Reforço escolar · Matemática ·

Real ou imaginário?

Dinâmica 1

3º Série | 3º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª Série do Ensino Médio	Algébrico Simbólico	Números Complexos

DINÂMICA	Real ou Imaginário?
HABILIDADE BÁSICA	H48 – Resolver situações-problema envolvendo equação do 2º grau.
HABILIDADE PRINCIPAL	H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar, conceituar a unidade imaginária e calcular suas potências de expoente inteiro.

Professor

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	A calçada da piscina	20 a 25 min.	Em grupos de 3	Individual
2	Um novo olhar...	Superando obstáculos	20 a 30 min.	Nos mesmos grupos, com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Complexos, mas ... não tanto.	15 a 20 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quis	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Esta dinâmica foi elaborada com o intuito de apresentar ao estudante a unidade imaginária, i, como a raiz quadrada de – 1. O foco principal restringiu-se à introdução desta unidade imaginária, ao cálculo de algumas de suas potências com expoente natural e ao cálculo de algumas raízes quadradas de números negativos. Números complexos, na forma a + bi, só aparecem no final, como raízes de uma equação do 2º grau, com discriminante negativo.

Como tema de revisão, foi escolhida a resolução da equação do 2º grau, pois está intimamente ligada à extensão dos números reais aos complexos, possibilitada pela definição da unidade imaginária.

Seguindo a metodologia adotada, você, professor, tem liberdade de administrar os tempos gastos em cada etapa, seguindo as necessidades específicas de sua turma.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • A calçada da piscina

Objetivo

Rever a resolução da equação 2º grau.

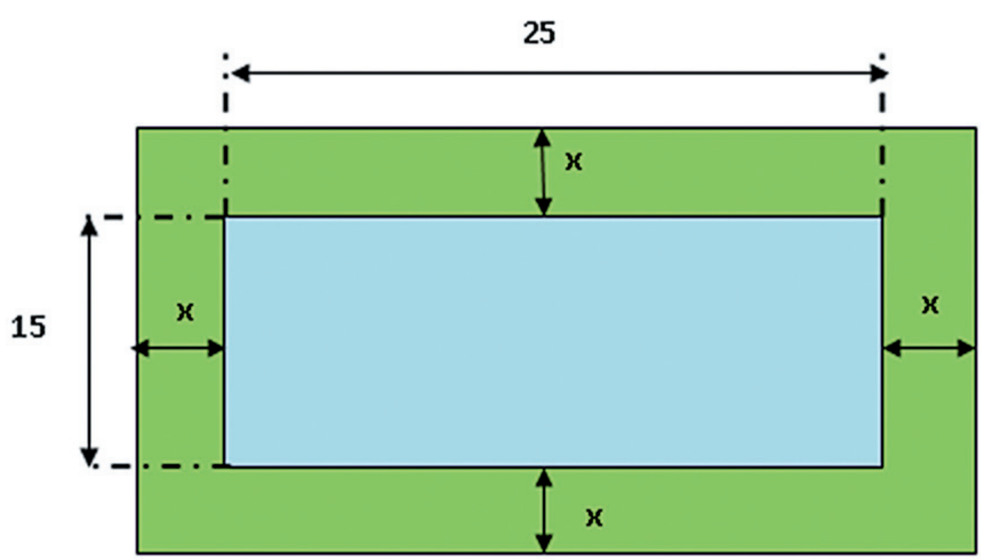
Descrição da atividade

A questão a seguir propõe uma situação envolvendo o cálculo de áreas e que é modelada por uma equação do 2º grau. Sua resolução propicia uma oportunidade para que o aluno recorde o processo de resolução dessa equação.

Você se lembra da equação do 2º grau e de sua resolução? Vamos usá-la aqui.

Questão 1:

Um clube quer construir uma calçada em volta de uma piscina retangular, que mede 25 m por 15 m. A calçada terá sempre a mesma largura que deve ser a maior possível. Porém, não se pode gastar mais do que 500 m^2 de lajotas. Qual deve ser a largura da calçada?



<u>1º passo</u>: A resolução começa por recortar a figura em quadrados e retângulos. A seguir, deve ser feito o cálculo das áreas parciais de cada figura obtida pelo recorte. Sendo x a largura da calçada, observe a figura a seguir e complete a tabela, com o cálculo da área total da calçada:

Resposta

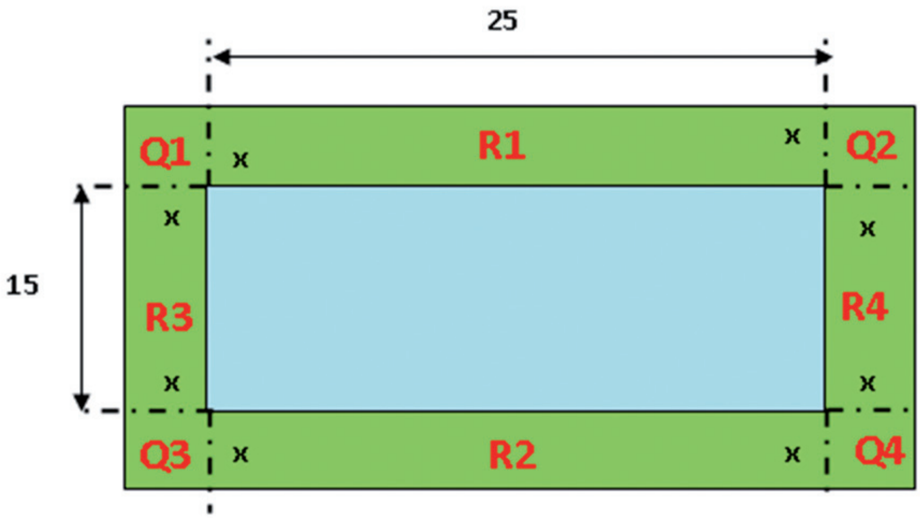
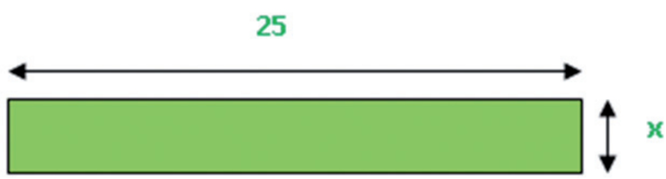
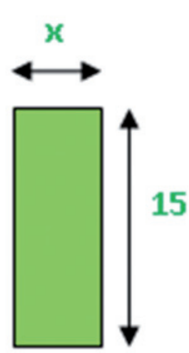
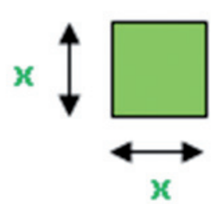


FIGURA		ÁREA
Retângulo maior R1		$25x$
Retângulo maior R2		$25x$
Retângulo menor R3		$15x$
Retângulo menor R4		$15x$
Quadrado Q1		x^2
Quadrado Q2		x^2
Quadrado Q3		x^2
Quadrado Q4		x^2
Total		$4x^2 + 80x$

2º passo: E, agora, igualando essa área ao total da área das lajotas disponíveis, você chega a uma equação. Escreva a equação e determine os coeficientes que vão ser usados na fórmula de resolução (conhecida em alguns textos didáticos como fórmula de Bhaskara).

Resposta

Igualando a área da calçada à área das lajotas disponíveis	$4x^2 + 80x = 500$
Equação do 2º grau com 2º membro igual a zero	$4x^2 + 80x - 500 = 0$
Você pode simplificar esta equação, dividindo todos os coeficientes por 4	$x^2 + 20x - 125 = 0$
a	*1*
b	*20*
c	– 125

• • • • •

3º passo: A solução desta equação pode ser calculada de várias formas mas, nesta dinâmica, interessa-nos usar a fórmula para o tema das etapas seguintes. Tente, então, escrever a fórmula aqui e compare com a "dica" que está no final do seu Encarte:

Resposta

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• • • • •

Matemática

4º passo: Quais são as soluções da equação obtida no 2º passo?

Resposta

$x^2 + 20x - 125 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4x1x(-125)}}{2x1} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 500}}{2} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{-20 \pm 30}{2}$$

Então:

$$x_1 = \frac{-20 + 30}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ e } x_2 = \frac{-20 - 30}{2} = \frac{-50}{2} = -25$$

● ● ● ● ●

5º passo: Qual a solução do problema da calçada?

Resposta

A raiz negativa da equação não pode ser considerada como solução do problema prático. Apenas o valor positivo pode servir como medida da largura de uma calçada que, portanto, poderá ter 5 metros de largura, neste caso.

● ● ● ● ●

Questão 2:

Se a equação encontrada tivesse sido $x^2 + 20x + 125 = 0$, qual teria sido a solução do problema da calçada?

Resposta

Então os coeficientes seriam: $a = 1$, $b = 20$ e $c = 125$ e o discriminante da equação seria: $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 1 \times 125 = 400 - 500 = -100$, que não tem raiz quadrada real.

Neste caso, o problema não teria solução, já que estamos ainda trabalhando no campo dos números reais.

● ● ● ● ●

Professor

Na etapa seguinte, você verá o que foi feito para superar este obstáculo!

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *A proposta é para que os alunos trabalhem esse problema em grupo.*
- *Se não for possível acompanhar o trabalho de todos os grupos durante sua realização, poderá ser feita uma correção coletiva.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Espera-se que os alunos resolvam a equação do 2º grau pela aplicação da fórmula de Bhaskara, supostamente uma velha conhecida e cuja justificativa poderá ser encontrada num link sugerido na Etapa Flex.*
- *Pode ser, porém, que algum aluno prefira procurar as soluções usando as relações da soma S e do produto P das raízes com os coeficientes da equação:* $S = -\frac{b}{a} = -20$ *e* $P = \frac{c}{a} = -125$*. Como, neste caso, as soluções são inteiras, não será difícil encontrar os números 5 e* -25*, pois* $5 + (-25) = -20$ *e* $5 \times (-25) = -125$*.*
- *O uso da fórmula, porém, aplica-se em geral. Além disso, nesta dinâmica, a raiz quadrada do discriminante vai ser a motivação que utilizaremos para a introdução dos números imaginários. Daí, nossa preferência por usar a fórmula pronta nesta etapa.*
- *A questão 2 é uma preparação do terreno para a apresentação da unidade imaginária.*

• • • • •

Segunda Etapa
Um novo olhar...

30 MINUTOS

Atividade • Superando obstáculos.

Objetivo

Apresentar a unidade imaginária.

Descrição da atividade

Por intermédio de questionamentos gerais acerca dos números e suas propriedades, o aluno será levado a recordar a necessidade da extensão dos números naturais aos reais e, daí, aos imaginários, para suplantar obstáculos à realização de operações.

Questões:

1. Quais foram os primeiros números que você conheceu?

Resposta

Resposta pessoal, mas é de se esperar que os alunos citem: 1, 2, 3, etc.

• • • • •

2. Os romanos não consideravam o zero como número, eles não precisavam desse símbolo. Por exemplo, eles escreviam cento e cinco como CV, cento e cinquenta como CD e quinze como XV. No sistema posicional, porém, era preciso distinguir cento e cinco de quinze e de cento e cinquenta. Surgiu, então, a necessidade da criação de um símbolo para o zero. Em 105, 15 e 150, o zero indica qual o valor de 1 e de 5 em cada um desses números. A maioria dos livros chama os números 0, 1, 2, etc. de números naturais e seu conjunto de $\mathbb{N}$. Observe que você pode somar quaisquer dois números naturais e obtém ainda um número natural. Dê alguns exemplos.

Resposta

Resposta pessoal, mas serve qualquer soma do tipo 2 + 3 = 5 ou 0 + 4 = 4.

• • • • •

Professor

3. Qual é a operação inversa da adição?

Resposta

A subtração.

• • • • •

Fonte: http://www.cbat.org.br/competicoes/fundo_pista/galeria.asp

4. **1º obstáculo**: No campo dos números naturais, você pode subtrair quaisquer 2 números? Por exemplo, qual será o número natural resultado de 8 – 5? E de 5 – 8?

Resposta

A resposta é que só é possível subtrair um número menor de um maior, mas não ao contrário: 8 – 5 = 3, mas não há número natural igual a 5 – 8, pois não há número natural que somado a 8 dê 5.

• • • • •

5. O conjunto dos números naturais foi aumentado para superar este obstáculo. Você sabe quais foram os números que resolveram este problema?

Resposta

Foram os números negativos que, junto dos naturais, formam o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, onde 5 – 8 = – 3 .

• • • • •

6. Você pode multiplicar quaisquer dois números inteiros e obter ainda um número inteiro. Por exemplo, quanto é 2 × (– 5)? E quanto é (– 2) × (– 5)?

Resposta

2 × (– 5) = – 10 e (– 2) × (– 5) = 10.

• • • • •

7. Qual a operação inversa da multiplicação?

Resposta

A divisão.

• • • • •

Fonte: http://www.cbat.org.br/competicoes/fundo_pista/galeria.asp

8. **2º obstáculo**: Você pode dividir quaisquer 2 números inteiros? Por exemplo, qual o número inteiro resultado de 8 ÷ 4? E de 8 ÷ 5?

Resposta

Com resultado inteiro, só é possível dividir um número por seus divisores, 8 ÷ 4 = 2 porque 4 é divisor de 8, mas 8 ÷ 5 não é um número inteiro porque 5 não é divisor de 8. Ou seja, não há número inteiro que, multiplicado por 5, dê 8. Espera-se também que o estudante se lembre de que não é possível dividir por 0, mas esse é um obstáculo que permanece, pois o produto de qualquer número por 0 dá 0. Sendo assim, não é possível encontrar um número que multiplicado por 0 dê qualquer número diferente de 0, nem é possível encontrar uma única resposta para o número que multiplicado por 0 dê 0.

• • • • •

9. O conjunto dos números inteiros foi aumentado para superar este obstáculo (sem considerar aqui o obstáculo da divisão por zero). Você sabe quais foram os números que resolveram este problema?

Resposta

Foram os números fracionários que, junto dos inteiros, formam o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, onde $8 \div 5 = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

• • • • •

Observe que, nos números racionais, a divisão é possível, desde que o divisor seja diferente de 0. A divisão por 0 continua não sendo possível com as quatro operações básicas definidas nos conjuntos numéricos que conhecemos até agora..., nem mesmo nos complexos.

Professor

10. A representação decimal de um número racional é uma representação finita (com um número finito de algarismos, com vírgula, ou não) ou uma dízima periódica (um número sem fim de algarismos depois da vírgula que, a partir de certo ponto, passam a se repetir, na mesma ordem, indefinidamente). Que tipo de representação decimal pode existir ainda e como se chamam os números assim representados?

Resposta

São as representações sem fim e sem período. Os algarismos se repetem, mas desordenadamente. Os números assim representados chamam-se irracionais.

• • • • •

11. Qual é o conjunto obtido pelo conjunto dos números racionais, completado pelos números irracionais?

Resposta

O conjunto dos racionais, completado com os irracionais, dá o conjunto $\mathbb{R}$ *dos números reais.*

• • • • •

Fonte: http://www.cbat.org.br/competicoes/fundo_pista/galeria.asp

12. **3º obstáculo**: Uma operação que se pode fazer entre os números reais é elevar ao quadrado. Qual é a operação inversa desta? Quando se pode calcular esta inversa e quando não se pode?

Resposta

A inversa de elevar ao quadrado é a raiz quadrada. Todos os números reais podem ser elevados ao quadrado, mas nem todos têm raiz quadrada. Os números negativos não têm raiz quadrada.

• • • • •

Vamos ver como a Matemática fez para saltar esse obstáculo?

Ela considerou um outro tipo de número: os números imaginários. Para isso, definiu um novo número chamado de unidade imaginária e indicado pela letra i tal que:

$$i^2 = -1$$

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *É importante, como sempre, que os alunos discutam em grupo, mas o tema pode ser explorado também numa discussão coletiva.*
- *As questões podem ser distribuídas entre os grupos e cada uma delas ser respondida por um grupo. Para isso, as questões podem ser agrupadas da seguinte maneira:*
    - *Questões 1 e 2: Os números naturais, incluindo o 0.*
    - *Questões 3, 4 e 5: Os números inteiros, com a introdução dos negativos.*
    - *Questões 6, 7, 8 e 9: Os números racionais.*
    - *Questão 10 e 11: Os irracionais completando os números racionais e assim dando origem aos números reais.*
    - *Questão 12 e introdução do i: A unidade imaginária i.*

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Esta é a etapa mais importante na introdução aos números complexos. Ela pretende mostrar a introdução desses números como um procedimento análogo ao que já foi feito em questões anteriores, com as quais os estudantes já devem estar acostumados: a introdução dos números negativos para tornar possível a subtração em geral e a introdução dos racionais para tornar a divisão em geral possível, com exceção do divisor zero.*
- *Por ora, está sendo introduzida a unidade imaginária. Na próxima etapa, serão considerados os números imaginários puros (como raízes quadradas de números reais negativos). Nesta dinâmica, os números complexos serão citados somente como raiz da equação com discriminante negativo, apresentada na primeira etapa.*

- *A Etapa Flex traz alguns dados históricos sobre a introdução dos números complexos.*

Terceira Etapa

Fique por dentro!

20 MINUTOS

Atividade • Complexos, mas ... não tanto.

Objetivo

Calcular potências da unidade imaginária com expoentes naturais e resolver uma equação com raízes complexas.

Descrição da atividade

Esta é uma atividade em que o aluno vai usar propriedades já conhecidas para potências de bases reais positivas e expoentes naturais estendendo-as para o caso da unidade imaginária. Ao aplicar estas propriedades, o aluno vai poder calcular qualquer potência de base i e expoente natural, além de perceber a existência das raízes quadradas de qualquer número real negativo, que são os números imaginários ou imaginários puros, como são conhecidos.

Eis as questões como serão propostas ao aluno:

A definição da unidade imaginária, i, propicia a construção de um conjunto bem maior de números que estende o conjunto dos números reais. Entre esses números, as operações são definidas de modo que se mantenham grande parte das propriedades que elas possuíam nos números reais. Por exemplo:

Dadas as definições:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^{n+1} = i^n \times i$, se $n \geq 1$, n natural.

Têm-se:

- Se r e s são números inteiros, para a base i valem as propriedades que valiam para bases reais positivas: $i^r \times i^s = i^{r+s}$ e $(i^r)^s = i^{r \times s}$.
- Vale ainda a propriedade que permite o cálculo da raiz quadrada de qualquer número real, mesmo que ele seja negativo:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Usando estas propriedades, você vai conhecer alguns outros números imaginários nas próximas questões:

Questão 1:

Complete a tabela a seguir:

Resposta

$\sqrt{-1}=$	i	$i^2 =$	-1
$\sqrt{-4}=$	$\sqrt{4\times(-1)}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$	$i^3 =$	$i^2 \times i = (-1)\times i = -i$
$\sqrt{4}=$	2	$i^4 =$	$i^2 \times i^2 = (-1)\times(-1) = +1$
$\sqrt{-0,25}=$	$\sqrt{0,25\times(-1)}=\sqrt{0,25}\times\sqrt{-1}=0,5i$	$i^5 =$	$i^4 \times i = 1 \times i = i$
$\sqrt{-100}=$	$10\,i$	$i^6 =$	$i^5 \times i = i \times i = i^2 = -1$
$i^{20} =$	$(i^4)^5 = 1^5 = 1$	$i^{21} =$	$i^{20} \times i^1 = 1 \times i = i$
$i^{30} =$	$i^{28} \times i^2 = (i^4)^7 \times (-1) = 1^7 \times (-1) =$ $= 1 \times (-1) = -1$	$i^{31} =$	$i^{30} \times i^1 = (-1) \times i = -i$
$i^{100} =$	$(i^4)^{25} = 1^{25} = 1$	$i^{102} =$	$i^{100} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

Questão 2:

Como você agora já tem como calcular $\sqrt{-100}$, qual é a solução dada pela fórmula, dita de Bhaskara, da segunda equação da primeira etapa, $x^2 + 20x - 125 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = -100$?

Resposta

Como os coeficientes são: a = 1, b = 20 e c = 125 e o discriminante Δ = – 100, a aplicação da fórmula dá:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{-100}}{2 \times 1} = \frac{-20 \pm 10i}{2} = -10 \pm 5i$$

Os números desta fórmula, com uma parte real (– 10) e uma parte imaginária (+ 5i ou –5i) são chamados números complexos.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *É importante, como sempre, que os alunos discutam em grupo, mas o tema pode ser explorado também em discussão coletiva.*
- *As questões podem ser distribuídas entre os grupos e cada uma delas resolvida na lousa, por um deles.*

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Espera-se que os alunos percebam que os valores das potências da unidade imaginária i vão se repetindo quando os expoentes crescem de 4 em 4 unidades, já que $i^4 = 1$.*

- *Os cálculos que aparecem nesta dinâmica apresentam apenas números reais ou imaginários. Números complexos da forma a + bi surgiram somente ao final, quando foi utilizada a fórmula de resolução da equação do 2º grau com discriminante negativo. Essa introdução gradual tem o objetivo de dar mais tempo ao estudante para amadurecimento dos conceitos.*

• • • • •

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão: (Saerjinho 3º bimestre – 2011– adaptada)

O conjunto solução da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$, com x complexo, é

a. o conjunto vazio.

b. $\{1 + i , 1 - i\}$

c. $\{-1 + i , -1 - i\}$

d. $\{1 + \sqrt{12} , 1 - \sqrt{12}\}$

e. $\{-1 + \sqrt{12} , -1 - \sqrt{12}\}$

Professor

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

Na equação dada, a = 1, b = – 2 e c = 2, então o discriminante será:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4$, cuja raiz quadrada é 2 i.

As raízes serão, portanto, complexas, o que já descarta as opções (a), (d) e (e).

Aplicando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

*E a **opção correta é (b).***

Erros possíveis:

- *O aluno que escolheu a opção (a) provavelmente não levou em conta que o enunciado solicitava a solução no conjunto dos números complexos e, considerando que não existem soluções reais para a equação, optou pela letra (a).*
- *Já o aluno que assinalou a opção (c), provavelmente se equivocou ao considerar o coeficiente b positivo.*
- *A escolha do aluno será a opção (d) caso tenha se equivocado no cálculo de Δ, calculando 4 + 8 ao invés de 4 – 8.*
- *Finalmente, um aluno que tenha errado o sinal de b e o cálculo do Δ, teria chegado à resposta da opção (e).*

Etapa Flex

Para saber +

1. Em:

http://pt.pdfsb.com/readonline/5a56464b6451682b58485a31436e706d56413d3d-1387799

Você encontra um resumo de autoria do Professor Pitombeira (Professor emérito da PUC – Rio) da história da equação do segundo grau, exposto em 38 páginas que percorrem 4 milênios.

2. Em:

http://mathextrema.blogspot.com.br/p/numeros-complexos.html,

Você pode ler que *"Alguns matemáticos europeus, em particular os italianos Girolamo Cardano (1501 – 1576) e Rafaello Bombelli (1526 – 1572), introduziram os números complexos na Álgebra, durante o Século XVI, apesar de considerarem tais raízes "números impossíveis" e, assim, denominá-los "números imaginários". Por esse motivo, até hoje perdura o nome de números imaginários quando nos referimos a raízes quadradas de números negativos."*

René Descartes chamou de imaginários os números que hoje chamamos de complexos, deixando, atualmente, o termo (1596 – 1650) imaginário ou imaginário puro, para as raízes quadradas de números reais negativos (números complexos, com parte real nula).

3. Você pode conhecer mais dados históricos a respeito dos números complexos, consultando o site:

http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_complexos

4. Em

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1282,

Você poderá ouvir a Ópera complexa, cuja sinopse é a seguinte:

O programa apresenta a história dos números complexos. Durante o programa a professora conta a Joãozinho e Sofia como surgiu a ideia dos números complexos e como essa ideia revolucionou a Matemática e dividiu opiniões de grandes matemáticos ao longo da história até chegar *ao conceito que temos hoje.*

5. Quanto às potências da unidade imaginária com expoente natural, vale a pena observar que seu valor está determinado pelo resto da divisão do expoente por 4.

De fato: : $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$, voltando ao valor de i^0.

Então, para k > 4, sejam q e r ,respectivamente, o quociente e o resto da divisão de k por 4: $i^k = i^{4q+r} = i^{4q} \times i^r = (i^4)^q \times i^r = 1^q \times i^r = i^r$, onde $0 \leq r < 4$.

Por exemplo, $i^{2013} = i^1 = i$ porque

$$\begin{array}{r|l} 2013 & 4 \\ \cline{2-2} -20 & 503 \\ \cline{1-1} 0013 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Isto é, 2013 deixa resto 1 quando dividido por 4.

6. Uma prova algébrica da fórmula de Bhaskara como solução da equação do 2º grau você pode encontrar em:

http://www.brasilescola.com/matematica/demonstracao-formula-bhaskara.htm

Agora, é com você!

1. (CEFET-RJ) A equação de 2º grau, com coeficientes reais, que tem uma das raízes igual a 2 + 3i é:

a. $x^2 - 4x + 13 = 0$

b. $x^2 - 2x + 3 = 0$

c. $x^2 + 4x - 9 = 0$

d. $x^2 + 4x + 13 = 0$

e. $x^2 + 2x + 3 = 0$

Para responder a este teste, resolva todas as equações acima, como exercício. A questão pode ser resolvida de outra forma, mas precisa de resultados que nem sempre são focalizados no ensino básico.

Resposta

A opção correta é (a), pois, se a = 1, b = – 4 e c = 13, tem-se:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Conferindo as demais opções:

b. *a = 1, b = – 2 e c = 3, tem-se:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

c. *a = 1, b = 4 e c = – 9, tem-se:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-9)}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{2} =$$
$$= -2 \pm \sqrt{13}$$

d. *a = 1, b = 4 e c = 13, tem-se:*

$$x = 4 \pm \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} =$$
$$= -2 \pm 3i$$

e. *a = 1, b = 2 e c = 3, tem-se:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} =$$
$$= -1 \pm i\sqrt{2}$$

Professor, outro modo de resolver este problema é construir a equação com coeficientes reais que tenha a solução complexa 2 + 3i, partindo dos seguintes fatos:

1º) se uma equação do 2º grau tem coeficientes reais e uma raiz complexa, então a outra raiz é também complexa e é conjugada da primeira raiz.

2º) o conjugado de um número complexo é o número que tem a mesma parte real que o número dado e a parte imaginária é o simétrico da parte imaginária do número dado.

Isto é, se $z = a + bi$, com a e b reais, então o conjugado de z é o número

$\bar{z} = a - bi$.

3º) se um trinômio do 2º grau, $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tem dois zeros x_1 e x_2, então:

$$ax^2 + bx + c = a (x - x_1) (x - x_2),$$

para a, b, c, x, x_1 e x_2 reais ou complexos. Os zeros do trinômio $ax^2 + bx + c$ serão as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Aplicando-se estes fatos ao nosso problema, conclui-se que as raízes da equação são $2 + 3i$ e $2 - 3i$ e que, se $a = 1$ (o que acontece nas 5 opções do problema), o primeiro membro dessa equação deve ser:

$[x - (2 + 3i)] [x - (2 - 3i)] = x^2 - (2 + 3i)x - x(2 - 3i) + (2 + 3i) (2 - 3i) =$

$= x^2 - 2x - 3ix - 2x + 3ix + 22 - (3i)2 = x^2 - 4x + 4 - 9 \times (- 1) = x^2 - 4x + 4 + 9 =$

$= x^2 - 4x + 13$.

Daí, equação procurada era mesmo $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Professor