Reforço escolar · Matemática ·

Professor

Quantos cones cabem em um cilindro?

Dinâmica 4

2º Série | 3º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª Série do Ensino Médio	Geométrico	Geometria Espacial: Prismas e Cilindros.

DINÂMICA	Quantos cones cabem em um cilindro?
HABILIDADE BÁSICA	H09 – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.
HABILIDADE PRINCIPAL	H25 – Resolver problemas envolvendo noções de volume.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de pirâmides e cones.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Acho que estou andando em círculos!	15 a 20 min.	Duplas com discussão coletiva.	Individual
2	Um novo olhar...	Vamos fazer uma revolução!	25 a 35 min.	Duplas com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Enchendo o cilindro!	15 a 20 min.	Grupos de 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou em outra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Caro professor, ao trabalharmos Geometria Espacial, é fundamental que os alunos exercitem a compreensão, a interpretação e capacidade de generalização dos conceitos geométricos em diversas situações e contextos. Sendo assim, na primeira etapa, apresentamos uma atividade que explora os principais elementos de um círculo, destacando a circunferência e seu comprimento. A segunda etapa aborda a visualização de um cone de revolução, envolvendo também sua planificação. Na terceira etapa, os alunos são convidados a comparar o volume de um cilindro e de um cone de mesma base e altura, transferindo o material de um sólido para outro. Essa abordagem busca trabalhar para além da utilização mecânica da fórmula de cálculo de volume.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

20 MINUTOS

Atividade • Acho que estou andando em círculos!

Objetivo

Explorar os elementos de um círculo, conhecendo seu raio.

Descrição da Atividade

Professor, pretendemos, nesta etapa, reforçar que a circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que são equidistantes do seu centro. Para isso, iniciamos com o desenho de um círculo e, a partir dele, exploramos as medidas do raio, do diâmetro e da circunferência. Sendo assim, a ênfase dada será na construção e visualização, através dos seguintes passos.

1. Desenhe um círculo em uma folha de papel sem pauta da seguinte maneira: abra o compasso com uma distância de 3 cm entre a ponta seca e o grafite e, em seguida, trace a circunferência e realce com uma caneta a marca deixada pela ponta seca no centro do círculo.

2. Marque três pontos quaisquer na borda, em diferentes posições, e meça com a régua a distância entre estes pontos e o centro.

   O que você observa?

Resposta

A distância de cada um dos pontos até o centro é sempre igual a 3 cm.

• • • • •

3. Esta distância possui um nome especial.

   Você se lembra dele? Qual é?

Resposta

Raio.

• • • • •

4. Agora, trace com a régua uma linha passando pelo centro, e marque os dois pontos de interseção dessa linha com a circunferência.

Medindo a distância entre esses dois pontos, qual valor você encontra?

Resposta

6 cm.

• • • • •

5. Esta distância também possui um nome específico. Qual é?

Resposta

Diâmetro.

• • • • •

6. É possível relacionar as medidas do raio e do diâmetro encontradas no item 2 e no item 4? Em caso afirmativo, como?

Resposta

A medida do diâmetro é sempre o dobro da medida do raio.

• • • • •

7. Você sabia que circunferência é o nome dado para o contorno do círculo?

Agora, corte um pedaço de barbante no tamanho exato da circunferência e meça-o com a régua.

Resposta

Resposta pessoal, mas que deve estar entre 18 cm e 19 cm.

• • • • •

Professor

8. Você se lembra da fórmula para a medida da circunferência? Troque ideias com seu colega e tentem relacioná-la com as medidas encontradas por cada um de vocês no item anterior.

Resposta

A fórmula para a medida da circunferência é $C = 2\pi r$. Com a aproximação de 3,14 para π e com $r=3$ cm, temos $C = 2 \cdot 3,14 \cdot 3 = 18,84$ cm.

• • • • •

9. Seu professor entregou um conjunto com duas planificações, utilizando o barbante recortado no item anterior, descubra quais linhas dessas planificações possuem a mesma medida da circunferência desenhada no início dessa etapa.

Compare seu resultado com o de seus colegas.

Resposta

Na planificação do cilindro: o contorno do círculo, e dois lados maiores do retângulo.

Na planificação do cone: o arco de circunferência.

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Folha de papel sulfite sem pauta.
- Compasso.
- Régua milimetrada.
- Barbante.
- Tesoura.
- Um conjunto com as planificações disponíveis no anexo.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, a turma deve ser organizada em duplas. Caso haja necessidade, faça um trio.*
- *Cada dupla deve receber uma folha de papel sulfite sem pauta, bem como um conjunto com as planificações, além do compasso, da régua, da tesoura e de um pedaço de barbante com, no mínimo, 20 cm de medida.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, alguns alunos podem ter dificuldade em utilizar o compasso, bem como em marcar 3 cm. É importante que você supervisione o desenho da circunferência para que os alunos possam realizar as atividades desta etapa e da etapa seguinte. Se necessário, peça que os alunos desenhem novamente até que o desenho fique bom.*
- *É importante que os alunos meçam o raio, o diâmetro e o barbante com bastante cuidado, para que o valor encontrado seja o mais preciso possível. Não podemos esquecer que o ato de medir é impreciso por si só e isso pode ser abordado com os alunos, no caso de eles obterem valores diferentes nas medições.*
- *Em relação ao comprimento da circunferência, é fundamental que eles posicionem o barbante sobre a mesma tomando muito cuidado para que encontrem um pedaço de barbante o mais próximo possível da medida da circunferência. Nesse momento, você pode fazer comentários sobre a impossibilidade de se encontrar um valor exato para tal medida, uma vez que é dada por um número irracional, e que os valores encontrados tratam-se todos de aproximações. Esperamos que essa discussão seja abordada no item 8, quando pedimos que os alunos reflitam sobre a fórmula da média do comprimento da circunferência que eles já devem conhecer – ela foi trabalhada na Etapa 1 da dinâmica 8 do 2º bimestre.*
- *A utilização do barbante para encontrar linhas com o mesmo comprimento da circunferência tem por objetivo levar o aluno a perceber características importantes das planificações apresentadas. Você pode reforçar essa ideia na próxima etapa, enquanto os alunos montam os sólidos.*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

35 MINUTOS

Matemática

Atividade • Vamos fazer uma revolução!

Objetivo

Reconhecer que o cone é um sólido de revolução e explorar seus elementos.

Descrição da Atividade

Professor, nessa atividade vamos construir representações de um cilindro e de um cone por meio das planificações dadas, bem como explorar a ideia de que o cone é um sólido de revolução. Pretendemos que o aluno compreenda a relação existente entre seus elementos, propiciando assim a realização dos cálculos de seus volumes na etapa seguinte. Veja a proposta.

1. Recorte as planificações entregues pelo seu professor na etapa anterior e monte os dois sólidos. Faça com cuidado, evitando "buracos".

   Você conhece esses sólidos? Troque ideias com seus colegas e professor e nomeie cada um deles.

Resposta

São um cone e um cilindro.

• • • • •

2. Agora, encaixe o cone no cilindro de modo que o bico do cone fique para cima. Observe o que aconteceu com as bases do cone e do cilindro e diga: qual é a figura que deveria "fechar" o cone.

Resposta

Um círculo.

• • • • •

3. Apoie os sólidos montados por suas bases sobre o círculo desenhado na etapa anterior.

   Você consegue determinar a medida dos raios de cada uma das bases? Explique como.

Resposta

A medida é de 3 cm. A base do cone e do cilindro é um círculo congruente ao desenhado na etapa anterior.

• • • • •

4. Recorte o triângulo retângulo entregue por seu professor.

Qual é a medida de seus catetos?

Alguma dessas medidas coincide com a medida do raio do círculo desenhado na Etapa 1?

Resposta

3 cm e 8 cm.

Sim, o menor cateto tem medida 3 cm, mesma do raio do círculo desenhado na Etapa 1.

• • • • •

5. Agora, vamos fazer o seguinte: com a ajuda de seu colega, apoie o triângulo retângulo, por um de seus catetos, perpendicularmente sobre o círculo desenhado na Etapa 1, posicionando-o de modo que o vértice do ângulo reto coincida com o centro do círculo, e que o cateto apoiado tenha mesma medida do raio do círculo.

Gire o triângulo retângulo em torno do cateto que se encontra perpendicular ao círculo até que ele dê uma volta completa.

E aí? Que figura espacial você imagina surgindo a partir desse movimento?

Repita o movimento para ter certeza e compare com os sólidos montados!

Resposta

Um cone.

• • • • •

6. Agora que você já conhece as medidas dos raios das bases do cilindro e do cone, vamos determinar suas alturas. O que você pode afirmar sobre elas?

Dica: Para determinar a altura do cone, observe o triângulo retângulo.

Resposta

O cone e o cilindro têm a mesma altura. Ambas medem 8 cm.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Planificações usadas na etapa anterior.
- Triângulo disponível no anexo.
- Régua milimetrada.
- Tesoura.
- Cola.

Procedimentos operacionais

- *Professor, a turma deve continuar organizada em duplas.*
- *Entregue, para cada par de alunos, um triângulo retângulo disponível no anexo, além de régua e cola.*

Intervenção pedagógica

- *Professor, sugerimos que você mesmo monte previamente o cone e o cilindro disponíveis no anexo, para que possa perceber as dificuldades que os alunos provavelmente apresentarão. É importante, que você explique que se trata, na verdade, de representações das superfícies de tais sólidos, justificando também a ausência de uma das bases, no caso do cilindro, e da base do cone.*
- *No item 1, é interessante que você supervisione o trabalho dos alunos para que os sólidos montados não tenham buracos, uma vez que na etapa seguinte eles deverão preenchê-los com grãos. Nesse momento, esperamos que os alunos nomeiem cada um dos sólidos, como é provável que eles não conheçam, você deve apresentá-los.*
- *No item 2, esperamos que os alunos comparem os dois sólidos, percebendo que possuem a mesma base. Você deve estar atento à maneira*

que os alunos encaixam o cone; nesse momento, você também pode chamar atenção para o fato de eles possuírem a mesma altura.

- *No item 3, os alunos têm a oportunidade de perceber que as bordas das bases do cilindro e do cone coincidem com a circunferência desenhada na etapa anterior. Perceba que fazemos isso para que os alunos consigam identificar a medida do raio, uma vez que sem isso, eles teriam que usar artifícios de construções geométricas, o que fugiria ao nosso objetivo aqui nesta dinâmica. Caso os alunos não consigam perceber de imediato a medida do raio, questione sobre como eles obtiveram a circunferência na Etapa 1. De qualquer maneira, é interessante explorar os argumentos dos alunos.*

- *No item 4, mais uma vez, os alunos devem medir, no caso de os alunos obterem valores diferentes, explore o fato de o ato de medir ser impreciso, por ser uma atividade humana, para que cheguem a um consenso com relação à medida de cada um dos segmentos.*

- *O item 5 é um momento crucial dessa etapa, visto que nele os alunos podem visualizar o cone como um sólido de revolução. Como a orientação é longa, talvez seja interessante que você mesmo realize o movimento para que os alunos possam compreender o que deve ser feito. Caso os alunos tenham dificuldade em perceber o cone, posicione-o ao lado do triângulo girando e veja se isso os ajuda.*

- *Caso os alunos tenham dificuldade em perceber que ao girar o triângulo retângulo em torno de seu cateto maior, obtemos um cone como o montado nesta etapa, sugira que o triângulo seja colocado no interior do cone, posicionando-o de modo que sua hipotenusa encoste em sua superfície. Ajude-os nesta tarefa, uma vez que o cateto maior deve ser posicionado também adequadamente, coincidindo com o eixo do cone. Você pode providenciar ainda, um triângulo retângulo com as mesmas medidas em um material menos maleável, como papel cartão, por exemplo, para facilitar o movimento do triângulo no interior do cone e permitir que o aluno visualize que o cone se trata de um sólido de revolução.*

- *Para realizar o item 6, o triângulo, bem como a realização do item 2 podem ajudar. Na verdade, os alunos não devem ter dúvida para identificar a altura do cilindro. Para determinar a altura do cone, eles têm algumas opções, por exemplo, ou recordam o item 2, percebendo que o cone e o cilindro têm a mesma altura, ou notam que a altura do cone corresponde ao outro cateto do triângulo retângulo. De qualquer maneira, certifique-se de que os alunos perceberam que os dois sólidos têm a base com a mesma área e a altura com mesma medida.*

Terceira Etapa
Fique por dentro!

20 MINUTOS

Atividade • Enchendo o cilindro!

Objetivo

Comparar os volumes de um cone e de um cilindro de mesma base e mesma altura.

Descrição da Atividade

Professor, nesta atividade, vamos comparar os volumes de um cone e de um cilindro de mesma base e altura, montados na etapa anterior. Para tal, sugerimos a utilização de grão de arroz para encher o cone e, assim, fazer a transferência do conteúdo. A experiência consiste em transferir o material do cone para o cilindro até preenchê-lo completamente. Acompanhe a proposta.

Agora, vamos comparar o volume do cone e do cilindro.

1. Para isso, vamos utilizar grãos para transferir de um para o outro.

   Antes de começar a usar os grãos, responda: você e seus colegas acham que o volume do cone é maior, menor ou igual ao do cilindro. Por quê?

Resposta

O volume do cone é menor do que o volume do cilindro, pois o cone cabe dentro do cilindro.

• • • • •

2. Encha o cone com grãos de arroz até o topo.

   Transfira esses grãos para o cone. Repita esse processo até que o cone fique completamente cheio.

   Quantas vezes você precisou encher o cone para preencher totalmente o cilindro?

Resposta

3 vezes.

• • • • •

3. Sabendo que o volume do cilindro é calculado por $\pi \cdot r^2 \cdot h$, em que r é o raio da base e h sua altura, indique uma fórmula para calcular o volume do cone de mesma base e mesma altura que o cilindro.

Resposta

$$\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

• • • • •

4. Utilizando a aproximação 3,14 para π, determine o volume do cilindro e do cone montados por você e seus colegas na etapa anterior.

Resposta

Volume do cilindro: aproximadamente 226,08 cm^3

Volume do cone: aproximadamente 75,36 cm^3

• • • • •

Recursos necessários:

- Cone e cilindro construídos na etapa anterior.
- Grãos de arroz cru.
- Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

- *A turma deve ser reorganizada em grupos de 4 alunos. Para tal, junte duas duplas. Caso seja necessário, forme um trio.*
- *Distribua, para cada grupo, o equivalente a 2 ½ xícaras de chá de grãos de arroz.*
- *O arroz pode ser substituído, mas você deve estar atento ao fato de que os alunos podem não montar perfeitamente os sólidos.Dessa forma, a escolha de grãos muito finos deve ser evitada, pois pode passar facilmente por eventuais buracos; por outro lado, grãos maiores como feijão podem ser imprecisos.*

• • • • •

- *Professor, é importante que você faça a experiência antes da aula para conferir se o material é adequado e se é realmente suficiente. Você pode envolver toda a turma pedindo que façam suas apostas antes da experiência.*

- *Na questão 1, esperamos que os alunos se lembrem da experiência realizada na etapa anterior. É importante que você incentive-os a pensarem antes de realizarem a experiência que vai comprovar que o volume do cone é menor e também igual à terça parte do volume do cilindro.*

- *Durante a realização da experiência, os alunos podem ter dificuldade em perceber que o volume do cilindro corresponde a três vezes o volume do cone; nesse caso, você pode promover uma participação coletiva da turma, pegando 4 voluntários um com o cilindro cheio de arroz e ouros três com cones vazios, peça, então, que o aluno com o cilindro encha os três cones.*

- *No item 4, caso os alunos tenham entendido bem a experiência realizada no item 2, é provável que eles não tenham dificuldade para concluir que para obter o volume do cone basta dividir o volume do cilindro por 3. Entretanto, chame atenção para o registro* $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$*, pois relacionar a escrita corrente com a algébrica não é um processo imediato. É também interessante que você destaque outra maneira de expressar o volume do cone, através da área da base,* A_b*, nesse caso,* $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

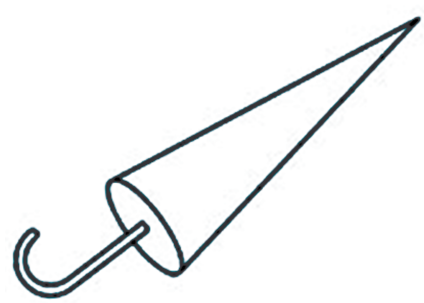
- *No item 5, os alunos devem aplicar as fórmulas, calculando o volume dos sólidos montados. Nesse momento você deve ficar atento às possíveis dificuldades que os alunos possam apresentar ao realizarem as operações envolvidas, com números decimais e o uso da calculadora pode ser uma boa opção.*

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão

Uma fábrica de doces e balas produzirá chocolates, enchendo copinhos na forma de guarda-chuva, com 8 cm de altura e 2 cm de diâmetro.



Dentre as alternativas a seguir, qual é a menor quantidade de chocolate suficiente para a produção de 200 dessas peças?

a. 5,1 L

b. 1,7 L

c. 20,1 L

d. 6.7 L

(Use 3,14 como valor aproximado de e lembre-se de que 1 cm^3=1 mL e que 1 L= 1000 mL)

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Professor

Resposta

Inicialmente, vamos calcular o volume do cone de chocolate, observando que $r = \frac{2}{2} = 1$.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 8}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Cada chocolate possui $\frac{8\neq}{3}\,\text{cm}^3$ *de volume.*

A fábrica quer produzir 200 peças, então: $200 \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{1600\pi}{3} \cong 1675\text{cm}^3$.

Como 1 cm³ = 1 mL , temos 1675 mL de chocolate, o que corresponde a 1,675 L.

E a alternativa correta é a **(b).**

Erros Possíveis*:*

Em uma questão como esta, os alunos podem cometer alguns erros, a saber, confundir a fórmula do volume do cone com a fórmula do volume do cilindro; considerar como raio o valor dado, que é o do diâmetro; além de se confundir com as unidades L e mL.

o item (a) corresponde ao valor obtido considerando a fórmula para o volume do cilindro; o item (c), ao valor obtido, considerando a fórmula para o volume do cilindro e o raio da base como 2 cm; finalmente, o item (d) o aluno usa a fórmula correta para o volume do cone, mas considera como raio, 2 cm.

• • • • •

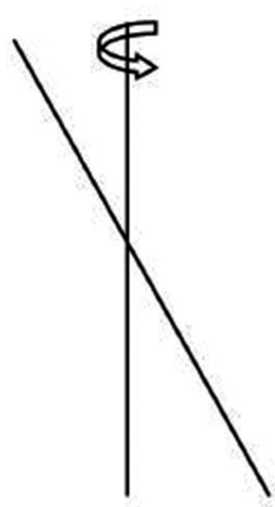
Etapa Flex

Para saber +

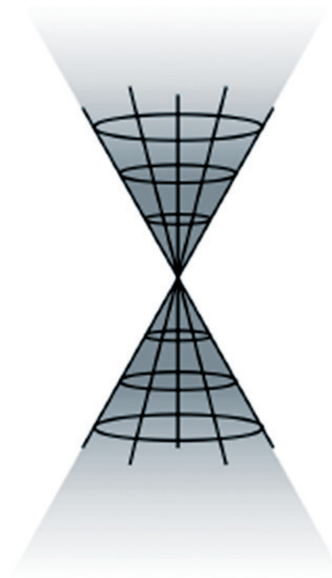
O que são cônicas?

Você já ouviu falar das cônicas?

Imagine uma reta e um eixo.



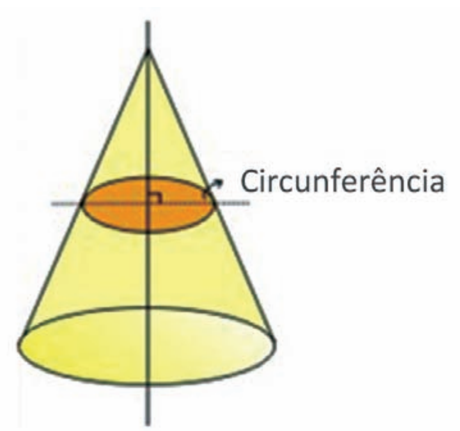
Imagine ainda que essa reta está girando em torno desse eixo de rotação. O que obtemos?



Obtemos um cone de revolução, também chamado cone de duas folhas. Estamos considerando somente a superfície formada pelas retas resultantes da rotação da reta de partida e qualquer uma dessas retas se chama geratriz da superfície cônica.

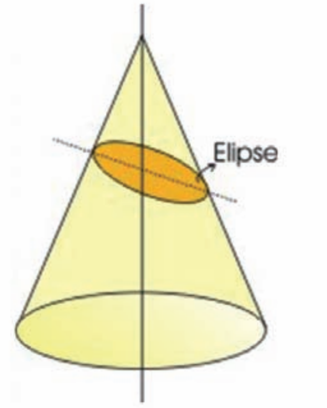
Vamos fazer cortes, ou secções, neste cone.

Se seccionarmos o cone por um plano perpendicular ao seu eixo de rotação, como indicamos a seguir, obteremos uma circunferência.

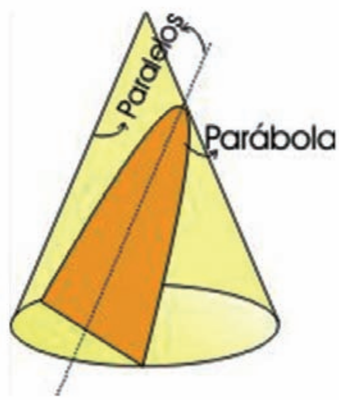


Já se o plano cortar o eixo de simetria num ângulo diferente de 90°, não paralelo à geratriz, conforme a figura a seguir, a secção será uma *elipse*.

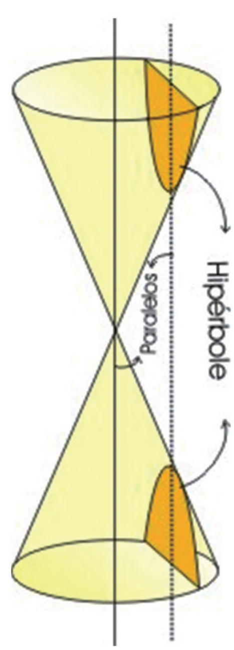
Professor



O que ocorre se fizermos um corte por um plano paralelo à geratriz? Neste caso a secção será uma *parábola*.



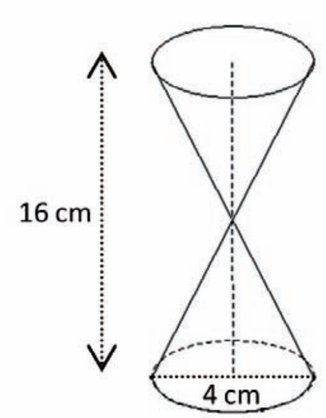
Por fim, pense num plano paralelo ao eixo de rotação cortando o cone de duas folhas. A secção será uma *hipérbole*.



Estas figuras são chamadas de cônicas, por serem obtidas a partir de cortes no cone; além disso, por serem obtidas a partir de um plano, elas são curvas planas.

Agora, é com você!

1. Uma ampulheta é formada por dois cones. Qual o volume da ampulheta representada na figura?



Resposta

A ampulheta é formada por dois cones de raio 2 cm e altura 8 cm. Cada um deles tem volume igual a $\frac{\pi 2^2 8}{3} = \frac{32\pi}{3}$ *. Assim, o volume da ampulheta é,* $\frac{64}{3} \neq \text{ cm}^3$ *,ou aproximadamente .*

• • • • •

2. Coloque os sólidos em ordem crescente de volume.

S1: Cilindro: 6 cm de medida de raio e 6 cm de altura.

S2: Cone: 12 cm de medida de raio e 6 cm de altura.

S3: Cone: 6 cm de medida de raio e 12 cm de altura.

Resposta

S3 < S1 < S2

S1: $\pi 6^2.6 = 216\pi \text{ cm}^3$

S2: $\frac{\pi(12)^2\,6}{3}=\frac{\pi 144.6}{3}=288\pi\ \text{cm}^3$

S3: $\frac{\pi(6)^2\,12}{3}=\frac{\pi 36.12}{3}=144\pi\ \text{cm}^3$