Reforço escolar · Matemática ·

Quadrados complexos

Dinâmica 2

3º Série | 3º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª Série do Ensino Médio	Algébrico Simbólico	Números Complexos

DINÂMICA	Quadrados complexos
HABILIDADE BÁSICA	Efetuar cálculos com polinômios.
HABILIDADE PRINCIPAL	H36 – Efetuar cálculo, envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.
CURRÍCULO MÍNIMO	Calcular expressões, envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Montando quadrados.	20 a 25 min.	Em grupos de 4 alunos.	Individual
2	Um novo olhar...	Algebra x Geometria	15 a 20 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
3	Fique por dentro!	Desvendando os complexos.	20 a 30 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quis	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Professor

Apresentação

Nesta dinâmica, o aluno vai calcular o quadrado de números complexos, como um exemplo de operações realizadas com estes números escritos em sua forma algébrica.

Pela analogia entre as operações com números complexos e as operações entre binômios, as atividades iniciais focalizam o quadrado da soma e o da diferença de dois termos reais. De início, o desenvolvimento desses quadrados é feito com recursos geométricos, explorando a área de retângulos e quadrados. Num segundo momento, esse desenvolvimento é feito diretamente por via algébrica. Dessa forma, espera-se atingir tanto o aluno que tenha maior sensibilidade para argumentos geométricos quanto aquele que prefere os procedimentos algébricos. De acordo com o estágio da turma nesse tema, você pode dar maior ou menor ênfase a cada uma dessas atividades.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • Montando quadrados

Objetivo

Ilustrar geometricamente o desenvolvimento do quadrado da soma e o da diferença de dois termos.

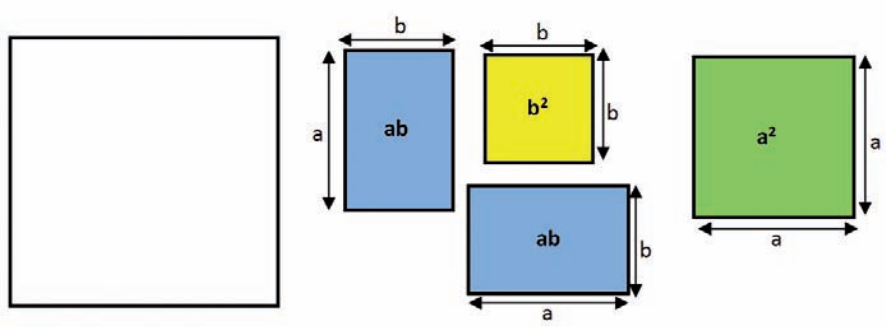
Descrição da atividade

Nesta etapa, cada grupo vai receber alguns quadrados e retângulos, montar um quebra cabeça e verificar identidades algébricas a partir da decomposição das figuras e do cálculo de suas áreas.

Eis as questões como são postas ao aluno:

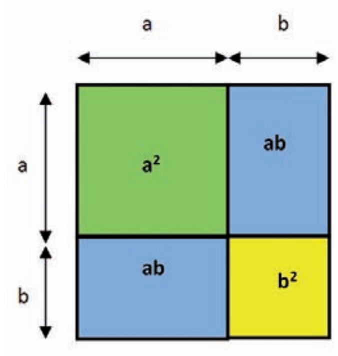
Questão 1

Você e seus colegas de grupo estão recebendo 3 quadrados e 2 retângulos. Tentem cobrir completamente o quadrado maior com as outras peças. A área de cada uma das peças menores está anotada na mesma.



Resposta

A montagem final será:



Seu grupo já conseguiu? Observe que o fato de que os ângulos das figuras são retos (medem 90º) foi essencial para essa justaposição.

Tendo montado o quebra-cabeça, responda:

Qual o lado do quadrado maior?

Resposta

Como os lados são cobertos pela justaposição de um segmento de medida a e outro de medida b, o lado do quadrado maior mede a + b.

Qual a sua área?

Resposta

Como o lado do quadrado maior mede a + b, sua área é $(a + b)^2$.

Verifique que a justaposição das peças menores cobriu completamente o quadrado maior, sem superposições. Você pode, então, escrever que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas das demais peças. Que relação algébrica você obtém quando escreve essa igualdade?

Resposta

Como a área do quadrado maior é $(a+b)^2$ e equivale à soma das áreas das peça menores, vale a seguinte igualdade: $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

• • • • •

Juntando as áreas dos retângulos num só termo, você encontra uma igualdade que é um dos produtos notáveis. Qual é essa igualdade?

Resposta

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

• • • • •

E se, ao invés de uma soma ao quadrado, for uma diferença ao quadrado, o que muda?

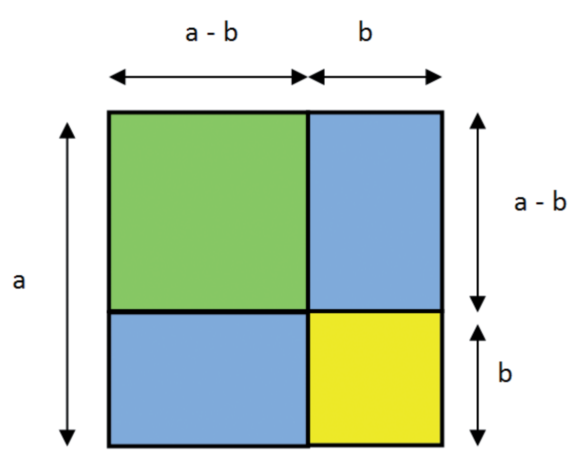
Questão 2:

Você e seus colegas de grupo vão usar agora o verso das mesmas peças e mudar as medidas dos lados dos quadrados para:

a = lado do quadrado maior dentre os 3 quadrados;

b = lado do menor dos 3 quadrados.

Refaça a superposição do quadrado maior com as outras peças. Identifique na figura, as medidas de todos os lados dos quadrados e retângulos envolvidos.



Qual é, então, a medida do lado do quadrado médio?

Resposta

A medida do lado do quadrado médio será, então, a – b, pela justaposição das figuras.

• • • • •

E as medidas dos lados dos retângulos, quais são?

Resposta

Ainda pela justaposição destas figuras, um lado dos retângulos mede também a – b e o outro lado mede b.

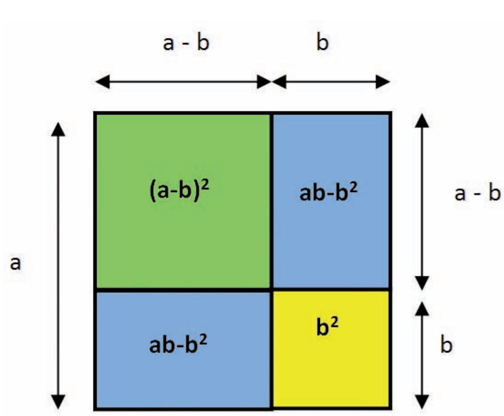
• • • • •

Complete, então, a tabela a seguir com as novas medidas dos lados e da sua área:

Resposta

FIGURA	MEDIDA DO LADO OU DOS LADOS	ÁREA
Quadrado maior	a	a^2
Quadrado médio	$a - b$	$(a - b)^2$
Quadrado menor	b	b^2
Retângulos	$a - b$ e b	$(a - b) \times b = ab - b^2$

A justaposição das figuras terá, então, o seguinte aspecto:



• • • • •

Professor

Para ficar apenas com a área do quadrado de lado (a – b), qual a área das peças que vocês deverão retirar do quadrado inicial de lado a?

Resposta

Devem ser retirados os retângulos de área $(ab - b^2)$ *cada e o quadrado menor de área* b^2.

• • • • •

Faça, algebricamente, a operação que representa a soma das áreas das peças a serem retiradas:

Resposta

$b^2 + ab - b^2 + ab - b^2 = 2ab - b^2$.

• • • • •

A área que sobra após a retirada das peças corresponde à área do quadrado de lado (a – b). Escreva essa igualdade, a partir da decomposição do quadrado maior:

Resposta

$(a - b)^2 = a^2 - (2ab - b^2) = a^2 - 2ab + b^2$.

• • • • •

O que se pode concluir a respeito de $(a - b)^2$?

Resposta

Que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

• • • • •

O que muda, em relação ao desenvolvimento de $(a + b)^2$?

Resposta

O sinal de 2ab, pois o sinal era mais no desenvolvimento de $(a + b)^2$ e passou a ser menos no desenvolvimento de $(a – b)^2$.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Figuras, disponíveis para recorte em anexo, previstas para o máximo de 7 grupos.

Procedimentos Operacionais

- *Os alunos deverão trabalhar em grupos com, no máximo, 4 componentes.*
- *Como sempre o material deve ser recortado com antecedência.*
- *Para confirmação dos resultados, podem ser chamados dois grupos para escrever no quadro o resultado das duas questões.*

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Talvez você tenha que lembrar a algum aluno como se calculam as áreas de quadrados e retângulos. Pode acontecer que algum aluno confunda área com perímetro, o que é um engano frequente.*
- *O tratamento aqui focalizado é essencialmente geométrico, mas, na Questão 2, há um cálculo algébrico em que é usada a propriedade distributiva da multiplicação em relação a uma diferença. É no cálculo da área dos retângulos: $(a – b)\ b = ab – b^2$.*
- *Uma observação séria sobre o uso de figuras para a verificação de igualdades numéricas é que as figuras são sempre aproximações, enquanto os objetos da Matemática podem ser exatos por serem*

abstratos. Neste caso, é possível mostrar que vale a igualdade e não uma aproximação porque os ângulos retos permitem a justaposição exata das figuras abstratas.

- *Uma restrição ao argumento geométrico é que ele se aplica aos casos em que a e b sejam positivos. Na Questão 2, foi ainda importante que $a > b$. Essas restrições vão se mostrar irrelevantes na próxima etapa, em que a verificação dessas igualdades será feita algebricamente.*
- *Há alunos que têm alguma dificuldade para lidar com material concreto. Nessas circunstâncias, o trabalho em grupo serve para compensar dificuldades e preferências, pois é difícil que todos os alunos de um grupo tenham as mesmas.*

• • • • •

Segunda Etapa
Um novo olhar ...

20 MINUTOS

Atividade • Álgebra x Geometria

Objetivo

Calcular algebricamente o desenvolvimento do quadrado da soma e o da diferença de dois termos.

Descrição da atividade

Verificação, agora, por via algébrica das igualdades obtidas na primeira etapa por via geométrica.

Questão 1:

O desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos, a e b, foi obtido com base em raciocínios geométricos, exigindo assim que os números a e b fossem positivos. Será que essa igualdade vale para quaisquer números a e b? Faça o produto algebricamente, isto é, calcule $(a + b) \times (a + b)$ e veja qual o resultado.

Resposta

Como $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ é válida para quaisquer números reais a e b.

• • • • •

Como os termos a e b podem ser substituídos por quaisquer expressões, essa regra é comumente enunciada com palavras, em que a é chamado de primeiro termo e b de segundo termo.

Complete, então, a frase a seguir escolhendo o termo adequado, entre os da lista.

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo**, mais o** dobro **do produto do primeiro termo pelo segundo, mais o** quadrado **do segundo.**

quadrado	primeiro termo	dobro

Questão 2:

O processo geométrico que permitiu o desenvolvimento da expressão $(a-b)^2$ exige que a e b sejam positivos e que $a > b$. Será que esse desenvolvimento é válido para quaisquer valores de a e de b? Faça a verificação por via algébrica, como você fez no caso anterior. Multiplique $(a-b)$ por $(a-b)$ e você vai entender também porque só muda o sinal de 2ab e não o de b^2.

Professor

Resposta

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Vale a pena manter os mesmos grupos, pois, além de ganhar tempo, esta etapa é continuação da anterior.*
- *Talvez seja preciso alguma correção coletiva, mas a correção grupo a grupo, durante a realização da atividade, pode ser mais eficaz.*

Professor:

- *Nesta etapa, a propriedade distributiva é utilizada num contexto um pouco mais complicado do que na anterior. O seu uso na primeira etapa pode servir de degrau para o que precisa ser feito nesta.*
- *É sabido que alguns alunos preferem os argumentos geométricos. Eles querem "ver" o que acontece por trás das fórmulas. Outros, entretanto, só confiam em provas formais, algébricas de preferência. Daí, a vantagem desse tema que aceita ambos os enfoques, embora com alguma restrição no argumento geométrico.*
- *Alguns alunos podem preferir montar o algoritmo análogo ao numérico para fazer as multiplicações:*

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times\ \ a + b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a - b \\ \times\ \ a - b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ -ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Terceira Etapa
Fique por dentro!

Atividade • Desvendando um complexo.

Objetivo

Efetuar cálculos com números complexos na forma algébrica.

Descrição da atividade

A forma algébrica de um número complexo é um binômio, formado por sua parte real e sua parte imaginária. As propriedades das quatro operações são as mesmas, tanto para os reais quanto para os complexos. Sendo assim, as operações entre binômios, estendem-se de maneira natural aos números complexos. Nesta atividade, fica evidente que produtos notáveis, como o quadrado de uma soma ou de uma diferença, podem simplificar também os cálculos com números complexos, respeitando-se o fato de que $i^2 = -1$.

Caro estudante:

Ao trabalharmos com números complexos em sua forma algébrica, as operações entre eles são como operações entre binômios. Portanto, podemos utilizar os produtos notáveis vistos nas etapas anteriores, como o quadrado de uma soma ou de uma diferença. E, atenção para o seguinte fato:

Vamos, então, à Álgebra dos Números Complexos, imitando a álgebra dos binômios e considerando $i^2 = -1$.

Questão 1:

Se um número complexo tem a forma algébrica z = a + bi, seu conjugado complexo será = a – bi. Troca-se apenas o sinal da parte imaginária (a parte onde aparece o i). Por exemplo, o conjugado de 2 + 3i é 2 – 3i.

Relacione corretamente cada número complexo da 1ª coluna da tabela a seguir com seu conjugado na 2ª coluna:

Professor

Resposta

a) 5 + 4i	(*c*) – 2i
	( ) – 2
b) – 1 + i	(*e*) –1 + 2i
	( ) 1 – 2i
c) 2i	(*a*) 5 – 4i
	( ) – 5 + 4i
d) 4 – 3i	( ) – 1000
	( ) – 1000i
e) –1 – 2i	( ) 1 + i
	(*b*) – 1 – i
f) 1000	(*f*) 1000
	(*d*) 4 + 3i
	( ) – 4 + 3i
	( ) – 4 – 3i

Questão 2:

Complete a tabela a seguir, calculando os quadrados de cada um desses números.

Resposta

z	z²
5 + 4i	$5^2 + 2´5´4i + (4i)^2 =$ $= 25 + 40i - 16 = 9 + 40i$
– 1 + i	$(-1)^2 + 2(-1)i + i^2 =$ $= 1 - 2i - 1 = -2i$
2i	$2^2 \times i^2 = 4 \times (-1) = -4$
4 – 3i	$4^2 - 2´4 \times 3i + (3i)^2 =$ $= 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$
–1 – 2i	$(-1)^2 - 2´(-1) \times 2i + (2i)^2 =$ $= 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$
– 1000 i	$-1\,000\,000$

z	z²
– 2i	$(-2)^{2´}\, i^2 = 4´(-1) = -4$
–1 + 2i	$(-1)^2 + 2´(-1) \times 2i + (2i)^2 =$ $= 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$
5 – 4i	$5^2 - 2´5´4i + (4i)^2 =$ $= 25 - 40i - 16 = 9 - 40i$
– 1 – i	$(-1)^2 - 2(-1)i + i^2 =$ $= 1 + 2i - 1 = 2i$
1000	$1\,000\,000$
4 + 3i	$4^2 + 2´4 \times 3i + (3i)^2 =$ $= 16 + 24i - 9 = 7 - 24i$

• • • • •

Qual a relação que você encontrou entre o quadrado de um número complexo e o quadrado do seu conjugado?

Resposta

O quadrado do conjugado de um número complexo é o conjugado do quadrado desse número: ( )^2 = .

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Os alunos podem ficar nos mesmos grupos para poupar tempo e por terem já trabalhado juntos nos pré-requisitos.*
- *Se possível, será bom que grupos sejam chamados para apresentar suas soluções e possa ser feita a comparação entre diferentes desenvolvimentos que, certamente, irão surgir.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Se preciso for, deve ser relembrado aos alunos que:*

1. *A forma algébrica do número complexo z é dada por $z = a + bi$, onde a e b são números reais. Nesse caso, a se diz parte real de z e b sua parte imaginária.*
2. *Todo número real é também complexo. São os números complexos com parte imaginária igual a 0.*
3. *Se um número complexo tem sua parte real igual a zero, ele se diz imaginário puro.*

- *No caso em que a parte real do número complexo é positiva, o aluno certamente irá usar a fórmula para o desenvolvimento do quadrado da soma ou da diferença como foi enunciada nas primeiras etapas. No caso em que a parte real seja negativa, o aluno pode apresentar maior dificuldade. Por exemplo, no cálculo de $(-1 + i)^2$, o cálculo acima foi feito pelo quadrado da soma, em que $a = -1$, mas o aluno pode preferir fazer o cálculo invertendo a ordem e usando o quadrado da diferença:*

  $(-1 + i)^2 = (i - 1)^2 = i^2 - 2i + 1^2 = -1 - 2i + 1 = -2i.$

  E o cálculo de $(-1-2i)$ foi feito pelo quadrado da diferença com $a = -1$, mas poderia ter sido feito levando em conta que o quadrado de z é igual ao quadrado de $-z$ e usando o quadrado da soma:

  $(-1-2i)^2 = (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i.$

Professor

- *Se houver oportunidade, contar que o resultado que o aluno observou sobre o quadrado de um número complexo z e o quadrado do seu conjugado é válido em geral. De fato, se z = a + bi, têm-se:*

  $z^2 = (a^2 – b^2) + 2abi$, $= a – bi$ e $^2 = (a^2 – b^2) – 2abi$

  Então, ^{2} é o conjugado de z^2.

• • • • •

Quarta Etapa
Quiz

Questão (UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais, adaptada.)

O valor que representa o desenvolvimento de $(1 + i)^2$ é

a. 2 + 2i

b. 2i

c. – 2

d. – 2i

e. 0

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Resposta

Resolução:

Desenvolvendo-se o produto notável, teremos

$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i – 1 = 2i$,

correspondente à **opção (b)**.

Erros possíveis:

- *A opção (a) será escolhida por um aluno que, distraidamente, considere 1 para o valor de i^2.*
- *A opção (c) provavelmente seja escolhida ao acaso.*
- *A opção (d) será escolhida por um aluno que confunda os sinais,*

como se fosse o quadrado de uma diferença.

- *E, finalmente, a opção (e) será escolhida por um aluno que desenvolva de modo errado o produto notável, somando os quadrados dos termos e esquecendo-se de somar o dobro do produto deles.*

Etapa Flex

Para saber +

1. O foco nesta dinâmica foi o uso da expressão do quadrado da soma e da diferença no cálculo do quadrado de números complexos. As operações com números complexos em sua forma algébrica, adição, subtração e multiplicação - podem ser feitas, de modo análogo, como se fossem binômios, levando em conta que $i^2 = -1$.

Por exemplo:

$(2 - 3i) + (5 + 2i) = (2 + 5) + (-3 + 2)i = 7 - i$

$(2 - 3i) - (5 + 2i) = (2 - 5) + [-3 - 2]i = -3 - 5i$

$(2 - 3i) \times (5 + 2i) = 2 \times 5 + 2 \times 2i - 3i \times 5 - 3i \times 2i = 10 + 4i - 15i - 6i^2 =$

$= 10 - 11i - 6 \times (-1) = 10 - 11i + 6 = 16 - 11i.$

A divisão já usa um "truque" mais sutil, levando em conta que o produto de z pelo seu conjugado é sempre um número real.

Com efeito:

$(a + bi) \times (a - bi) = a \times a - a \times bi + bi \times a - (bi)^2 = a^2 - abi + abi - (bi)^2$
$= a^2 + b^2$

que é um número real, pois a e b o são.

Então, se w é um número complexo diferente de 0, a divisão de z por w é feita multiplicando-se z e w pelo conjugado de w.

Por exemplo:

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)\times(5-2i)}{(5+2i)\times(5-2i)} = \frac{10-6-4i-15i}{5^2-(2i)^2} = \frac{4-19i}{25-4i^2} = \frac{4-19i}{25+4} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i.$$

Observe neste desenvolvimento que para calcular $(5 + 2i) \times (5 - 2i)$ foi utilizado o produto notável

$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2,$

válido não apenas para números reais como também para números complexos.

Professor

2. Se você quiser saber mais a respeito de números complexos, poderá acessar o site

- **http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/numeroscomplexos.htm**

onde você encontrará uma exposição sobre o assunto. Sua compreensão exige um pouco mais, pois o conteúdo aborda temas que nem sempre são desenvolvidos no Ensino Médio.

3. Em:

- **http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091verao/ma091_ex5.pdf**

você encontrará listas de exercícios sobre polinômios, produtos notáveis, fatoração e equações do 2º grau, com respostas no final.

4. No *link*:

- **http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=511**

você também encontra vários exercícios sobre produtos notáveis e fatoração, com respostas no final.

Agora, é com você!

1. Aplicando corretamente as regras que você reviu nesta dinâmica, calcule os seguintes produtos:

Resposta

a. $(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$

b. $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

c. $(2x + 5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$

d. $(-2 - 5x)^2 = (-1)^2 (2 + 5x)^2 = +(4 + 20x + 25x^2) = 4 + 20x + 25x^2$

e. $(-4z + 7)^2 = (7 - 4z)^2 = 49 - 56z + 16z^2$

• • • • •

2. Lembrando que $x^8 = (x^2)^4$, o valor de $(1 + i)^8$ é:

a. 16

b. – 16

c. 16i

d. – 16i

e. 32

Resposta

Opção a. Observe que $(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = (1 + 2i + i^2)^4 = (1 + 2i - 1)^4 = (2i)^4 = 2^4 . i^4 = 16 \times 1 = 16$.

3. Sabendo que $12^2 = 144$ e $(0,5)^2 = 0,25$, calcule o quadrado de 12,5 e, depois, faça a verificação usando uma calculadora.

Resposta

$12,5^2 = (12 + 0,5)^2 = 12^2 + 2 \times 12 \times 0,5 + 0,5^2 = 144 + 12 + 0,25 = 156,25$.

4. Faça o mesmo, agora, para calcular o quadrado de 111. Desmembre esse número numa soma de dois valores menores, cujos quadrados sejam fáceis de se calcular.

Resposta

$11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 1 + 1^2 = 100 + 20 + 1 = 121$

$111^2 = (100 + 11)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 11 + 11^2 = 10000 + 2200 + 121 = 12321$.

5. A figura a seguir representa a planta baixa de um apartamento quadrado. Determine:

a. a expressão algébrica que representa a área desse apartamento.

b. O valor dessa área, se $x = 5$ e $y = 2{,}5$.

Resposta

a. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

b. $(5 + 2{,}5)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 2{,}5 + 2{,}5^2 = 25 + 25 + 6{,}25 = 56{,}25$ *metros quadrados.*

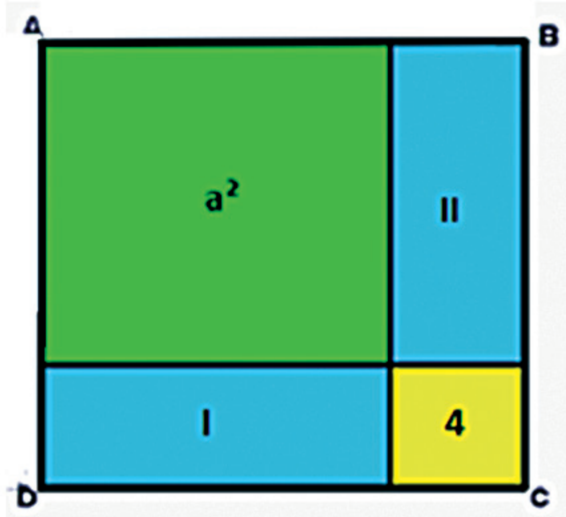
• • • • •

6. Na figura a seguir, que representa o quadrado ABCD, a área do menor quadrado (amarelo) vale 4.

a. Qual é a área do retângulo I?

b. E do retângulo II?

c. E a área do quadrado ABCD?



Resposta

a. *A área do retângulo I é igual a 2a.*

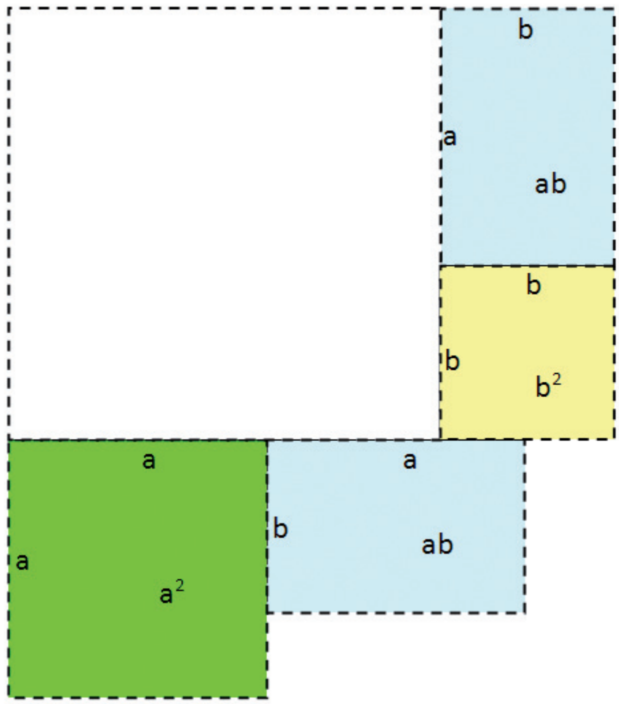
b. *A área do retângulo I é também igual a 2a.*

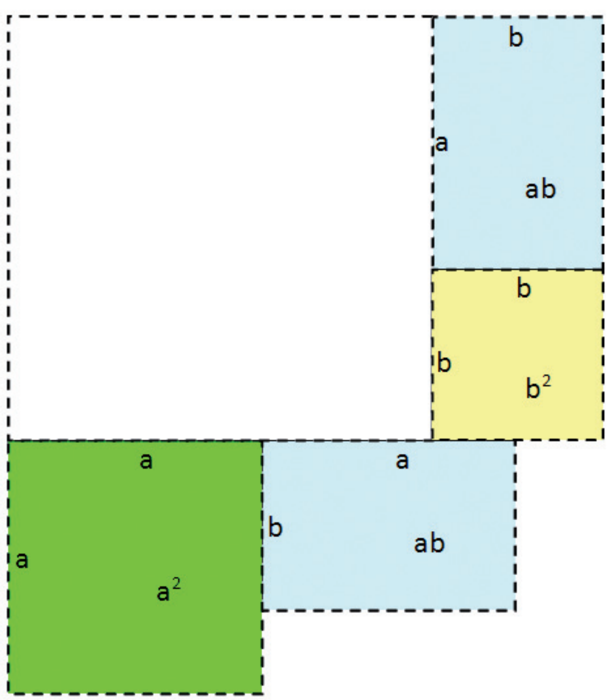
c. *A área total do quadrado I é igual a* $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$.

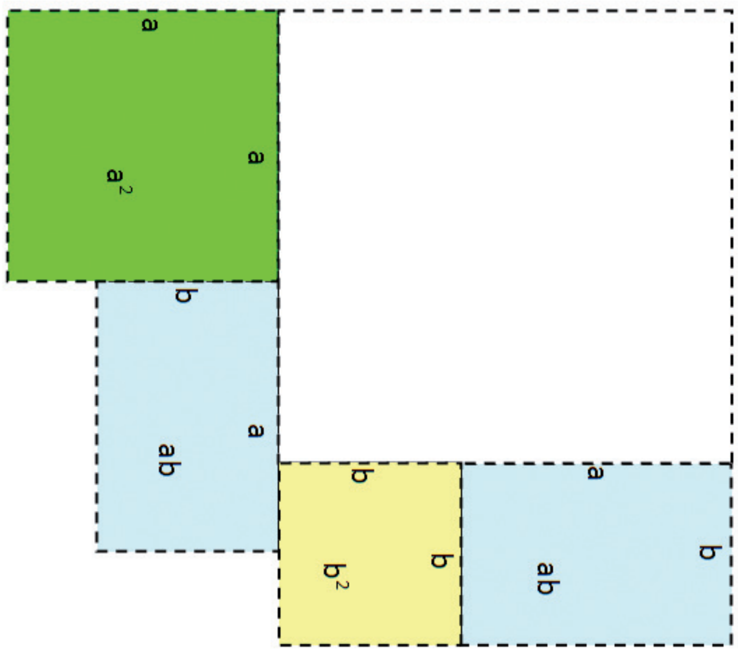
Professor

Anexo:

Para recortar:







Anexo I

Anexo I

Anexo I