir delas os alunos entenderam melhor e passaram a dizer: "Agora sei para que vou usar isso na minha vida" Foi bom escutar isso, a partir daí o interesse aumentou, mesmo que em alguns momentos ficasse perdidos com outros conteúdos, mesmo assim a assimilação foi melhor.

## Alterações ao plano de trabalho

Eu não mudaria meu plano de trabalho 1, aplicaria mais exercícios de fixação principalmente na parte em que apresenta-se mais dificuldade, faria alguns cartazes bem grande para colar na sala com triângulo retângulo indicando os catetos (oposto e adjacente) e hipotenusa para que os alunos possa esta familiarizado com as figuras e suas variações e colocaria (colaria também), tiras com as fórmulas da lei dos senos e dos cossenos, e a área do círculo e comprimento o da circunferências.

## INTRODUÇÃO

O objetivo principal: que os alunos identifiquem quando usar as relações trigonométricas, através do seu cotidiano, vivenciado na escola (nas atividades) ou no seu dia a dia, possibilitando determinar alturas das casas, prédios ou até a distância entre eles (relação de semelhança), sobre tudo aplicando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, fazendo suas conclusões próprias. E ao fim desse capítulo também aplicamos as relações de triângulos quaisquer, usado principalmente a lei dos senos e a lei dos cossenos.

É muito comum a confusão dos alunos quando ao definir cateto oposto e cateto adjacente, é preciso trabalhar antes o teorema de Pitágoras ( $(hip)^2 = (cat)^2 + (cat)^2$ ), quando esse conteúdo é bem "amarrado" é fácil identificar, sendo o cateto dado pelo ângulo observado o triângulo retângulo

A aplicação das relações trigonométricas é dada muito em algumas profissões (engenharia, edificações, arquitetura e etc...). EX.: para erguer uma parede é necessário alinhada (perpendicular) com o solo, para construir uma estrada é necessário usar TEODOLITO (instrumento usado para medir ângulos e medir plantas) para que a curva.

Esse conteúdo exige o conhecimento de proporções, relações métricas de triângulo retângulo e reconhecer os tipos (classificações em relação aos ângulos) de triângulos acutângulo e obtusângulo. Para aplicação desse conteúdo serão necessários quatorze tempos de aulas de 45 minutos cada e 2 tempos para aplicação de avaliações e tempos uma aula prática com material adequado (transferidor, fita métrica, canudo bem grosso ou luneta).

# Desenvolvimento

**Atividade 1** – Identificar as razões trigonométricas e diferenciar hipotenusa de cateto

\*habilidade relacionada – Relacionar os lados de triângulo retângulo (cateto e hipotenusa) em razões, identificando seno cosseno e tangente e aplicando o teorema de Pitágoras

\*Pré-requisito – Razão e proporção, polígonos semelhantes e triângulo retângulo (tudo) e semelhança de triângulo.

\*Tempo de duração – Dois tempos de aula (Aprox.90 minutos)

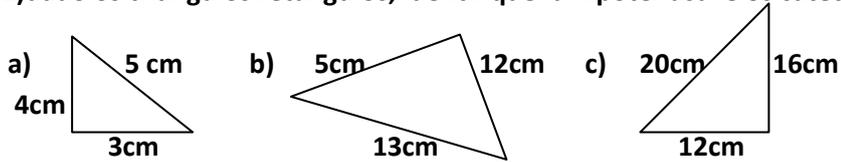
\*Organização da turma - Individual com o auxílio do caderno (Conteúdo dado aula anterior) e Livro didático (apoio para pequenas dúvidas)

\*Objetivo - Identificar seno, cosseno e tangente com clareza diferenciando hipotenusa de cateto, determinando quando usar teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas

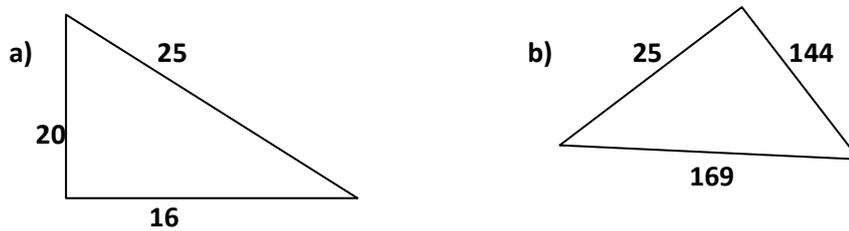
\*metodologia adotada – mostrar que as razões trigonométricas são aplicadas apenas no triângulo retângulo diferenciando do teorema de Pitágoras, proporcionando a consulta ao caderno e livro como apoio em caso de pequenas dúvidas para que o aluno possa conseguir solucionar seus problemas (matemáticos) de forma independente e sensata sem necessitar sempre da ajuda do professor. Dessa forma também identificando cateto e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo.

### Modelo de atividades

1) dado os triângulos retângulos, identifique: a hipotenusa e os catetos



2) Determine a razão entre: o maior e o menor lado, o maior e o 2º maior lado e entre o 2º maior e o menor lado.



3) Escreva a razão trigonométrica que represente cada relação abaixo :

a) medida do cateto oposto / medida da hipotenusa = \_\_\_\_\_

b) medida do cateto adjacente / medida da hipotenusa = \_\_\_\_\_

c) medida do cateto oposto / medida do cateto adjacente = \_\_\_\_\_

4) Qual alternativa está correta :

a) seno = cateto oposto / cateto adjacente

b) cosseno = Cateto adjacente / cateto oposto

c) tangente = Cateto adjacente / cateto oposto

d) seno = cateto oposto / hipotenusa

e) cosseno = cateto oposto / hipotenusa

5) Sendo os catetos de um triângulo retângulo 16 cm e 12 cm. Qual será a hipotenusa?

a)20      c)30      c)40      d)15      e)25

**Atividade 2** - Ângulos notáveis (destacáveis) do ângulo retângulo ( $30^\circ$ ;  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ) e a tabela com os valores correspondentes aos ângulos notáveis.

**Habilidades relacionadas** : Utilizar seno , cosseno e tangente relacionando e na com a tabela para solucionar problemas.

**Pré-requisito** – conhecer as razões trigonométricas a sua aplicação no triângulo retângulo a aplicação do teorema de Pitágoras (quando aplicá-lo).

**Duração** : 2 tempos (aprox. 90 minutos )

**Recursos utilizados** : quadro branco , caneta , lápis , par de esquadro , transferidor.

**Objetivo** : Traça um triângulo isósceles e um quadrado e demonstrar através dele as relações entre os ângulos de  $30^\circ$  ;  $45^\circ$  e  $60^\circ$  criando uma tabela fixa para esse ângulos , aplicadas nas razões trigonométricas no triângulo retângulo.

**Objetivo** : Mostra a aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo nas figuras seccionadas que se tornam um triângulo retângulo na secção ( quadrado , losango , trapézio , e outras)

Após todos os procedimentos teremos uma tabela fixa para os ângulos de 30° ; 45° e 60. No caso da tabela eu recomendo os alunos a decorar a tabela, mas isso pode se tornar prático dependendo da quantidade de exercício passado aos alunos, quanto mais exercícios , mais utilizamos a tabela e a decoramos naturalmente.

	30°	45°	60°
<b>Seno</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<b>Cosseno</b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<b>tangente</b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

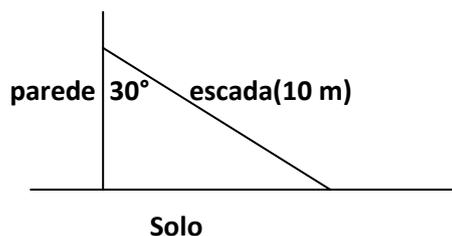
Outra maneira de memorizar essa tabela é : 1,2,3(seno) e 3,2 ,1(cosseno) e 3 ,1,3(tangente), raiz no dois e raiz no três ,seno e cosseno todo mundo em baixo de dois e na tangente só no 30° em baixo de três

**NA PRÁTICA :**

EX. 1:Uma escada está apoiada em uma parede e forma com ela um ângulo de 30° , sendo o comprimento da escada de 12 m. Qual é distância do pé até a parede ?

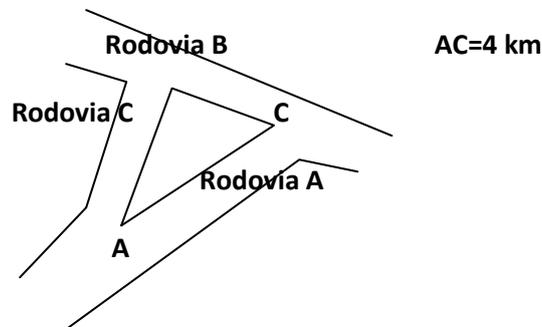
OBS.: (recomendo aos alunos que façam sempre um esboço da desenho da situação descrita no problema )

Esboço



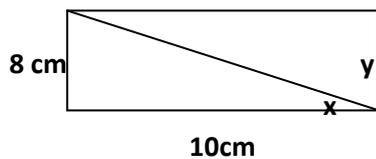
Lembrado aos alunos entre o solo e a parede há sempre 90°, ou seja , são perpendiculares, dessa forma o solo faz papel do cateto oposto, a parede o cateto adjacente e a escada será a hipotenusa

EX<sub>2</sub>: Duas rodovias A e B retilíneas se cruzam formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia A, a 4km do cruzamento. Pelo posto passa uma rodovia C, perpendicular a rodovia B. Qual é a distância, em metros, do posto de gasolina à rodovia B, pela rodovia C. (Use  $\sqrt{2} = 1,41$ )



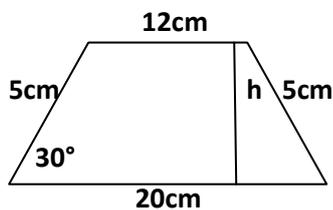
Resposta : 2829 m

EX<sub>3</sub>: Calcule a medida dos dois ângulos formados pela diagonal de um retângulo que, sendo a base 10 cm a altura é 8 cm.



\*Usaremos as razões trigonométricas para determinar um dos ângulos, já que são complementares

EX<sub>4</sub>: Determine a altura de um trapézio isósceles cujo as bases são 12 cm e 20 cm e os lados não paralelos somados são 10 cm e o ângulo agudo é de 30°.



\*Os lados não paralelos são iguais para determiná-los nesse exercício basta dividir o valor citado por dois e o ângulo agudo no trapézio isósceles e na base maior

**Atividades 3 – Aplicados os conhecimentos adquiridos**

**Habilidades Relacionadas:** Reconhecer a utilização de seno , cosseno e tangente e qual proporção trigonométrica utilizar em cada caso. Efetuar cálculos com números decimais

Tempo :6 tempos (Prox.270 minutos)

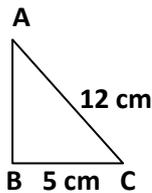
**Aplicação :** em duplas ou trios

**Objetivo –** fixar os conteúdos abordados em problemas que se aproxime de nosso cotidiano

**Metodologia –** Apresentar a tabela aos alunos com exemplos práticos (fáceis) e discuti-los ao máximo para que não sobre possibilidade de resolução dos exercícios.

**Atividades propostas:**

1) Determine os ângulos internos do triângulo ABC , retângulo em B :

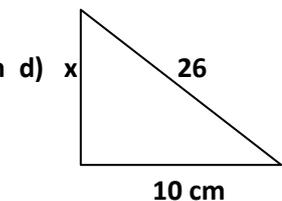
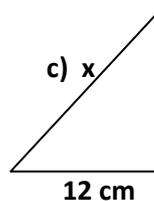
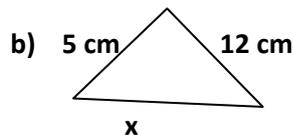
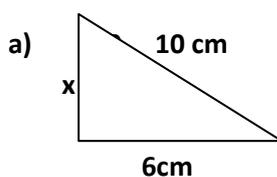


2) Um Observador vê o ponto mais alto de um prédio sob um ângulo de  $60^\circ$ . Sua distância para o prédio é de 100 m. Qual é altura do prédio ?

3) Um prédio 20 m de altura e é observado por uma pessoa sob o ângulo de  $30^\circ$ . qual é a sua distância da pessoa para o prédio ?

4) Uma escada esta apoiada em uma parede formando com ela um ângulo de  $60^\circ$  , sendo o comprimento de escada 12 m . Qual é distancia do " pé da escada " até a parede ?

5) Aplique o teorema de Pitágoras e determine os ângulo internos em cada triângulo (use as relações trigonométricas :

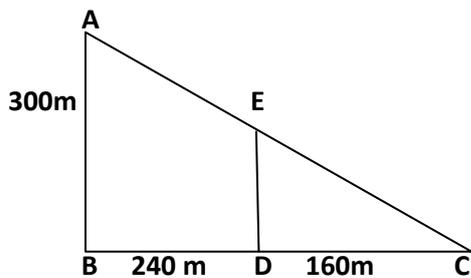


6) Complete a tabela :

	30°	45°	60°
Seno			
Cosseno			
Tangente			

7) Um observador vê o ponto mais alto de um prédio sob um ângulo de 60°, após caminhar 40m metros passa a ver sob um ângulo de 30°. Qual é a altura di prédio ?

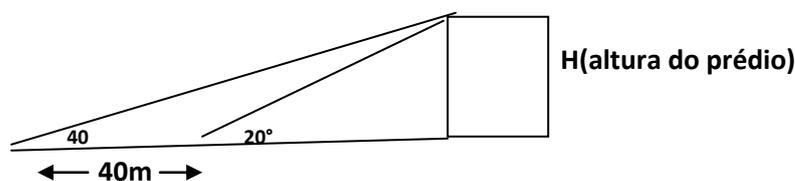
8) determine o ângulo formado no vértice C



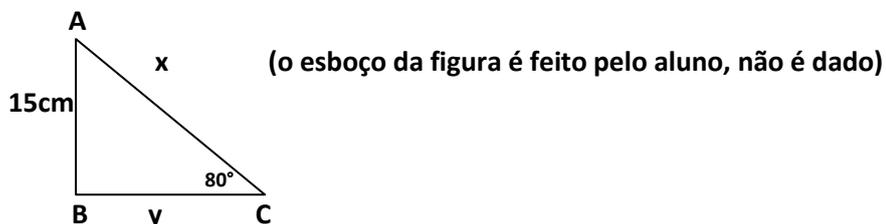
9) Um triângulo ABC retângulo em B, sendo os catetos iguais com medida  $2\sqrt{2}$ cm. Determine a hipotenusa e os ângulos internos ?

Obs.: Nos próximos exercícios usaremos ângulo fora da tabela apresentada anteriormente, necessitaremos de outra tabela que se encontra no livro didático página 189 , os métodos de resolução serão os mesmos vistos anteriormente , mas nesse exercícios usaremos os números decimais arredondados em duas casa decimais.

10) Um agrimensor vê um prédio segundo um ângulo visual de 40°. Aproxima-se 40 metros do prédio e passa a observá-lo sob um ângulo de 20°. Determine a altura desse prédio (Use a tabela do livro pág.189)

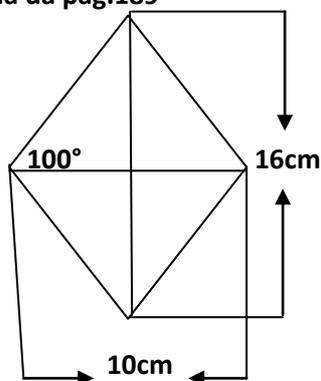


11) Um triângulo retângulo ABC, retângulo em B. Sendo AB= 15cm e o ângulo do vértice de 80°. Determine AC e BC (use a tabela pág.189)



12) Determine o lado de um losango de ângulo obtuso 100° sendo suas diagonais são 10 cm e 16 cm . ( lembre-se as diagonais do losango são perpendiculares e bissetriz dos ângulos internos )

Dica : Use a tabela da pág.189



Conclusão : Os exercícios foram passados em três encontros em sala com dois tempos cada encontro sendo o último com uma avaliação com consulta ao caderno e livro e auxílio do professor para algumas pequenas dúvidas . A turma teve um bom aproveitamento nesse avaliação com uma média geral de 6,75(Média da turma).

**Atividade 4** – Aplicação de seno e cosseno em triângulo quaisquer , para isso usaremos a lei dos senos e a lei dos cossenos

**Habilidades relacionadas** - teorema de Pitágoras , razões trigonométricas e operações com números racionais(Principalmente raízes não exatas)

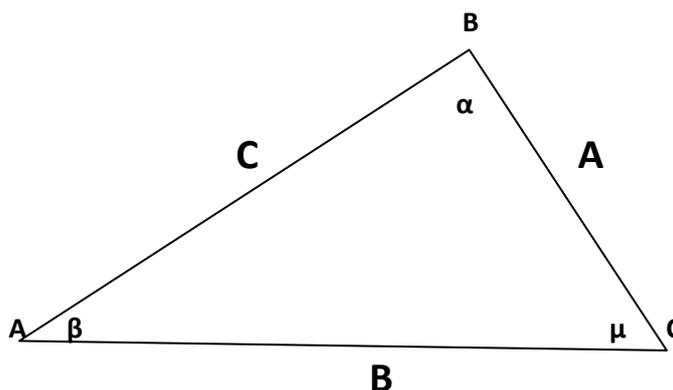
**Tempo** : 6 tempos (270 minutos)

**Recursos**: Caderno com explicação teórica com o apoio do livro didático , com exemplo práticos

**Objetivo** - Não se prender apenas ao teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas e ao triângulo retângulo e a utilização de outros triângulos(Acutângulo e Obtusângulo) com as leis de seno e cosseno .

sem o seno , cosseno e tangente e o teorema de Pitágoras.

## Resumo



**Lei dos senos** :  $\frac{a}{\text{sen } \beta} = \frac{b}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \mu}$  (Uma razão entre o lado e o seno do ângulo oposto ao lado)

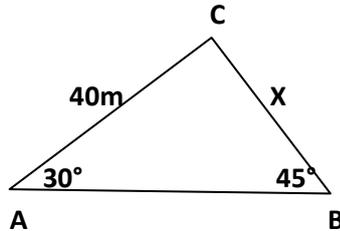
**Lei dos cossenos** - 
$$\left. \begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 - 2.B.C.\text{Cos } \beta \\ B^2 &= A^2 + C^2 - 2.A.C.\text{Cos } \alpha \\ C^2 &= A^2 + B^2 - 2.A.B.\text{Cos } \mu \end{aligned} \right\} \text{ para quando o ângulo é agudo}$$

\*Quando o ângulo é obtuso teremos o mesmo padrão na fórmula (modelo matemático) muda-se o sinal antes do dois e o ângulo será dado por  $(180^\circ - \alpha)$ ,  $\alpha$  é o ângulo obtuso.

**TEREMOS** : -  $A^2 = B^2 + C^2 + 2.B.C.\text{Cos}(180^\circ - \alpha)$ , sendo A o lado oposto ao ângulo.

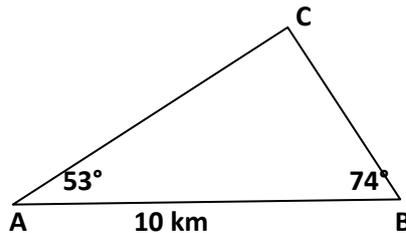
## Atividades Propostas

1)Dois amigos , Pedro e Jair , estão num campo aberto empinando pipas >Eles estão , respectivamente , nas posições A e B da figura abaixo. Os fios dessas pipas se enroscam e se rompem , fazendo que as duas pipas juntas formem um ponto C , a distância de 40 m de Pedro.Qual é a distância de Jair até as pipas ?

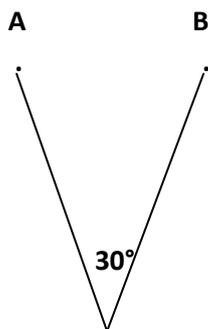


\*Aplicamos a lei dos senos

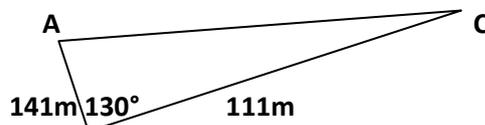
2)Um avião sobrevoa duas cidades , A e B , a distância entre as cidades de 10 km. Os ângulos visuais formados são de  $53^\circ$  e  $73^\circ$ .Qual é a cidade mais próxima do avião ?



3)Um viajante em férias , ao planejar sua viagem, localizou no guia rodoviária a figura abaixo.Qual será a distância entre as duas cidades ?

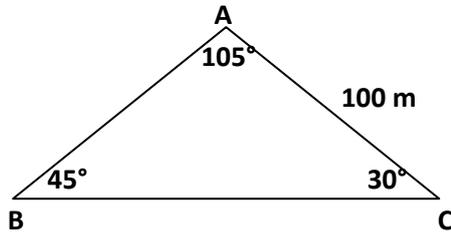


4)Qual é a distância da casa(ponto A) até o ponta C(Pedra), e a distância e entre o lago (ponto B) e o ponto C(pedra) é de 111 m e o ângulo no vértice B é de  $130^\circ$  e a distância entre a casa e o lago é de 141m.



B

(figura abaixo) e deseja murá-lo. Sabe-se que  $AB = 100$  m e considere  $\sqrt{2} = 1,41$  e  $\sqrt{6} = 2,44$ , determine o perímetro?



6)(UFES) Numa noite, um fazendeiro A, que mora a uma distância de 4 Km de um fazendeiro B, olhando na direção da casa deste, avistou, sob um ângulo de  $60^\circ$  (com a horizontal) um objeto luminoso. No mesmo instante, o fazendeiro B, olhando na direção da casa do fazendeiro A, avistou o mesmo objeto, sob um ângulo de  $45^\circ$  (com o horizonte). A que distância da Terra está aproximadamente o objeto voador da Terra naquele momento?

**Conclusão:** Os alunos apresentaram dificuldades mas compreenderam o conteúdo ao fim de três aulas de dois tempos cada foi feito um trabalho em sala e grupos de 4 alunos sem consulta sendo a média da turma de 5,25

**Atividade 5** :- Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

**Pré-requisito:** Saber calcular o perímetro de uma circunferência.

**Duração da aula:**3 tempos(105 minutos).

**Recursos didáticos:** Didática em sala e a utilização de exemplos em livros didáticos.

**Organização da turma:** Desenvolvimento individual.

**Objetivos da etapa 03** Aprender a calcular o comprimento de um círculo e sua relação com as circunferências.

**Metodologia adotada:**

**Desenvolvimento:**

Para o cálculo da área do círculo, vamos mostrar aos alunos que eles já sabem fazer esse cálculo e que nunca perceberam, pois ele estava inserido em outra forma geométrica.

Imaginemos um triângulo onde a base mede  $2\pi R$  e sua altura mede a medida do raio, logo, sua altura medirá  $R$ .

Calculando a área deste triângulo, temos:

$$A = (\text{base} * \text{altura})/2 \quad A = (2\pi R * R)/2 \longrightarrow A = \pi R^2 \longrightarrow$$

*Esta demonstração encontra-se no livro Fundamentos de matemática elementar Vol10.*

Deveremos aplicar diversos exercícios envolvendo problemas cotidianos. Devemos trazer questões que aparecem em processos seletivos, pois elas envolvem questões sobre esses tópicos em situações onde os alunos precisam analisar ao máximo as atividades propostas.

O tópico a respeito de círculos e circunferências não é tão extenso e nem tão difíceis de trabalharem, pois se resumem em poucas fórmulas. O problema é fazer com que os alunos aprendam os fundamentos, o resto é só analisar a questão em si.

Atividades

Apresentar exercícios de fixação para praticarmos o que foi ensinado.

## Avaliação

### 1° etapa:

**Habilidade**– Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Não teremos tantas dificuldades em trabalhar estes pontos se soubermos ter o material certo. O reconhecimento será muito importante e isto deve ser trabalhado com um pouco de atenção.

### 2° etapa:

**Habilidade** – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

O comprimento deve ser trabalhado com muito cuidado. Esse tópico vai ser trabalhado em conjunto com o círculo e deve-se ter uma atenção maior.

### 3° etapa:

**Habilidade** – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Vamos finalizar o plano falando sobre círculos e tendo a ciência de que círculo e circunferências trabalham em conjunto. Devemos apresentar tópicos de processos seletivos e trabalha-los em sala.

## **AVALIAÇÃO**

A avaliação dos alunos devem envolver todo um contexto sala de aula , avaliações com e sem consulta,e sua participação em aula é muito importante para seu envolvimento com o conteúdo trazendo novas dúvidas e questões para incrementar a aula

A avaliação final foi feita sem consulta em aula para realmente verificar se todo o conteúdo foi aprendido realmente e através desta verifique que houve uma melhora boa na turma que no geral tiveram ótimas notas em uma média geral da turma de 7,25

Essa pesquisa foi feita no ciep 118 na turma 902 turno manhã , algumas avaliações e trabalhos poderiam ter sido feitas na sala de informática mas infelizmente esta um pouco sucateada

## **Fonte de pesquisa**

Roteiro de ação e textos – razões trigonométricas curso de aperfeiçoamento oferecido pela seeduc referente ao 9º ano de ensino fundamental no terceiro bimestre

Bibliografia –Fazendo a diferença 9º ano/José Roberto BONJORNO , Ayrton OLVARES ,Regina Azevedo BONJORNO e Tânia GUSMÃO –FTD ,2009, São Paulo