

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Tabelas no futebol.	15 a 20 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
2	Um novo olhar ...	Matrizes no futebol.	25 a 35 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Operação Matrix	15 a 20 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

## APRESENTAÇÃO

Caro professor, nesta dinâmica, vamos trabalhar com a multiplicação de matrizes. Para isso, vamos abordar, na primeira etapa, por meio de tabelas, as operações numéricas, utilizando um tema que costuma estar presente no cotidiano dos alunos e no da maioria dos brasileiros: o futebol. Na segunda etapa, aproveitamos o problema do campeonato de futebol para trabalhar a multiplicação de matrizes. Já na Etapa 3, os alunos vão aplicar o procedimento explorado na Etapa 1 para multiplicar outras matrizes, experimentar a não comutatividade dessa operação e observar a existência da matriz identidade.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas, entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas, ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

RESULTADOS \ TIMES	VITÓRIAS	EMPATES	DERROTAS
Bola na trave	2	1	0
Tô sem controle	1	1	1
Deixa que eu chuto	1	2	0
Só o que sobrou	0	0	3



2. Observando os dados numéricos da tabela, responda.
  - a. Qual informação temos na linha do time “Tô sem controle”?

Os resultados dos jogos deste time, ou seja, o número de vitórias, empates e derrotas.



- b. Qual informação temos na coluna “derrotas”?

O número de derrotas de cada um dos 4 times.



3. Pelo regulamento desse campeonato escolar, são classificados para a final os dois times que tiverem maior número de pontos. Além disso, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 e cada derrota vale 0. Registre essas informações na tabela a seguir:

RESULTADOS	PONTOS
Vitória	
Empate	
Derrota	

---

---

## Procedimentos Operacionais

- Professor, organize a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.



---

---

## Intervenção Pedagógica

- Professor, o preenchimento das tabelas dos itens 1 e 3 deve ser feito através da interpretação das informações dadas. Acreditamos que os alunos não encontrem dificuldades, pois a situação apresentada envolve um contexto que é “preferência nacional”, mas pode ocorrer que alguns alunos não gostem de futebol. Isso pode provocar que não tenham vivência com os placares dos jogos apresentados no item 1 e, conseqüentemente, não reconheçam as situações de vitória, empate e derrota. Nesse caso, você pode explicar a eles que, no placar de um jogo, apresenta-se o números de gols que cada time fez na partida na mesma ordem da descrição do jogo, assim, por exemplo, se no jogo AXB o placar foi 1x3, o time A marcou 1 gol e o B, 3.
- No item 2, esperamos que os alunos se familiarizem com a maneira de organizar os dados, percebendo que cada linha e cada coluna representa algo bem determinado. Caso você perceba que seus alunos não compreenderam bem, faça outras perguntas sobre outras linhas ou colunas.
- No item 4, os alunos devem encontrar o total de pontos de cada time. É importante que você sinalize e discuta com eles sobre a expressão que gera o total de pontos.



3. Represente agora os dados numéricos da *Tabela 2*, na forma de uma matriz  $B$  de ordem  $3 \times 1$ . Diga também o que representam as linhas e a coluna.

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As linhas representam os resultados (vitória, empate e derrota) e a coluna, a pontuação de cada resultado.



4. Compare o número de colunas da matriz  $A$  com o número de linhas da matriz  $B$ .

O que você observa em relação ao que cada uma dessas filas representa?

---

Resposta

O número de colunas de  $A$  é igual ao número de linhas de  $B$ .

Elas representam a mesma coisa: vitórias, empates e derrotas. Na matriz  $A$ , a quantidade de cada tipo de resultado e na matriz  $B$ , a respectiva pontuação.



5. A multiplicação de matrizes é realizada de acordo com a seguinte condição: o número de colunas da 1ª matriz deve ser igual ao número de linhas da 2ª matriz.

Com base na afirmação, é possível realizar o produto  $A \cdot B$ ?

E o produto  $B \cdot A$ ?

Justifique suas respostas.

---

Resposta

É possível realizar o produto  $A \cdot B$ , pois a matriz  $A$  (primeira) tem 3 colunas e a  $B$  (segunda) 3 linhas.

Não é possível realizar o produto  $B \cdot A$ , pois o número de colunas da matriz  $B$  é diferente do número de linhas da matriz  $A$  ( $B$  tem 1 coluna e  $A$  4 linhas).



9. Olhe atentamente para o resultado da matriz A·B. O que significam os elementos dessa matriz?

---

## Resposta

O número de pontos de cada equipe, na ordem em que estavam na matriz A; esta matriz corresponde à Tabela 3.



### Recursos necessários

- Encarte do aluno;

---

## Procedimentos Operacionais

- *Professor, continue com a turma organizada como na etapa anterior.*



---

## Intervenção Pedagógica

- *Professor, nos itens 1, 2 e 3, os alunos devem registrar os dados numéricos e dizer a ordem das matrizes A e B. Acreditamos que os alunos não tenham dificuldades, entretanto é importante que você os oriente que, ao escreverem essas matrizes, devem respeitar as posições horizontal e vertical dos dados e utilizar as mesmas ordens de times, resultados e pontos que nas Tabelas 1 e 2.*
- *No item 4, chamamos a atenção dos alunos para o fato de as linhas da matriz B corresponderem às colunas da matriz A. Isso é fundamental para o entendimento do procedimento utilizado para a multiplicação de duas matrizes. Não deixe de enfatizar esse fato junto aos alunos!*
- *No item 5, apresentamos em que condições a multiplicação de matrizes pode ser realizada. Se houver tempo, você pode propor outros casos para que os alunos analisem se é possível realizar os produtos.*
- *Apresentamos, informalmente, como realizamos a multiplicação de matrizes procurando evitar uma definição formal. Por esse motivo, usamos a sentença “multiplicamos os elementos da 1ª linha da matriz A pelos correspondentes da 1ª coluna da matriz B” no item 6. É possível que você tenha de reforçar que multiplicar pelos correspondentes*

Resposta

$$D \cdot E = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} e$$

$$E \cdot D = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo,  $D \cdot E \neq E \cdot D$



2. Em geral, dadas duas matrizes quadradas  $M$  e  $N$  de mesma ordem, sempre teremos  $M \cdot N = N \cdot M$ ? Por quê?

Resposta

Não, no item 1 temos um exemplo de que a afirmação não é verdadeira.



3. Dada a matriz  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Encontre os produtos  $D \cdot R$  e  $R \cdot D$ .

Resposta

$$D \cdot R = R \cdot D.$$

A matriz não alterou o produto.



**Recursos necessários:**

- Encarte do aluno.

A)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

B)  $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

C)  $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

D)  $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$

E)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

## QUINTA ETAPA

### ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ



Resposta

$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Resposta: Alternativa (C).

#### Erros possíveis

Os alunos que escolheram a alternativa (a), provavelmente, fizeram a multiplicação entre os elementos de mesma posição, ou seja, elevaram cada elemento de  $M$  ao quadrado. Os alunos que optaram pela alternativa (b), possivelmente fizeram o processo de multiplicação corretamente, mas apresentaram problemas com a multiplicação de números inteiros, considerando todos os resultados das multiplicações pelos correspondentes com valores positivos. Os alunos que optaram pela alternativa (d), provavelmente, trocaram as linhas pelas colunas de um dos fatores do produto antes de realizar a multiplicação. Já os alunos que optaram pela alternativa (e) apenas repetiram os termos da matriz  $M$ , e, provavelmente, não compreenderam o processo de multiplicação de matrizes.



Resolvendo os sistemas encontramos  $a = 2$ ,  $c = -5$ ,  $b = -1$  e  $d = 3$ . Com isso a

matriz inversa da matriz é a matriz  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ .

Quer conferir o processo? Calcule  $A \cdot A^{-1}$  e  $A^{-1} \cdot A$  e verifique que o resultado será a matriz identidade de ordem 2!

## AGORA, É COM VOCÊ!

1. Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  e  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Calcule, quando possível, as operações matriciais indicadas:

- a.  $A + B$

---



---


$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

• • • • •

- b.  $A + C$

---



---

*Não é possível realizar a adição porque as matrizes não têm a mesma ordem.*

• • • • •

- c.  $A - B$

---



---


$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

• • • • •

Resposta

Resposta

Resposta

b.  $A^3 = A \cdot A \cdot A$

---

Resposta

$A^3 = A$

