

# FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/ CONSÓRCIO CEDERJ

Matemática 9º Ano – 3º Bimestre/2012

Plano de Trabalho II

Assunto: Razões trigonométricas no triângulo  
retângulo

# Sumário

Introdução .....	05
Desenvolvimento.....	06
Anexos .....	20
Avaliação.....	22
Referências Bibliográficas.....	23

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**  
**FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC – RJ**  
**ESCOLA: COLÉGIO ESTADUAL NICOLÃO BASTOS FILHO**  
**PROFESSORA: DERLI ALEIXO CARVALHO ONOFRE**  
**MATRÍCULA: 0914411-4**  
**SÉRIE: 9º ANO – ENSINO FUNDAMENTAL**  
**TUTOR(A): QUEDMA RAMOS DOS SANTOS**

## **AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO II**

Derli Aleixo Carvalho Onofre  
donofre@prof.educacao.rj.gov.br

### **PONTOS POSITIVOS**

Este plano de Trabalho foi confeccionado com o objetivo de tornar mais concreta e significativa a aprendizagem do conteúdo **CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**, com as atividades dinâmicas e contextualizadas os alunos demonstraram um interesse maior em realizar as tarefas propostas e diversificadas, assim pude constatar que perderam um pouco do medo da matemática.

### **PONTOS NEGATIVOS**

Falta de material para realização de atividades práticas, como por exemplo, o transferidor e o compasso que a maioria dos alunos não tinha e outros nem sabiam usar.

### **ALTERAÇÕES**

Não achei necessário fazer alterações, pois o Plano de Trabalho ficou bem ao nível da turma, consegui despertar interesse e 70% dos alunos alcançaram objetivos.

### **IMPRESSÕES DOS ALUNOS**

Os alunos acharam a proposta interessante e participaram ativamente das atividades propostas, pois puderam formular definições e expressar suas

opiniões nos questionamentos. Alguns alunos disseram que a matéria desse bimestre está mais fácil, pois a forma como ensinei ficou mais fácil de entender. Uma aluna que tem nota vermelha em matemática nos dois bimestres disse que pela primeira vez conseguiu aprender alguma coisa de matemática. Então eles perceberam que a matemática não é tão difícil quanto parece.

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**  
**FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC – RJ**  
**COLÉGIO ESTADUAL NICOLÃO BASTOS FILHO**  
**PROFESSORA: DERLI ALEIXO CARVALHO ONOFRE**  
**MATRÍCULA: 0914411-4**  
**SÉRIE: 9º ANO – ENSINO FUNDAMENTAL**  
**TUTOR(A): QUEDMA RAMOS DOS SANTOS**

## **PLANO DE TRABALHO SOBRE CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

Derli Aleixo Carvalho Onofre  
donofre@prof.educacao.rj.gov.br

### **INTRODUÇÃO**

Este Plano de Trabalho foi elaborado com recursos que mostre uma visualização de forma agradável o conteúdo a ser estudado, levando o aluno a construir os conceitos básicos necessários para o início do estudo da trigonometria.

A trigonometria é um ramo da matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo e possui diversas aplicações no cotidiano, abrange áreas relacionadas à Astronomia, Física, Geometria, Navegação entre outras.

Antes da introdução das razões trigonométricas será abordado o assunto sobre circunferência e círculo, tomando o cuidado de não partir da definição, mas de levar o aluno a construir essa definição a partir da observação de suas diferenças e das suas propriedades.

O plano envolve conhecimentos já adquiridos, pois para resolução dos problemas há necessidade de compreensão de conceitos algébricos como de resolução de equações.

## DESENVOLVIMENTO

### ATIVIDADE 1 – Circunferência e círculo

**HABILIDADE RELACIONADA:** H09 – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

**PRÉ-REQUISITOS:** Noções de segmento de reta – traçado e medida

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

**RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Folha de atividades, apresentada em arquivo anexo, régua e compasso.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

**OBJETIVOS:** Apresentar ao aluno a circunferência como um lugar geométrico, explorando suas propriedades e elementos, como centro, raio, diâmetro e corda.

#### **METODOLOGIA ADOTADA:**

Para realização desta atividade pedir aos alunos que olhem à sua volta e encontre muitas formas circulares e imaginem outras e faça uma lista, comparando a com a do colega. A seguir deverão separá-los de acordo com a diferença entre eles. Neste momento pedir que formule conceito para circunferência e círculo.

Quando falamos em círculo, ninguém tem dúvida quanto ao formato dessa figura geométrica. A superfície de uma moeda, de uma pizza ou de um disco é um círculo e o contorno é a circunferência, como exemplo podemos citar:

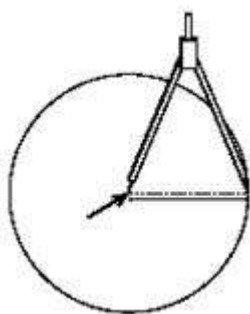
\* riscar no tecido o contorno de uma toalha de mesa redonda.

- \* desenhar um círculo no seu caderno.
- \* marcar o limite das escavações de um poço no chão.

**Circunferência** é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo, desse mesmo plano, denominado centro da circunferência.

**Círculo (ou disco)** é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo **O** é menor ou igual que uma distância **r** dada.

Nesse momento cada grupo deverá traçar uma circunferência com o compasso e de antemão conhecerão dois de seus elementos mais importantes: a circunferência propriamente dita e seu centro, que sugerimos que seja denominado **O**.

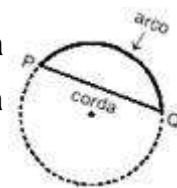


Solicitar que marquem pontos na circunferência e meçam a distância dos pontos ao centro, esperamos que cada grupo encontre medidas diferentes uns dos outros, mas que todos percebam que a distância entre pontos de uma mesma circunferência e o seu centro é sempre constante e é denominado raio.

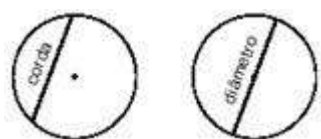
Pedir aos alunos que marquem um ponto A qualquer sobre a circunferência e, com o auxílio da régua traçar uma reta do ponto A, que passe pelo ponto O e prolongue até que toque a circunferência novamente. Chame esse ponto de B. Agora marque um ponto C qualquer e com o auxílio da régua trace uma reta, mas que não passe pelo centro O e prolongue até a que toque a circunferência novamente. Com base no que foi feito deixar que o aluno construa a definição a partir da observação entre os segmentos que passou pelo centro e pelo que não passou.

Algumas definições que serão construídas a partir da observação das propriedades.

**Raio** - Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência.



**Corda** – é um segmento de infinitos pontos alinhados, cujos pontos extremos com um ponto da circunferência. Quando esse segmento passa pelo centro da circunferência, temos o que chamamos de **diâmetro**.

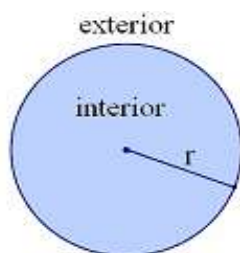


O **diâmetro** é sempre a corda maior: como é a corda que passa pelo **centro**, sua medida é igual a duas vezes a medida do raio.

### Pontos interiores de um círculo e exteriores a um círculo

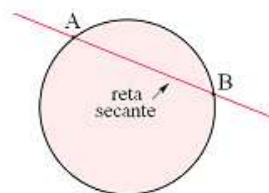
Os pontos interiores de um círculo são os pontos do círculo que não estão na circunferência.

Os pontos exteriores de um círculo são os pontos localizados fora do círculo.

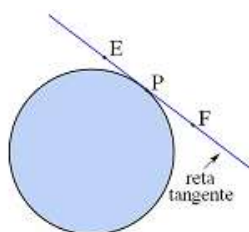


### Posições relativas de uma reta e uma circunferência

**Reta secante** é a que intercepta a circunferência em dois pontos quaisquer, podemos dizer também que é a reta que contém uma corda.



**Reta tangente** é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto.



Quando a reta não tem ponto comum com a circunferência é **reta exterior**.

Folha de atividades, apresentada em arquivo anexo

## ATIVIDADE 2 – Descobrindo $\pi$

**HABILIDADE RELACIONADA:** H09 – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

**PRÉ-REQUISITOS:** Noções de círculo, circunferência e seus elementos.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

**RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** régua e compasso, fita métrica, objetos diversos em formato circular, calculadora básica, vídeo da MEDIATECA.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

**OBJETIVOS:** Determinar aproximações para o valor de  $\pi$  a partir de situações experimentais em objetos circulares de maneira geral.

**METODOLOGIA ADOTADA:**

Para a realização dessa atividade pedir os alunos que tragam para a aula toda os tipos de objetos circulares que puderem encontrar, bem como fita métrica, barbante e régua. Pedir que meçam a circunferência de cada objeto com o barbante, a seguir esticar e medir na régua o comprimento encontrado, medir o diâmetro de cada objeto também e completar a tabela.

Objeto	Circunferência	Diâmetro	Circunferência Diâmetro

Usando a calculadora realize a operação indicada na última coluna. Ocorreu algum fato interessante? Esses números que vocês encontraram se aproximam de número conhecido em Matemática como  $\pi$  (Pi). O  $\pi$  é um número irracional, o que significa que tem infinitas casas decimais e sem dízima periódica.

Relacionando o diâmetro e o raio da circunferência, chegamos à conclusão que o comprimento da circunferência dividido pelo diâmetro é igual a  $\pi$ , encontrando assim a relação  $C = 2\pi r$  – fórmula para calcular o comprimento da circunferência.

Para fixar o conteúdo será apresentado um vídeo. **Universo Matemático**  
**Historia de Pi**

**Exemplos I** - Arthur vem para escola todos os dias de bicicleta. Quantas voltas aproximadamente deu cada roda da bicicleta sabendo que a distância percorrida foi de 2 km?

O aluno deverá medir o diâmetro ou o raio da roda da bicicleta, efetuar o cálculo usando o valor de Pi para encontrar o comprimento da roda, isto é da circunferência, depois ver quantas vezes esse comprimento cabe dentro de 2km(2000m).

Resolução:

Diâmetro = 80cm – raio = 40cm = 0,40 m

$\pi = 3,14$

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$

$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,40$

$C = 2,51 \text{ m}$

1 volta = 2,51m

x volta = 2000 m

$x = 2000/2,51$

$x = 796$  voltas (aproximadamente)

**Exemplo II** – Na hora da merenda, na escola, Carla observou uma formiga andando na Borba de seu prato, dando duas voltas completas. De volta para sala quis saber qual o trajeto percorrido pela formiga. Sabendo que o prato possui diâmetro igual a 30 cm, o percurso da formiga foi de:

- a) 3,76 m
- b) 0,94 m
- c) 1,88 m **x**
- d) 18,8 m

Resolução:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,15$$

$$C = 0,94$$

Como a formiga deu 2 voltas, então o percurso foi de 1,88 m

Nessas questões o descritor foi D09 – Reconhecer círculo e circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO** – Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem. .

## ATIVIDADE 3 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo

### **HABILIDADE RELACIONADA:**

H52 – Efetuar cálculos que envolvam operações com números reais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

H11 – Utilizar relações métricas do triângulo para resolver problemas significativos.

H12 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

**PRÉ-REQUISITOS:** Conhecimentos de triângulo retângulo e suas relações e Teorema de Pitágoras.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 200 minutos

**RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** papéis, caneta, régua milimetrada, quadro e caneta, música, apresentação no PowerPoint

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

**OBJETIVOS:** Auxiliar o aluno a encontrar as razões trigonométricas dos ângulos notáveis  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  com o auxílio da geometria; Utilizar as razões trigonométricas para resolução de situação problema que envolva medição.

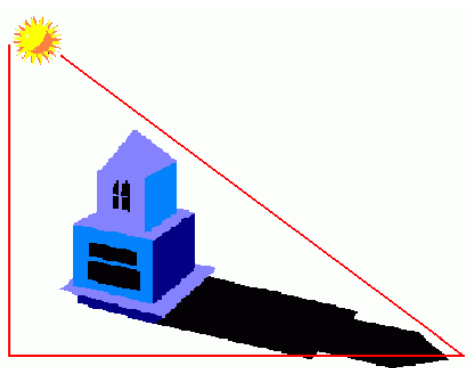
### **METODOLOGIA ADOTADA:**

A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns. A trigonometria possui diversas

aplicações no cotidiano, abrange áreas relacionadas à Astronomia, Física, Geometria, Navegação entre outras.

Algumas aplicações da trigonometria são:

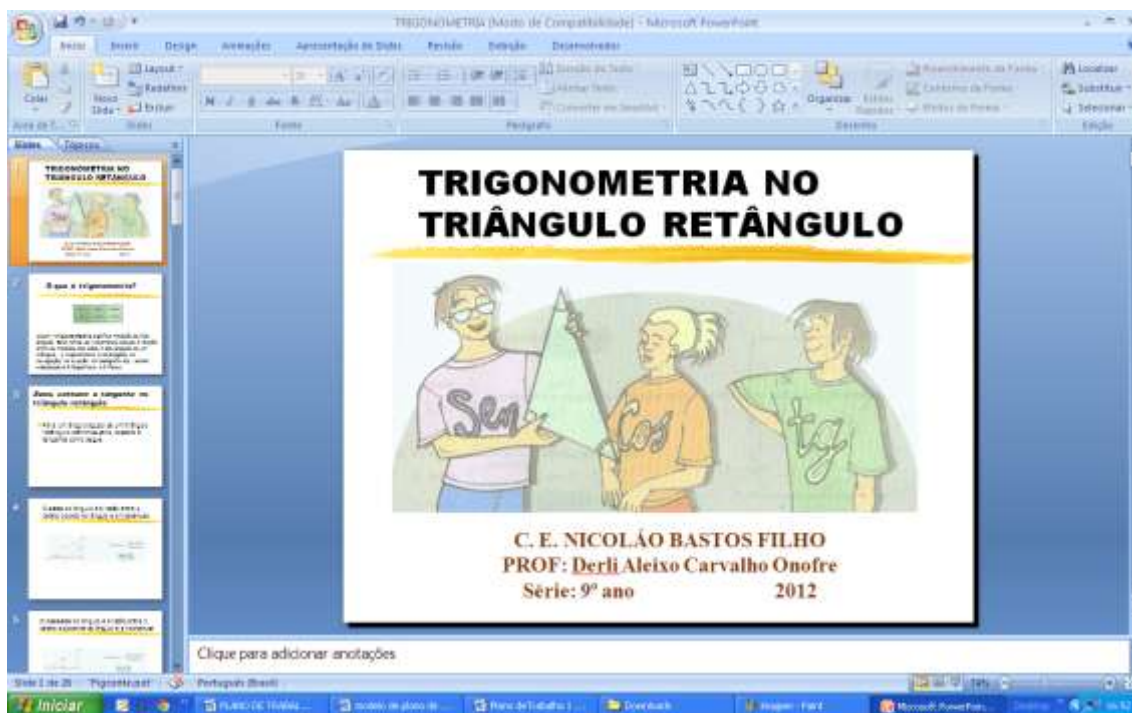
- Determinação da altura de um certo prédio.



- Os gregos determinaram a medida do raio de terra, por um processo muito simples.
- Seria impossível se medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.
- Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

Tudo isto é possível calcular com o uso da trigonometria do triângulo retângulo.

Veremos agora uma apresentação no PowerPoint.



Fonte: imagem feita pelo autor

Para padronizar o estudo da Trigonometria, adotaremos as seguintes notações:

Letra	Lado	Triângulo
<b>a</b>	<b>Hipotenusa</b>	
<b>b</b>	<b>Cateto</b>	
<b>c</b>	<b>Cateto</b>	

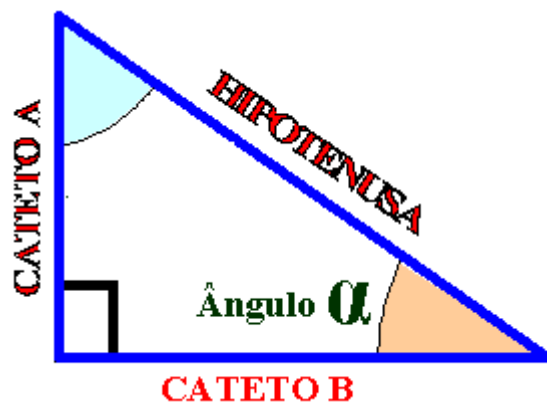
Fonte: Imagem feita pelo autor

Os catetos recebem nomes especiais de acordo com a sua posição em relação ao ângulo sob análise. Se estivermos operando com o ângulo C, então o lado oposto, indicado por c, é o cateto oposto ao ângulo C e o lado adjacente ao ângulo C, indicado por b, é o cateto adjacente ao ângulo C.

Um dos objetivos da trigonometria é mostrar a utilidade dos conceitos matemáticos no nosso cotidiano. Iniciaremos estudando as propriedades geométricas e trigonométricas no triângulo retângulo.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

As razões trigonométricas básicas são relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo e seus ângulos. As três relações mais importantes da trigonometria são: **seno**, **cosseno** e **tangente**. O ângulo é indicado pela letra  $\alpha$



Notação	Definição
$\text{sen}(\alpha)$	$\frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$
$\text{cos}(\alpha)$	$\frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$
$\text{tan}(\alpha)$	$\frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$

Fonte: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigon1/mod114.htm>,

Na resolução de alguns problemas com triângulos retângulos é necessário conhecer as razões trigonométricas dos ângulos agudos do triângulo. Cada ângulo é associado um único valor para seno, para o cosseno e para a tangente, podemos elaborar uma tabela que nos forneça esses valores, evitando assim a necessidade de calculá-los a toda hora.

### Tabela importante – ângulos notáveis

	seno	cosseno	tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigon1/mod114.htm>,

É importante que os alunos saibam montar a tabela sem que necessitem do livro para encontrar os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Isso também evita a decoreba e facilita a resolução de situações problemas variadas que envolvam as razões trigonométricas. Para isso será apresentada uma música ensinando a construir a tabela. (Como aprender seno, cosseno e tangente)

**Exemplo I** – Quando chegamos à escola tinha uma escada encostada numa parede, chamei os alunos para observarem a posição da escada e foi formulado o seguinte problema: Uma escada encostada numa parede forma com o solo um ângulo de 60°. Se a escada tem seus pés afastados a três metros da parede, qual a altura da parede?

(Faça:  $\sqrt{3} = 1,7$ )

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{x}{3} \quad \sqrt{3} = \frac{x}{3} \quad 1,7 = \frac{x}{3} \quad x = 5,1$$

R: A altura da parede é aproximadamente 5,1 m

O descritor avaliado nessa questão é o D12 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO** – Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem. .

## ATIVIDADE 4 - Construção do Teodolito

### **HABILIDADE RELACIONADA:**

H11 – Utilizar relações métricas do triângulo para resolver problemas significativos.

H12 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

**PRÉ-REQUISITOS:** Geometria do triângulo retângulo;

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

**RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Material necessário para construção do medidor de ângulos: Folha de atividade, papel cartão, Régua, transferidor, tesoura, calculadora, canudo, fita adesiva, peso (rede), barbante, fita métrica.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

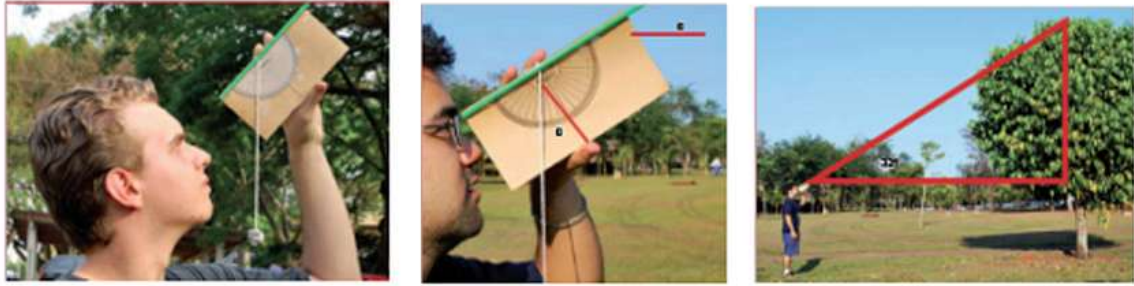
**OBJETIVOS:** Introduzir o estudo da função tangente ,utilizando a geometria para resolução de uma situação problema que envolva medições.

### **METODOLOGIA ADOTADA:**

Os alunos construirão o teodolito para fazer as medições. O passo a passo se encontra em anexo.

Propor aos alunos para fazer medições na sala de aula, no pátio e nas redondezas da escola usando o teodolito construído por eles, aplicando os conhecimentos a situações reais.

9. As imagens abaixo mostram a realização deste experimento, onde o objeto cuja altura está sendo determinada é uma árvore.

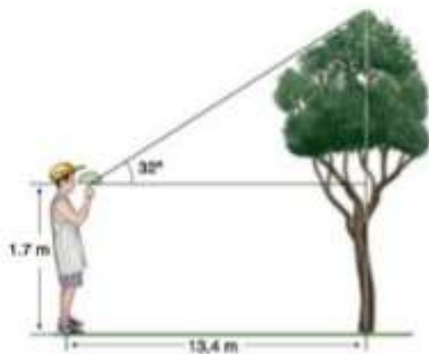


Fonte: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava>

Figuras: usando o teodolito para medira a altura de uma árvore

**Exemplo:** No pátio da escola tem uma árvore que infelizmente deverá ser cortada, pois deu cupim. Chamaram os bombeiros para fazer o serviço, mas antes deverão estimar a altura para saber a distância do isolamento para que na queda não atinja ninguém. Qual é a altura da árvore?

Dados:  $\sin 32^\circ = 0,53$ ;  $\cos 32^\circ = 0,84$ ;  $\text{tg } 32^\circ = 0,62$



Resolução;

$$\text{Tg } 32^\circ = \frac{x}{13,4}$$

$$0,62 = \frac{x}{13,4}$$

$$x = 8,30 + 1,70 \text{ (altura do bombeiro)}$$

$$x = 10,0 \text{ m}$$

**R: a altura da árvore é 10,0 m**

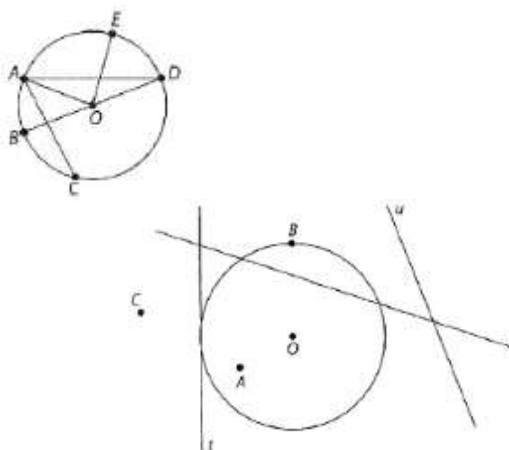
O descritor avaliado nessa questão é o D12 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO** – Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem, formular questões para serem resolvidas com as medições realizadas com o teodolito.

## ANEXOS

### I - Praticando o que aprendeu:

1. Construa circunferências com um compasso:
  - a) Uma circunferência de centro O e raio medindo 2,5 cm.
  - b) Uma circunferência de centro O e diâmetro medindo 7 cm.
2. Com o auxílio de um compasso, faça as construções que se pede:
  - a) Construa uma circunferência e três pontos: A, interno à circunferência; B, externo; e C pertencente à circunferência.
  - b) Construa uma circunferência e três retas: uma secante, uma tangente e uma externa à circunferência.
3. Observando as figuras classifique os segmentos, os pontos e as retas:
  - a) AC
  - b) AO
  - c) BD
  - d) AD
  - e) OE
  - f) Ponto A
  - g) Ponto B
  - h) Ponto C
  - i) Reta t
  - j) Reta u
  - k) Reta v



## **II - Para construção do teodolito (do medidor de ângulos), devemos seguir os seguintes passos:**

Passo 1. Recorte um pedaço (20 cm × 10 cm) do papel cartão. Ele será a base do seu teodolito.

Passo2. Fixe o transferidor neste pedaço de papel usando a fita transparente, dando destaque ao segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90°.

Passo 3. Agora precisamos prender o canudo com o barbante e o peso no transferidor. Tenha bastante atenção para que o canudo coincida com a linha de fé do transferidor (a linha que passa pelo 0° e pelo 180°), e o barbante já deverá estar preso ao canudo (amarrado) de maneira que o nó coincida com o centro do transferidor. A figura abaixo ilustra isso.



Figuras: Teodolito em construção

Fonte: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava>.

## **Avaliação**

A avaliação do processo consiste na auto-avaliação e avaliação mútua. A avaliação levará em conta a participação ativa e envolvimento dos alunos na realização das tarefas propostas. Será aplicada uma prova escrita e individual com duração de duas aulas para verificação da aprendizagem e detectar as dificuldades.

É importante a observação na evolução do aluno, isto é, se ele construiu o conhecimento com relação aos conteúdos apresentados e os objetivos propostos relacionados com os descritores do Currículo Mínimo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A CONQUISTA DA MATEMÁTICA, 9º Ano/José RUY GIOVANNI JR, Benedicto CASTRUCCI. – Ed. Renovada – São Paulo: FTD, 2009.

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Circunferência e círculo e Razões Trigonométricas – Curso de perfeição oferecido por CECIERJ referente ao 9º ano do Ensino Fundamental – 3º bimestre – disponível em <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava>.

Trigonometria no triângulo retângulo, disponível em <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigon1/mod114.htm>, acessado em 14/09/2012

Figuras: Teodolito em construção e usando o teodolito para medir a altura de uma árvore disponível em [http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/a\\_al\\_tura\\_da\\_arvore/arquivos/a\\_altura\\_da\\_arvore---o\\_experimento.pdf](http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/a_al_tura_da_arvore/arquivos/a_altura_da_arvore---o_experimento.pdf), acessado em 15/09/2012

Video -Universo Matemático Historia de Pi , disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=HEJMWGTechU&feature=related> acessado em 15/09/2012

Vídeo: como aprender seno, cosseno e tangente, disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=PXhEMDwNC7Y&feature=related>, acessado em 15/09/2012