Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 1° Ano do Ensino Médio
3° Bimestre

Plano de trabalho

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

TAREFA 2

CURSISTA: RODOLFO DA COSTA NEVES
TUTOR (A): ANALIA MARIA FERREIRA FREITAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo é oferecer aos alunos da 1ª série do Ensino Médio uma demonstração prática da trigonometria e sua utilização na resolução de diversas situações-problemas.

São inúmeros exemplos no dia a dia em que encontramos a utilização da trigonometria. Seja medindo a largura de um rio, a altura de um prédio, assim como no espaço em problemas de física e astronomia.

Podemos afirmar que todo o avanço que existe na área de construção civil, lançamento de foguetes, satélites passa pelo desenvolvimento da trigonometria.

É importante começarmos a etapa do desenvolvimento fazendo um percurso pela história, assim como, mostrar aos alunos a utilização dos conceitos da trigonometria na vida diária.

Outro fato muito importante são os pré-requisitos, para um bom desenvolvimento do trabalho.

DESENVOLVIMENTO

1° Etapa

Duração: 50 min (uma aula)

Material: Quadro negro, computador e data show.

Começamos essa etapa com um pouco da história da trigonometria. A origem da palavra, seu significado e sua utilização em diversos campos do conhecimento.

A palavra **Trigonometria** vem do grego **TRI - três**, **GONO - ângulo** e **METRIEN - medida**, significando **Medida de Triângulos**. Trata-se, assim, do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

A origem da Trigonometria é anterior à era cristã.

Apesar dos egípcios e dos babilónios terem já utilizado as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos, para resolver problemas, foi o fascínio pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria. Daí que, historicamente a Trigonometria aparece bastante cedo associada à Astronomia.

No séc. V a.C., estudaram-se relações entre arcos de circunferência e respectivas cordas, um passo importante para a Trigonometria.

A palavra corda, quando usada em Matemática, refere-se a segmento de reta que une dois pontos situados sobre um círculo

Alguns nomes tiveram grande importância no desenvolvimento da trigonometria. Foram eles: No séc. III A.C., Arquimedes de Siracusa; Hiparcus de Nicaea (séc. II a.C.); Ptolomeu (séc. II); no séc. XV com Johannes Muller Regiomontano; Euler (séc. XVIII) e outros.





O estudo da trigonometria é indispensável para os engenheiros, físicos, informáticos e praticamente todos os cientistas.

2° Etapa

Duração: 2h e 30 min (Uma semana, equivalente a três aulas).

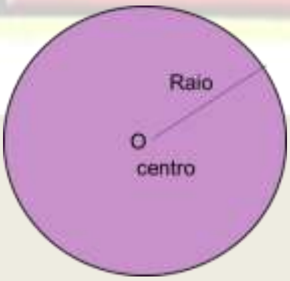
Material: Quadro negro, computador e data show. Utilizaremos o Geogebra.

Assunto: Conhecendo o círculo trigonométrico.

Pré-requisitos: Circulo circunferência e seus elementos.

Faremos uma breve abordagem sobre círculos, seus elementos e suas propriedades. Utilizaremos para isso o Geogebra.

Círculo: é o conjunto dos pontos de um plano pertencentes a uma circunferência e seu interior



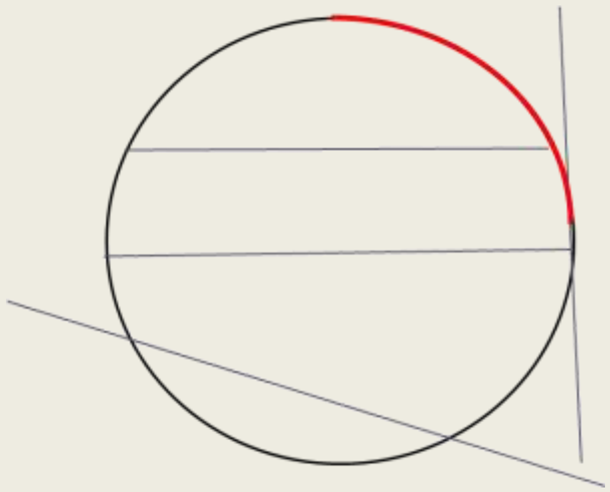
Elementos da Circunferência

Reta Secante: corta a circunferência em dois pontos.

Reta Tangente: corta a circunferência em um ponto.

Arco: é um pedaço da circunferência em dois pontos.

Corda: é qualquer segmento que liga dois pontos distintos da circunferência. (Se a corda passa pelo centro é chamado de diâmetro e vale duas vezes o raio)



Medidas de arcos

Para medir ângulos e arco de circunferência utilizamos o grau como unidade de medida. Iremos conhecer uma nova unidade de medida que irá facilitar alguns cálculos, o radiano.

O cálculo do radiano é feito a partir de uma circunferência de raio r e um arco dessa mesma circunferência ($\widehat{AB}$), se a medida do arco for a mesma medida do raio, veja a figura abaixo:

Dizemos que a medida do arco $\widehat{AB}$ é igual a 1 radiano ou seja 1 rad. Assim, podemos definir um radiano como sendo um arco onde a sua medida é a mesma do raio da circunferência que contém o arco.

O valor do ângulo α será igual a 1 radiano, se somente se, o valor do arco correspondente a ele for igual a 1 radiano.

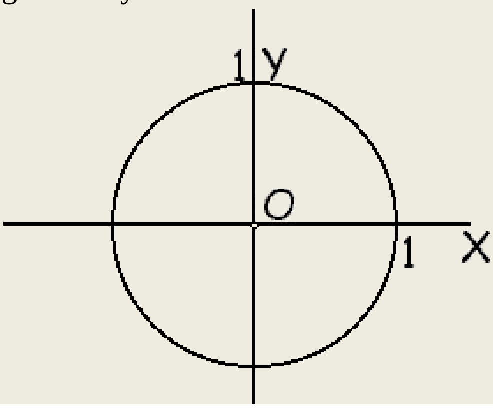
- <u>Transformações de unidades</u>

Dizemos que uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se são medidas de um mesmo arco, por exemplo, 2π é equivalente a 360°, pois ambas são medidas de um arco de uma volta completa. Consequentemente, temos:

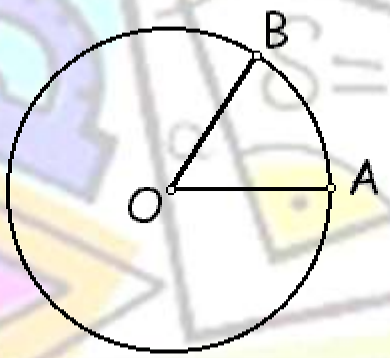
π rad é equivalente a 180º

➢ Circulo trigonométrico

Círculo Trigonométrico é um círculo de centro na origem do referencial e raio igual à unidade, ao qual se encontra associado um referencial ortogonal xOy.



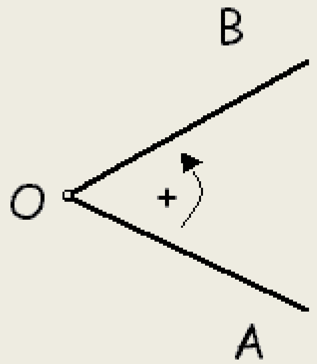
Consideremos sobre o círculo trigonométrico de centro O, os pontos A e B escolhidos como a figura indica.



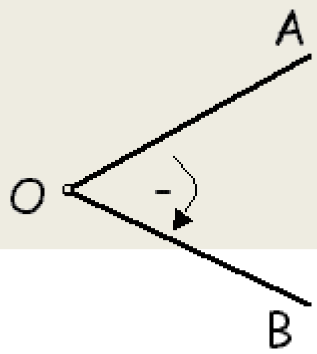
O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas OA e OB são, respectivamente, o lado origem e o lado extremidade.

Há dois sentidos de percurso num círculo:

Ângulo positivo é o ângulo gerado no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.



Ângulo negativo é o ângulo gerado no sentido dos ponteiros do relógio.



3° Etapa

Duração: 2h e 30 min (Uma semana, equivalente a três aulas).

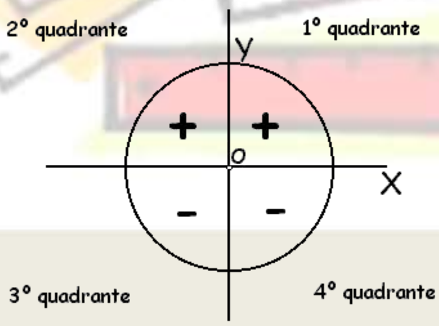
Material: Quadro, giz, computador e Datashow.

Assunto: Seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico.

O sinal de uma razão trigonométrica depende exclusivamente do sinal das coordenadas do ponto associado ao círculo trigonométrico.

Para todo o α,

$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$



Para todo o α,

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

- **Redução de Arcos ao 1º quadrante**

O objetivo desse estudo é relacionar o seno e o cosseno de um arco do 2°, 3º ou do 4° quadrante com o seno e o cosseno do arco correspondente no 1° quadrante.

Ângulo	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

- Redução do 2° para o 1° quadrante

Exemplo: Calcular o seno e cos de 150°

150º = 180º - 30°. Logo podemos reduzir o ângulo de 150° ao ângulo de 30° do primeiro quadrante. Aqui devemos ter atenção ao sinal, pois o sinal do seno e cosseno varia de acordo com o quadrante.

sen 150º = ½

cos 150º = $-\sqrt{3}/2$

- <u>Redução do 3° para o 1° quadrante</u>

Exemplo: Calcular o seno e cos de 240°

240° = 180º + 60°. Logo podemos reduzir o ângulo de 240° ao ângulo de 60° do primeiro quadrante. Aqui devemos ter atenção ao sinal, pois o sinal do seno e cosseno varia de acordo com o quadrante.

sen 240° = $-\sqrt{3}/2$

cos 240° = 1/2

- <u>Redução do 4° para o 1° quadrante</u>

Exemplo: Calcular o seno e cos de 330°.

330° = 360º - 30°. Logo podemos reduzir o ângulo de 330° ao ângulo de 30° do primeiro quadrante. Aqui devemos ter atenção ao sinal, pois o sinal do seno e cosseno varia de acordo com o quadrante.

sen 330º = -1/2

cos 330º = $\sqrt{3}/2$

Conclusão: Os senos ou cossenos de dois arcos correspondentes têm o mesmo módulo.

4° Etapa

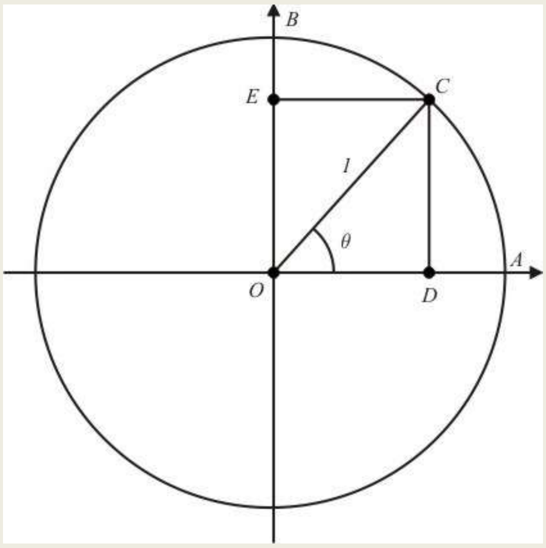
Duração: 1h e 40 min (Uma semana, equivalente a duas aulas).

Material: Quadro e giz.

Assunto: Relação fundamental da trigonometria

Pré-requisito: Teorema de Pitágoras

Considere o círculo trigonométrico abaixo de raio unitário:



Podemos destacar o triângulo retângulo *ODC*. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(1) \qquad \overline{OD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{OC}^2$$

E, ainda, podemos verificar as seguintes relações:

$$(2) \qquad \overline{OD} = \cos(\theta)$$

$$(3) \qquad \overline{CD} = \mathrm{sen}(\theta)$$

$$(4) \qquad \overline{OC} = 1 \text{ (raio de tamanho unitário)}$$

Fazendo as substituições de (2), (3) e (4) na relação (1), obtemos:

$$\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Vejam que esta relação é válida para qualquer ângulo θ.

AVALIAÇÃO

A proposta de avaliação será desenvolvida em grupo. Aqui podemos perceber o que foi atingido e modificar as estratégias para o que não foi absorvido pelos alunos.

Proposta

Formamos grupos de três alunos e distribuiremos as tarefas abaixo.

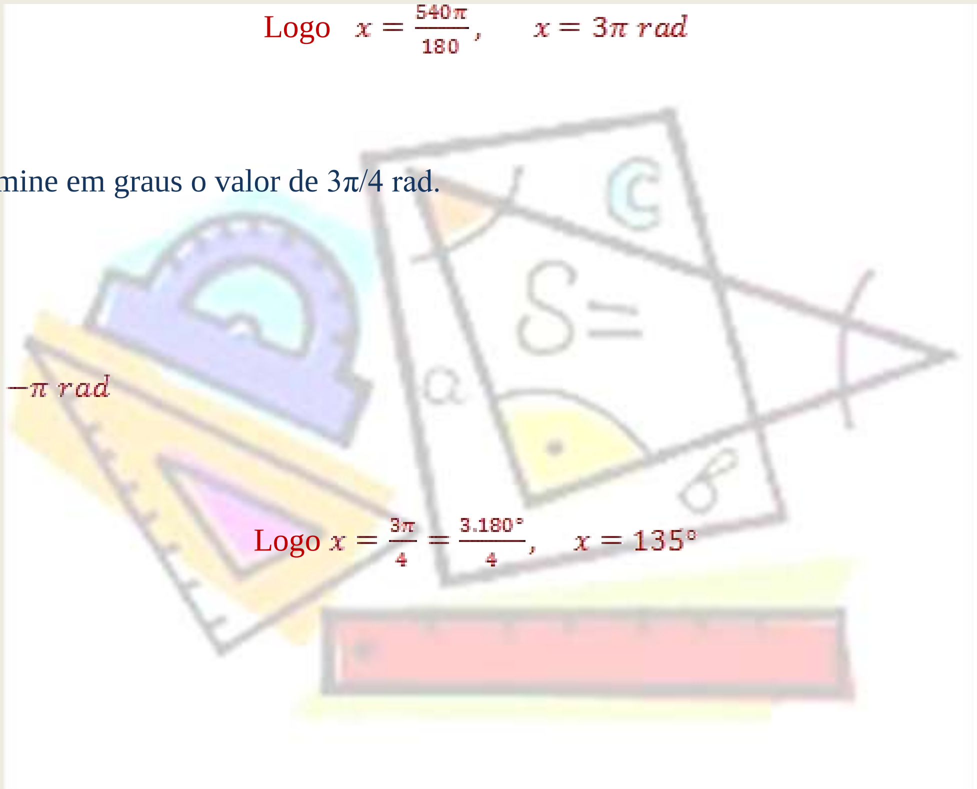
Questão 1: Quantos radianoscorrespondem a 540°?

Resposta:

$$180° ------\pi\ rad$$

$540° ------x\ rad$

Logo $x = \frac{540\pi}{180}$, $x = 3\pi\ rad$



Questão 2: Determine em graus o valor de $3\pi/4$ rad.

Resposta:

$180° ------\pi\ rad$

Logo $x = \frac{3\pi}{4} = \frac{3.180°}{4}$, $x = 135°$

Questão 3: Com o auxílio da tabela de arcos notáveis, calcule:

a) sen 120°
b) cos 120°
c) sen 300º
d) cos 300°

Questão 4: Sabendo que $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$, calcule o sen α.

Resposta:

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

$$sen^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$sen^2\alpha = 1 - \frac{25}{169}$$

$$sen\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$$

$$sen\ \alpha = \pm\frac{12}{13}$$

Como α pertence ao 4° quadrante o seu seno é negativo, logo:

$$sen\ \alpha = -\frac{12}{13}$$

BIBLIOGRAFIA

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Volume Único. São Paulo, Ática, 2000.

IEZZI, GELSON. Matemática – Volume Único. São Paulo, Atual, 1997.

PAIVA, MANOEL. Matemática – Volume Único. São Paulo, Moderna, 2008.