

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Qual é a sua área?	de 20 a 25 min.	Em grupos de 4 alunos, com discussão coletiva	Individual
2	Um novo olhar ...	Pirâmides que formam um prisma.	de 20 a 25 min.	Em grupos de 4 alunos, com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Pirâmides equivalentes.	de 15 a 25 min.	Em grupos de 4 alunos, com discussão coletiva	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

APRESENTAÇÃO

No estudo do volume de sólidos geométricos, os alunos decoram fórmulas, muitas vezes, sem saber o significado de tal medida. Nesta dinâmica, vamos trabalhar o volume da pirâmide a partir do conhecimento do volume do prisma e aliar a fórmula do cálculo a essa relação. Embora o Princípio de Cavalieri não seja mencionado, ele é fortemente utilizado na comparação de volumes. Uma das consequências desse princípio é que: “pirâmides com a mesma base e a mesma altura têm o mesmo volume”.

Dessa forma, na primeira etapa, trabalhamos uma atividade que explora áreas de triângulos com a mesma base, cujos vértices relativos às alturas “passeiam” ao longo de um segmento paralelo à base. Já na segunda etapa, são construídas três pirâmides de base triangular, que se compõem em um prisma triangular reto. Finalmente, na terceira etapa, verificamos que as pirâmides construídas na segunda etapa possuem o mesmo volume.

Como sempre, você terá a possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Resposta

As bases de todos os triângulos são congruentes à base cuja medida é b .



3. Cole os quatro triângulos de tal maneira que a base fique sobre a reta que contém a base b do triângulo retângulo.

O que você pode afirmar sobre a altura desses triângulos?

Resposta

A altura de todos os triângulos é igual à altura do triângulo retângulo, cuja medida é h .



4. Indique a área de cada um dos quatro triângulos colados no tabuleiro.

Troque ideias com seus colegas e tente chegar a alguma conclusão sobre a área desses cinco triângulos.

Resposta

Cada um dos quatro triângulos tem área determinada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

E a conclusão é que os cinco triângulos têm áreas iguais.

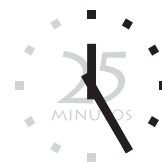


Recursos necessários

- Um tabuleiro e um conjunto com os quatro triângulos disponíveis no anexo que deverão ser reproduzidos e distribuídos para cada um dos grupos formados.
- Encarte do aluno para anotações.
- Tesoura.
- Cola.

SEGUNDA ETAPA

UM NOVO OLHAR...



ATIVIDADE • PIRÂMIDES QUE FORMAM UM PRISMA.

Objetivo

Construir três pirâmides de base triangular e encaixá-las em um prisma de base triangular.

Descrição da atividade

Professor, nesta etapa, os alunos devem montar três pirâmides e um prisma reto de base triangular, utilizando os moldes em anexo. Com os sólidos montados, os alunos deverão encaixar as três pirâmides no prisma, para que percebam que o volume do prisma pode ser obtido ao somarmos o volume de cada uma das três pirâmides montadas. Inicialmente, distribua as planificações aos grupos que devem realizar a atividade descrita a seguir.

1. A partir das planificações recebidas, monte as três pirâmides e o prisma. Repare que o prisma não tem uma de suas bases.

2. Tente encaixar as três pirâmides dentro do prisma.

Dica: Observe quais faces são congruentes. Essas deverão estar em contato.

3. Se as três pirâmides se encaixam perfeitamente no prisma, o que podemos concluir a respeito dos seus volumes?

Resposta

O volume do prisma é igual à soma dos volumes das três pirâmides.



Recursos necessários

- Tesoura e cola.
- Planificações disponíveis no anexo.
- Encarte do aluno para anotações.

Procedimentos Operacionais

- Professor, mantenha a turma organizada como na etapa anterior.

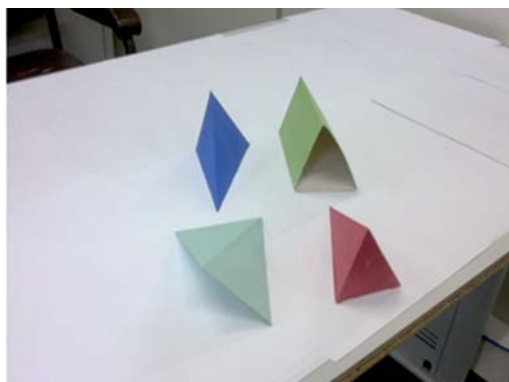


Figura 2: Material produzido a partir das planificações.

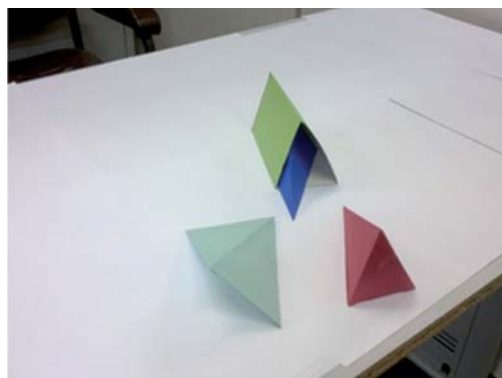


Figura 3: Encaixando a primeira pirâmide no prisma.



Figura 4: Encaixando a segunda pirâmide.

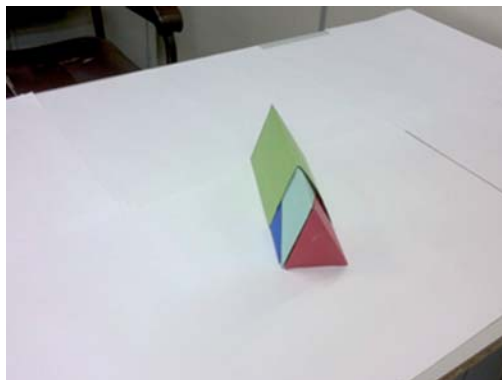


Figura 5: Encaixando a terceira pirâmide.

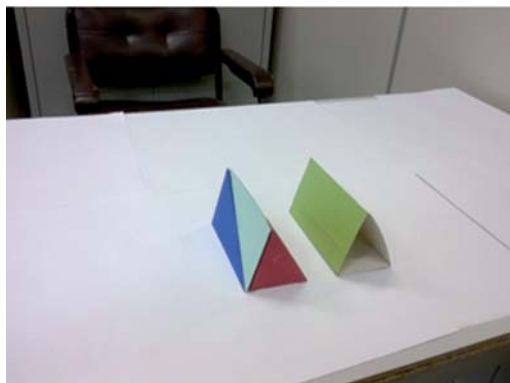


Figura 6: Pirâmides encaixadas com prisma ao lado.

- *No item 3, esperamos que os alunos sejam capazes de concluir que, como o prisma é formado pelas três pirâmides, então, o volume do prisma equivale ao volume das três pirâmides juntas. Caso os alunos tenham dificuldade em concluir ou até mesmo em entender esse fato, use mais exemplos, como a divisão de um litro de suco entre algumas pessoas, ou a repartição de uma barra de chocolate, ou até mesmo retome situações similares a essa com a decomposição de áreas, como trabalhado, por exemplo, na Etapa 2 da dinâmica 7 do segundo bimestre.*

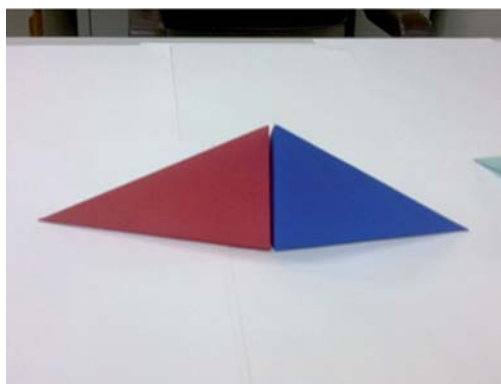


Figura 7: Verificando que as faces 1 e 10 são congruentes.

Para verificar que estas pirâmides possuem alturas iguais, basta colocá-las lado a lado, apoiadas pelas bases 1 e 10, respectivamente.

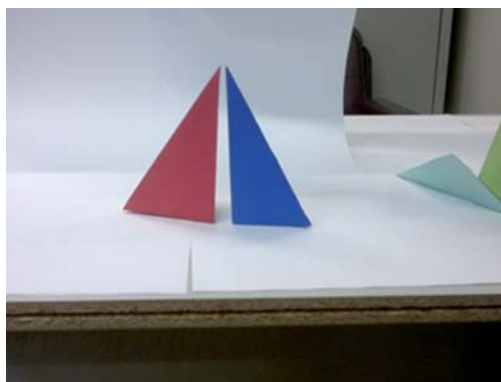


Figura 8: Verificando que as alturas relativas às bases 1 e 10 coincidem.

Como pirâmides de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume, pode-se concluir que a primeira e a terceira pirâmides têm o mesmo volume.



2. Verifique agora que a segunda pirâmide tem o mesmo volume que a terceira.
Registre, nas linhas a seguir, como você fez essa verificação.

Resposta

Para verificar tal fato, basta juntar a face 7 da segunda pirâmide com a 11 da terceira, verificando que as bases são congruentes.

4. O que pode ser concluído sobre o volume do prisma e das três pirâmides?

Resposta

O volume de cada uma das pirâmides é um terço do volume do prisma, uma vez que foi verificado na etapa anterior que as três juntas completam o prisma.



Recursos necessários

- Pirâmides construídas na Etapa 2.
- Encarte do aluno para o registro.

Procedimentos Operacionais

Professor, continue com a turma organizada como nas etapas anteriores.



Intervenção Pedagógica

- *Professor, para realizar esta atividade, os alunos devem compreender, primeiramente, que cada uma das faces pode ser considerada como a base da pirâmide, e que a altura a ser considerada é aquela relativa a essa base. A altura é, então, dada pela distância do vértice oposto ao plano determinado pela face, definida como base. Essa compreensão se faz necessária para as comparações entre as pirâmides. Destaque esse fato, principalmente, na segunda pirâmide, pois esta tem um formato não usual.*
- *No final da atividade, você pode chamar a atenção dos alunos para o fato de que a primeira e a terceira pirâmides possuem base e altura iguais a do prisma, e que seus volumes são iguais a um terço do volume do prisma. Você pode, então, comentar que o volume de uma pirâmide é sempre o terço do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. É importante destacar que a experiência realizada não se trata de uma prova, uma vez que leva em consideração um prisma reto de base particular.*
- *Na Etapa Flex Para Saber +, apresentamos uma generalização desse fato. Não deixe de incentivar os alunos a lerem!*



QUINTA ETAPA

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ



Resposta

A solução do problema se reduz a uma subtração de dois volumes:

- o volume da pirâmide maior (aresta da base mede 6 cm e altura mede 16 cm).
- o volume da pirâmide menor (aresta da base mede 1,5 cm e altura mede $16 \div 4 = 4$ cm).

$$V_{\text{Maior}} = \frac{6^2 \cdot 16}{3} = 192 \text{ cm}^3 \text{ e } V_{\text{Menor}} = \frac{1,5^2 \cdot 4}{3} = 3 \text{ cm}^3 .$$

Logo, para fabricar uma vela, o fabricante passará a gastar $192 \text{ cm}^3 - 3 \text{ cm}^3 = 189 \text{ cm}^3$ de parafina.

Resposta: Alternativa (b).

Erros Possíveis

O aluno que encontrou o item (C) não subtraiu o volume da pirâmide menor. Os itens (A) e (D) são obtidos quando o aluno considera altura de 13 cm ou 18 cm, respectivamente. Chegaria ao resultado da alternativa (E) o aluno que considera a altura 15 cm e não divide o resultado por 3.



ETAPA FLEX

PARA SABER +

VOLUME DE PIRÂMIDES

Nesta dinâmica, tivemos a oportunidade de ver que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do volume de um prisma de mesma base e mesma altura.

Mas será que isso é válido para pirâmides que não tenham a base triangular? Para verificarmos que a fórmula do volume vale para qualquer pirâmide, independente da base, a partir do resultado válido para pirâmides quaisquer de bases triangulares, basta decompor a base de uma pirâmide em triângulos.

Observe o exemplo de uma pirâmide pentagonal, cuja área da base mede S e cuja altura mede h.

ETAPA FLEX

AGORA, É COM VOCÊ!

1. Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo, aproximadamente, 230 metros. Sendo assim, calcule o volume da pirâmide de Quéops em m^3 .



Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Esfinge_y_Keops_por_Gustavo_Gerdel.jpg

Resposta

Área da base: $230 \text{ m} \cdot 230 \text{ m} = 52\,900 \text{ m}^2$

Volume: $\frac{52\,900 \cdot 140}{3} \sim 2\,468\,666,7 \text{ m}^3$



2. Na figura, r e s são paralelas. Analise as afirmativas a seguir:

