Reforço escolar • Matemática •

A Pirâmide e Seus Mistérios

Dinâmica 6

2º Série | 3º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª Série do Ensino Médio	Geométrico	Geometria Espacial: Pirâmides e Cones

DINÂMICA	A pirâmide e seus mistérios.
HABILIDADE BÁSICA	H11 – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.
HABILIDADE PRINCIPAL	H24 – Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas envolvendo o cálculo de área lateral e área total de pirâmides e cones.

Professor

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Quebrando a cabeça.	20 a 30 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
2	Um novo olhar...	Um triângulo na pirâmide.	15 a 20 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Pirâmide de vidro.	20 a 25 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quis	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Professor, nesta dinâmica, apresentamos uma proposta para o estudo de área de pirâmides. Para isso, vamos abordar, na primeira etapa, uma breve revisão sobre o Teorema de Pitágoras. Na segunda etapa, aplicamos o teorema no cálculo do apótema de uma pirâmide regular de base quadrada. E, finalmente, na terceira etapa, os alunos devem experimentar o cálculo da medida da área de uma pirâmide regular de base quadrada e buscar uma reflexão desse cálculo, quando consideramos uma pirâmide regular cuja base é um outro polígono regular.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

30 minutos

Atividade • Quebrando a cabeça.

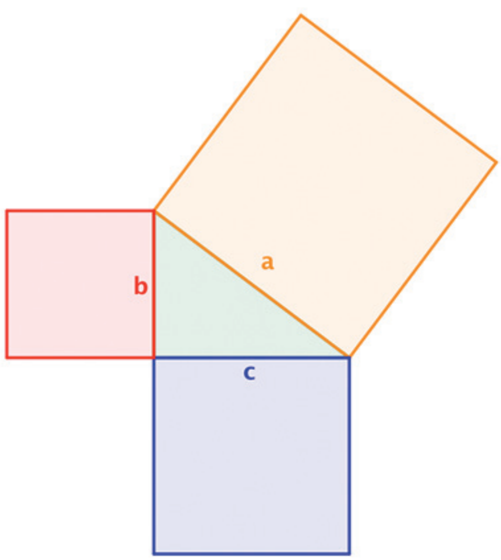
Objetivo

Reconhecer o Teorema de Pitágoras a partir de um quebra-cabeça.

Descrição da atividade:

Professor, nesta etapa, os alunos são desafiados a encontrar a área de quadrados construídos a partir dos lados de um triângulo retângulo e, posteriormente, descobrir uma relação entre as áreas desses quadrados. Para isso, devem primeiro desenvolver o item 1 e então, no item 2, montar o quebra-cabeças em anexo. Acompanhe a proposta a seguir.

Considere o triângulo retângulo a seguir, cuja hipotenusa mede a, o cateto menor, b e o maior, c.



1. Discuta com seus colegas e indique a medida da área de cada quadrado, a partir da medida do seu lado. Organize esses dados na tabela.

QUADRADO	MEDIDA DO LADO	MEDIDA DA ÁREA
Vermelho		
Azul		
Laranja		

Reposta

QUADRADO	MEDIDA DO LADO	MEDIDA DA ÁREA
Vermelho	b	b^2
Azul	c	c^2
Laranja	a	a^2

• • • • •

2. Você e seu grupo receberam de seu professor um tabuleiro e dois pares de quadrados iguais. Recorte esses quadrados a partir das marcações indicadas, obtendo dez peças.

   Você consegue perceber que algumas peças são iguais? Nesse caso, qual a relação entre as suas áreas?

Reposta

Sim, cada peça tem uma "cópia" e, por isso, as suas áreas são iguais.

• • • • •

3. O tabuleiro tem um triângulo retângulo e um quadrado justaposto a cada um dos seus lados.

   As peças recortadas são as peças do quebra-cabeça que você e seus colegas montarão.

   Acompanhe as orientações a seguir.

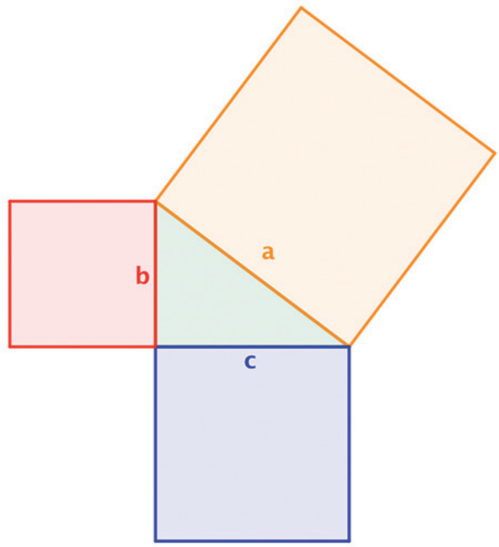
a. Com duas peças de mesma cor, monte um quadrado sobre o quadrado menor.

b. Com três peças de uma outra cor, monte um quadrado sobre o quadrado do outro cateto.

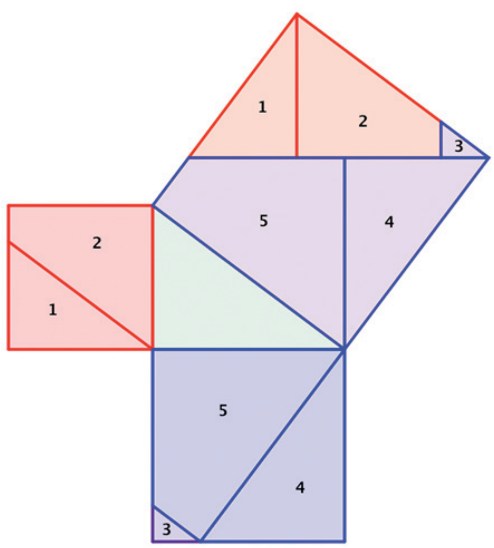
c. Finalmente, com as peças restantes, monte um quadrado sobre o quadrado da hipotenusa.

   Se necessário, vire as peças.

d. Observando o quebra-cabeça montado, faça um esboço, no diagrama a seguir, da maneira como as peças ficaram.



Reposta



• • • • •

4. Agora, escreva uma fórmula que relacione a área desses três quadrados.

Reposta

A fórmula do Teorema de Pitágoras: $a^2=b^2+c^2$.

• • • • •

Matemática

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Tabuleiro e quadrados para recortar, disponíveis no anexo.
- Tesoura, pelo menos uma para cada grupo.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, organize a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.*
- *Distribua para cada grupo um tabuleiro, uma folha com os quadrados para recortar as peças e tesouras.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, no item 1 os alunos devem perceber que as medidas das áreas são os quadrados dos respectivos lados. Acreditamos que eles não encontrem dificuldades, mas, caso seja necessário, retome o cálculo da área de um quadrado, por exemplo, a partir da subdivisão em unidades de área.*
- *No item 2, esperamos que os alunos percebam a igualdade da área entre cada par de peças: isso é imprescindível para que os alunos percebam o teorema. Em outras palavras, eles precisam perceber que o quadrado da hipotenusa é formado por, exatamente, as mesma peças que recobrem os outros dois quadrados.*
- *Geralmente, os alunos não encontram dificuldades para montar os quadrados dos catetos, apenas certifique-se de que eles estejam usando as peças corretas.*
- *Já no caso do quadrado da hipotenusa, a montagem pode não ser tão imediata. É importante que eles movimentem e façam descobertas, contudo, como temos um tempo limitado, caso seja necessário, dê pistas das posições de uma ou duas peças, mas faça isso, apenas depois que eles já tenham tentado. Como dica, colocamos na orientação que eles podem virar a peça, mostre para eles o que isso significa, pois, muitas vezes os alunos acabam tentando encaixar as peças movimentando-as sobre o plano, sem fazer movimentos equivalentes a uma reflexão. É comum que os alunos montem retângulos. Acreditamos que o tabuleiro ajude-os a perceber que, nesse caso, a montagem não equivale a um quadrado; de qualquer maneira a sua supervisão é fundamental!*

- *A resposta que apresentamos não é única, podendo algum grupo apresentar, por exemplo, alguma que seja uma rotação da apresentada, ou uma que troque a peça 4 pelas peças 2 e 3. Não deixe de incentivar e valorizar o pensamento dos seus alunos. Caso soluções distintas apareçam, você pode mostrar para eles que elas são equivalentes.*
- *Por fim, oriente os alunos que tiverem dificuldade em expressar algebricamente o resultado do quebra-cabeça, auxiliando-os a que se remetam ao Teorema de Pitágoras, sinalizando as medidas dos lados do triângulo e o ângulo retângulo.*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

20 MINUTOS

Atividade • Um triângulo na pirâmide.

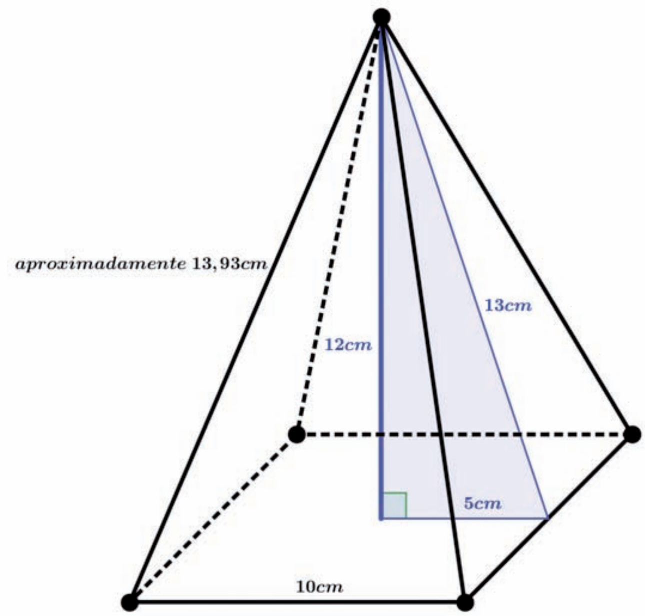
Objetivo

Aplicar o teorema de Pitágoras para calcular a altura da face de uma pirâmide regular (apótema da pirâmide).

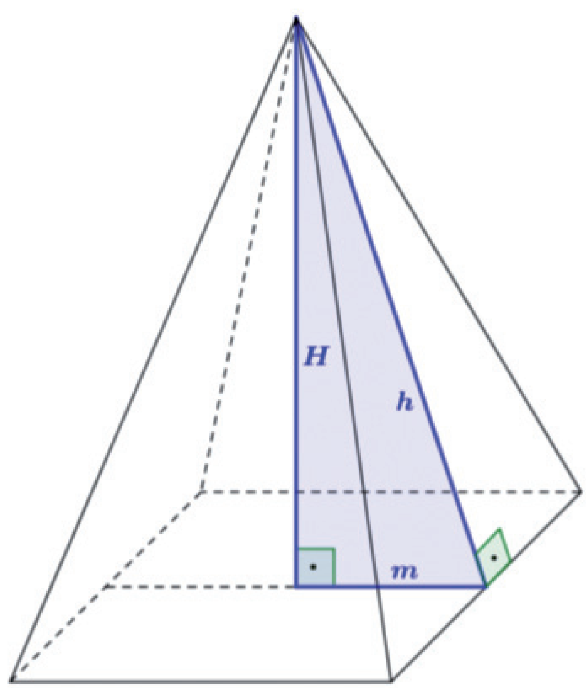
Descrição da atividade:

Professor, para que possam calcular a área total de uma pirâmide regular, os alunos precisam saber calcular as áreas dos triângulos das faces laterais e, para tal, devem saber calcular as alturas desses triângulos,o que geralmente é feito a partir do Teorema de Pitágoras. Nesta etapa, os alunos devem reconhecer o triângulo retângulo, que é formado pela altura da pirâmide regular de base quadrada, a altura da face lateral (o apótema da pirâmide) e o apótema da base. Além disso, eles têm a oportunidade de usar o Teorema de Pitágoras para determinar uma dessas medidas, geralmente o apótema da pirâmide.

Para uma melhor visualização do triângulo, você deve montar uma pirâmide com canudos ou palitos. Aconselhamos a montagem de uma pirâmide, cuja base tem 10 cm de lado e as faces triangulares têm seus lados congruentes medindo, aproximadamente, 13,93 cm. Para fazer os elos você pode usar linha, passando por dentro dos canudos ou jujuba, para fixar os palitos. Construa também um triângulo retângulo com papel, cujos catetos medem 5 cm e 12 cm e a hipotenusa, 13 cm. No cateto de medida 12 cm, coloque um palito ou um canudo para que você possa unir o triângulo ao vértice da pirâmide, permitindo que os alunos vejam o triângulo no interior da pirâmide. Veja, a seguir, uma ideia do modelo a ser construído.



Seu professor mostrou uma pirâmide regular de base quadrada com um triângulo retângulo destacado, como na figura a seguir.



1. Discuta com seus colegas sobre os elementos destacados neste triângulo. Em seguida, relacione a primeira coluna com a segunda.

(I) m	( ) altura da pirâmide;
(II) h	( ) distância do centro ao lado do quadrado da base;
(III) H	( ) altura do triângulo da face lateral.

Resposta

(III), (I) e (II).

• • • • •

2. Como podemos descobrir a altura do triângulo da face lateral de uma pirâmide regular de base quadrada, a partir da altura da pirâmide e da distância do centro ao lado do quadrado da base?

Resposta

Sabendo o valor de m e de H, podemos calcular a distância h pelo Teorema de Pitágoras: $h^2 = m^2 + H^2$.

• • • • •

3. Indique a relação entre o elemento m e o lado do quadrado da base da pirâmide regular de base quadrada.

Resposta

A medida m é igual à metade da medida do lado do quadrado da base.

• • • • •

4. Calcule a altura do triângulo das faces para uma pirâmide regular de base quadrada, cujas medidas do lado da base e da altura da pirâmide são, respectivamente.

a. 12 cm e 8 cm.

Resposta

A altura do triângulo da face mede 10 cm.

• • • • •

b. 10 cm e 10 cm.

Resposta

A altura do triângulo da face mede $5\sqrt{5}$ cm.

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Pirâmide montada com o triângulo indicado, como orientado na descrição da atividade.

Procedimentos Operacionais

- *Mantenha a turma dividida nos grupos da etapa anterior.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, é fundamental que você mostre aos alunos um modelo em três dimensões, como indicamos na descrição da atividade, para que os alunos compreendam a representação em perspectiva, apresentada no encarte. Com isso, caso eles sintam dificuldades em identificar os elementos, no item 1, você pode destacar esses elementos no modelo construído.*
- *No item 2, caso eles sintam dificuldades em identificar o Teorema de Pitágoras, você pode retirar o triângulo do modelo construído e colocar os catetos numa quina de parede. Assim eles podem identificar o triângulo retângulo e, consequentemente, a possibilidade de aplicar o teorema.*
- *Para ajudá-los a resolver o item 3, você pode colocar o triângulo sobre o lado e mostrar que ele cabe duas vezes. Aproveite para sinalizar que essa relação, cujo lado do quadrado é o dobro da distância é específica do quadrado, e não se aplica a triângulos, por exemplo.*
- *No item 4, os alunos devem perceber que o dado é o lado do quadrado e, portanto, para usar o Teorema de Pitágoras, devem dividir essa medida por dois. Acreditamos que os alunos não tenham dificuldades na utilização do teorema, afinal, em ambos os casos, deve-se obter a hipotenusa a partir dos catetos. De qualquer maneira, sugerimos uma atenção maior ao item b, no qual se chega a um quadrado que não é perfeito; caso os alunos tenham dificuldade, retome como se pode obter a raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito.*

- *Repare, professor, que não usamos para os alunos a nomenclatura apótema. Isso não foi feito por acaso. Acreditamos que os alunos devem entender o significado antes de decorar nomes e até mesmo fórmulas. Faça isso em seus encontros e verá o resultado. É claro que o conhecimento dos nomes é imprescindível, sobretudo na resolução de provas, nas quais esses nomes podem aparecer e o seu desconhecimento pode impedir a resolução. Então, trabalhe os conceitos com os alunos e, se achar conveniente, apresente os nomes.*

Terceira Etapa

Fique por dentro!

25 MINUTOS

Atividade • Pirâmide de vidro.

Objetivo

Calcular a área lateral e total de uma pirâmide regular de base quadrada.

Descrição da atividade:

Professor, nesta atividade os alunos devem determinar a área de uma pirâmide regular de base quadrada a partir de sua planificação. A motivação se dá a partir de uma pirâmide construída nos jardins do museu do Louvre, em Paris.

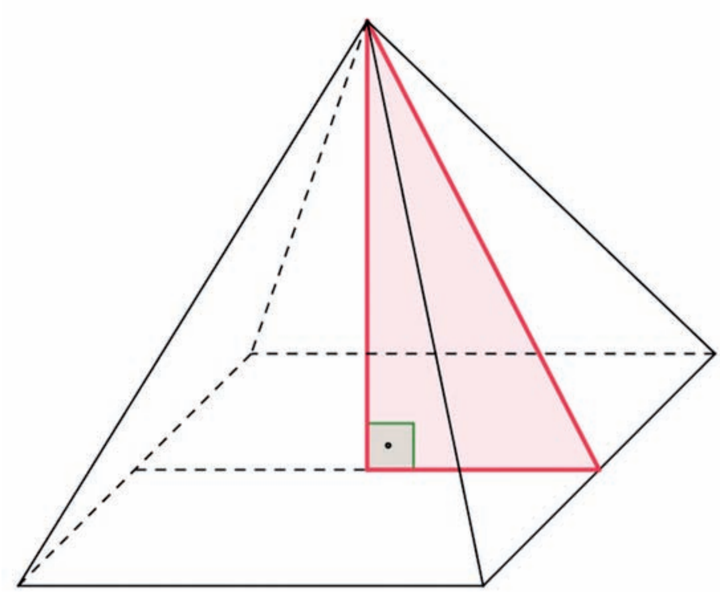
Você já ouviu falar do museu do Louvre, em Paris? Trata-se de um importante museu com obras renomadas, como, por exemplo, a famosa Mona Lisa do pintor italiano Leonardo da Vinci.

Nos jardins do museu do Louvre, encontramos uma pirâmide quadrangular regular, cujas faces laterais são em vidro.

Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Louvre_Pyramid_(5858355011).jpg.

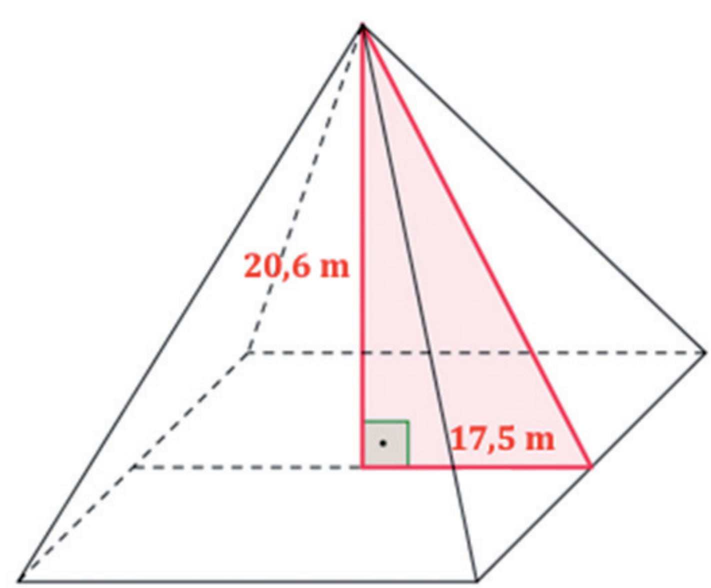
O lado da base dessa pirâmide mede 35 m e a altura da pirâmide mede 20,6 m.

1. Imagine que a figura a seguir seja uma representação da pirâmide do Louvre. Identifique nessa figura as medidas dos catetos do triângulo retângulo destacado.



Professor

Resposta



2. Calcule, agora, a medida aproximada da altura da face lateral dessa pirâmide.

Dica: O valor aproximado de $\sqrt{730,61}$ é 27.

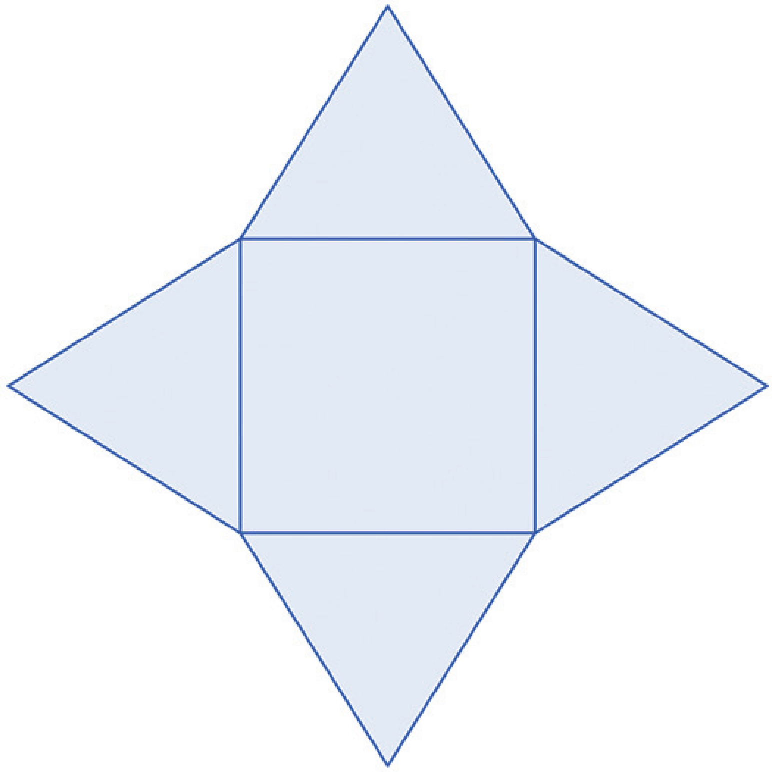
Resposta

$$h^2 = (20,6)^2 + (17,5)^2$$
$$h^2 = 424,36 + 306,25$$
$$h^2 = 730,61$$
$$h = \sqrt{730,61}$$
$$h \cong 27m$$

A altura da face lateral da pirâmide mede, aproximadamente, 27 m.

3. Seu professor entregou uma planificação que corresponde à planificação de uma “miniatura” da pirâmide construída no museu do Louvre.

Recorte-a.

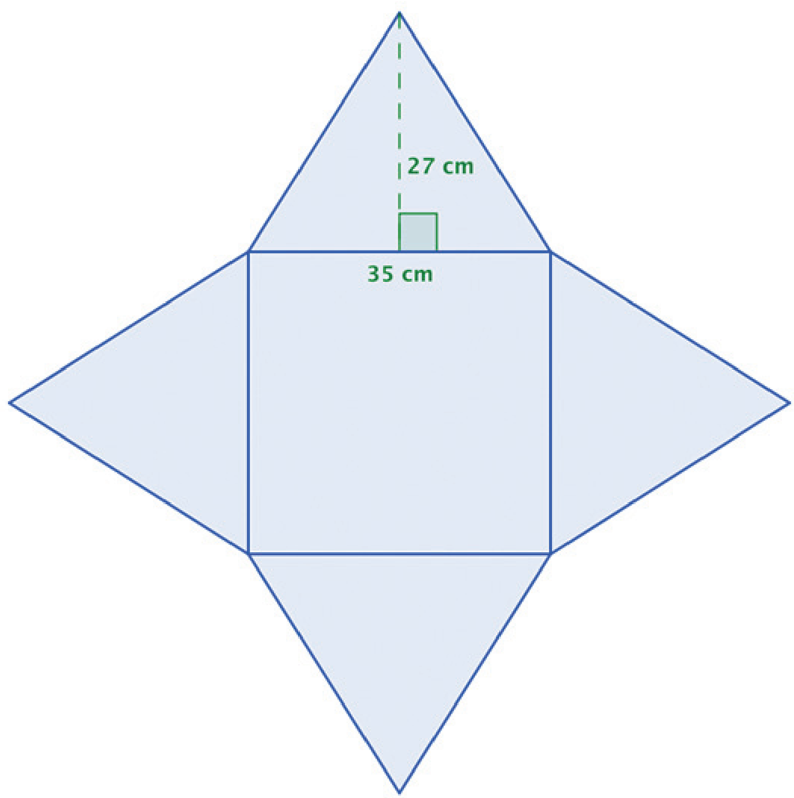


a. Observe que a planificação é formada por um quadrado e quatro triângulos congruentes.

Discuta com seus colegas sobre a possibilidade de representar nessa planificação os três elementos da pirâmide, trabalhados na Etapa 2.

Em seguida, use a planificação acima para indicar a medida do lado da base da pirâmide e a medida obtida no item anterior.

Resposta



• • • • •

b. Calcule a área aproximada de uma face lateral dessa pirâmide.

Resposta

$$A_f = \frac{35 \cdot 27}{2} = 472{,}5m^2$$

• • • • •

Professor

Matemática

c. Sabendo que toda a lateral dessa pirâmide é de vidro, discuta com seus colegas sobre como encontrar a medida da área de vidro utilizada na construção dessa pirâmide.

Depois calcule a medida dessa área.

Resposta

$$A_L = 4 \cdot 472,5 = 1890m^2$$

d. Considere a seguinte situação.

Deseja-se cobrir com vidro todo o chão dessa pirâmide.

Discuta com seus colegas sobre como podemos encontrar a área total da pirâmide, utilizando o resultado do item (c).

Agora, calcule a medida dessa área.

Resposta

$$A_B = 35^2 = 1225m^2$$
$$A_T = 1890 + 1225 = 3115m^2$$

4. Em uma pirâmide regular de base quadrada, para encontrar a área lateral, você pode calcular a área de uma face e multiplicar por 4, ou seja,

$$A_L = 4 \cdot A_f \, .$$

Discuta com seus colegas sobre como encontrar a área lateral, quando consideramos uma pirâmide regular de base hexagonal.

Em seguida, registre como você pode encontrar essa área lateral.

Resposta

Calculamos a área de uma face e, como o polígono da base tem 6 lados e a pirâmide é regular, multiplicamos o resultado por 6, ou seja,

$$A_L = 6 \cdot A_f .$$

5. Em uma pirâmide regular de base quadrada, para encontrar a área total, somamos a área da base e a área lateral, ou seja,

$$A_T = A_L + A_B .$$

Discuta com seus colegas sobre como encontrar a área total de uma pirâmide regular de base hexagonal. Registre as conclusões.

Resposta

Calculamos da mesma maneira: $A_T = A_L + A_B$.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Calculadora.
- Planificação disponível no anexo.
- Tesoura.

Procedimentos Operacionais

- *Mantenha os grupos organizados como na etapa anterior.*
- *Entregue uma planificação da miniatura do museu do Louvre para cada grupo, bem como uma tesoura.*

- *Professor, nas questões 1 e 2, os alunos devem mais uma vez observar o triângulo retângulo trabalhado na Etapa 2 para calcular a altura do triângulo da face lateral. Caso seja necessário, mostre aos alunos que se deve fazer o mesmo que na etapa anterior.*

- *Na questão 3, item (a), buscamos inicialmente trabalhar com a planificação para que, concretamente, os alunos compreendam as medidas no papel. Incentive-os a manipularem o modelo para que percebam que a altura da pirâmide não pode ser representada na planificação. Contudo ela, assim como o apótema da base são essenciais para o cálculo da altura da face lateral, que, por sua vez, é essencial para o cálculo da área lateral. Destaque com eles que podemos utilizar qualquer um dos quatro triângulos para indicar as medidas da base e da altura dos triângulos das faces. Repare que, após a manipulação do material, orientamos que os alunos anotem, na planificação impressa no encarte, as medidas para auxiliar no cálculo. O entendimento da passagem do objeto no espaço para o plano é crucial para o entendimento do cálculo da área, na perspectiva que apresentamos nesta dinâmica. Por isso, certifique-se de que os alunos estejam compreendendo.*

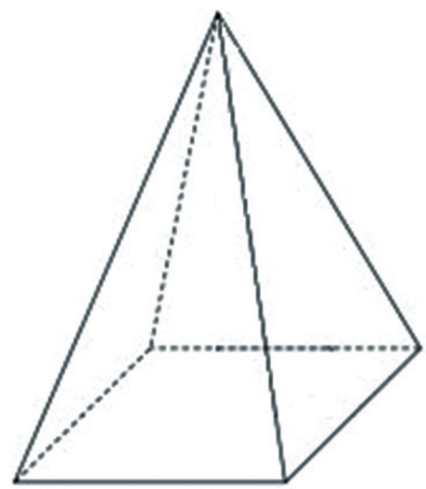
- *Nos cálculos que devem ser realizados nos outros itens da questão 3, aconselhamos a utilização da calculadora para que o foco não recaia no cálculo. Acreditamos que eles não encontrem dificuldades na determinação da área a partir da planificação, contudo, é bom verificar se eles entendem que os 4 triângulos são congruentes e, por isso, basta calcular a área de um e depois multiplicar por 4.*

- *Após a vivência do cálculo de área, acreditamos que os alunos devem pensar de forma geral no cálculo da área de qualquer pirâmide regular. Para tal, nos itens 4 e 5, eles devem perceber que a área lateral depende no número de lados do polígono da base, ao passo que a área total é obtida somando a área da base com a área lateral. Destaque essas ideias durante a discussão coletiva, se possível, discuta com eles o procedimento para uma pirâmide de base triangular, por exemplo. Sinalize também que, se a pirâmide não for regular, a ação de multiplicar a medida da área de uma das faces para achar a medida da área lateral não é válida.*

Quarta Etapa
Quiz

(UFF2000 – adaptada)

A pirâmide reta de base quadrangular, como a da figura, é tal que, as arestas da base medem 4 cm e a altura mede 8 cm.



Dentre as alternativas a seguir, a melhor aproximação da área total dessa pirâmide é:

(Considere $\sqrt{68} \cong 8{,}24$)

a. 32,48 cm^2

b. 65,92 cm^2

c. 16,00 cm^2

d. 81,92 cm^2

e. 32 cm^2

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Resposta

A base é um quadrado. Daí a distância do centro ao lado mede a metade do lado do quadrado, ou seja, m=2 cm. Como já conhecemos a medida m e a medida da altura da pirâmide, H, temos ,então, de determinar a medida da altura de uma face, h. Assim:

Professor

$$h^2 = m^2 + H^2$$
$$h^2 = 2^2 + 8^2$$
$$h^2 = 68$$
$$h = \sqrt{68}$$
$$h \cong 8{,}24$$

A área de uma face lateral, A_f *é dada por* $A_f = \dfrac{l \cdot h}{2}$, *logo* $A_f \cong \dfrac{4 \cdot 8{,}24}{2} = 16{,}48cm^2$.

Como $A_L = 4 \cdot A_f \cong \dfrac{4 \cdot 16{,}48}{2} = 65{,}92cm^2$. *A área da base é* $A_B = 4^2 = 16cm^2$.

Com isso, A área total é: $A_T = A_L + A_B = 65{,}92 + 16 \cong 81{,}92cm^2$.

Portanto, a alternativa correta é a alternativa (d).

Erros Possíveis:

Um possível erro para a alternativa (a) é o esquecimento de multiplicar as áreas dos triângulos da face por 4, fazendo $A_T = 16{,}48 + 16 \cong 32{,}48cm^2$. *O aluno que escolheu a alternativa (b) pode ter calculado, apenas, a área lateral, esquecendo de somar a área da base. O aluno que escolheu a alternativa (c) provavelmente calculou apenas a área da base. Finalmente, o aluno, que optou pela alternativa (e), pode ter simplesmente multiplicado 4 por 8, encontrando 32 cm*^{2}.

● ● ● ● ●

Etapa Flex

Para saber +

Passeando pelo mundo... pirâmides ontem e hoje!!!

As pirâmides existem há tanto tempo! No Egito há mais de 4 mil anos, a construção das pirâmides botou milhares de egípcios para suar, exigiu conhecimentos avançados de Matemática e muitas pedras. Elas são a única das sete maravilhas antigas que resistem ao tempo.

Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:All_Gizah_Pyramids.jpg

Muito embora muitos pensem que pirâmide é coisa do passado, existem muitas pirâmides pelo mundo moderno.

Como você viu na Etapa 3, o badalado museu do Louvre, aquele que abriga a Mona Lisa, tem uma pirâmide grande de base quadrada por onde os visitantes entram no museu. Além dela, existem ainda mais quatro pirâmides, sendo uma delas invertida. A grande pirâmide é uma estrutura de vidro e metal contemporânea que contrasta com a construção clássica do museu. Ela mede 20,6 m de altura sobre uma base quadrada de 35 metros cada lado, possui 603 losangos e 70 triângulos de vidro e metal.

Fonte: http://www.flickr.com/photos/jashonder/1440553612 – John Anthony

O amor é lindo!!! Quem não conhece a história de Romeo e Julieta? Mas, e as pirâmides, você conhece? Romeu e Julieta são as duas pirâmides maiores, construídas no jardim de Oulu, na Finlândia. Romeu mede 16 m de altura e contém plantas de florestas tropicais, como o café e a banana. Já em Julieta, medindo 14 m, encontramos árvores de citrinos e azeitonas.

Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Romeo_Julia_pyramidit_Oulu.jpg

A Pirâmide de Sauerland na Alemanha é um local de exposições, shows e eventos científicos.

Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sauerland-Pyramiden.jpg

Esses são apenas alguns exemplos, mas existem muitas outras pirâmides famosas espalhadas pelo mundo.

Ficou curioso? Visite o site: http://piramidesdomundo.blogspot.com.br/. Lá você encontra alguns vídeos de viagens pelo mundo das pirâmides.

Etapa Flex

Agora, é com você!

1. Dado um triângulo retângulo com catetos medindo 5 cm e 12 cm, respectivamente, quanto mede a hipotenusa de tal triângulo?

Resposta

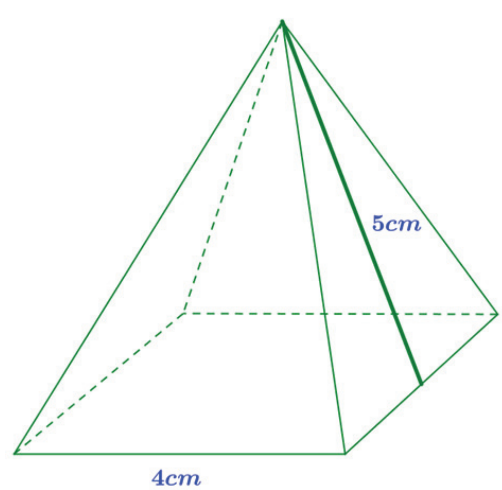
Utilizando o Teorema de Pitágoras, tem-se

$$a^2 = 5^2 + 12^2$$
$$a^2 = 25 + 144$$
$$a^2 = 169$$
$$a = 13cm$$

2. Calcule a área da base, a área lateral e a área total da pirâmide quadrangular regular cuja altura das faces mede 5 cm e o lado da base 4 cm. Faça um esboço dessa pirâmide.

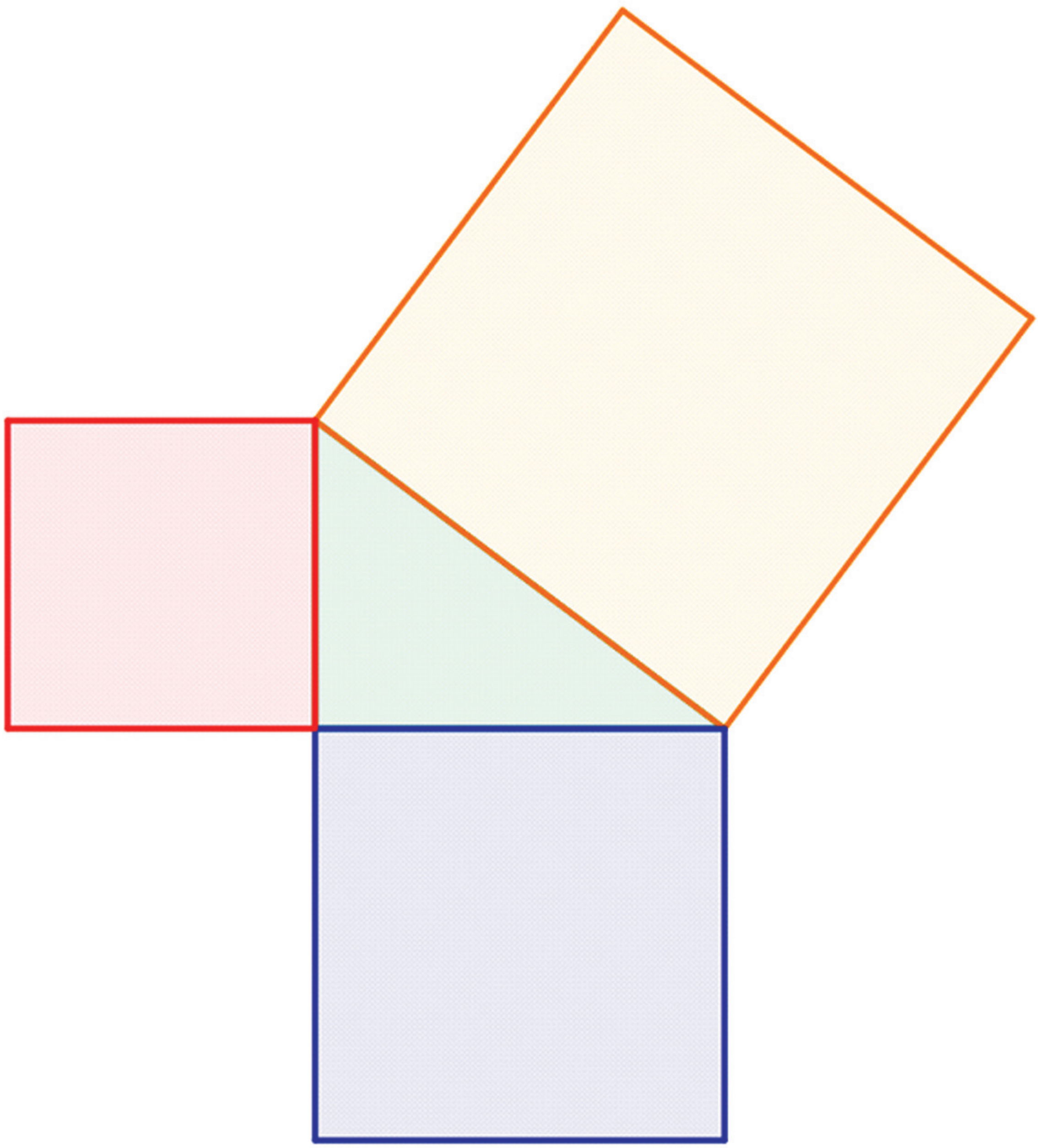
Resposta

$$A_B = 4^2 = 16cm^2$$
$$A_L = 4 \cdot A_f \cong 4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 40cm^2$$
$$A_T = 40 + 16 = 56cm^2$$



Professor

Tabuleiro



Peças para montar o quebra cabeça.