Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

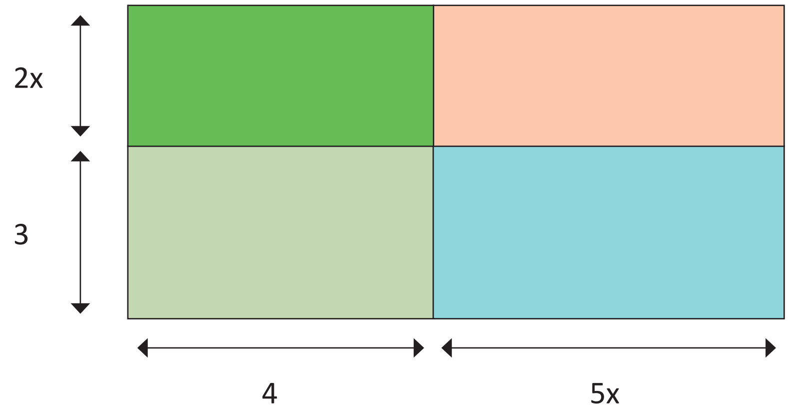
| ETAPAS | | ATIVIDADE | TEMPO | ORGANIZAÇÃO | REGISTRO |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Compartilhar Ideias | Ganhe um Picolé! | de 20 a 25 min | Em 3 ou 6 grupos | Individual |
| **2** | Um novo olhar... | Descubra o mistério! | de 15 a 20 min | Coletiva | Individual |
| **3** | Fique por dentro! | A desconfiança é a sentinela da segurança | de 20 a 30 min | Nos grupos da primeira etapa | Individual |
| **4** | Quiz | Quiz | 10 min | Individual | Individual |
| **5** | Análise das respostas ao Quiz | Análise das respostas ao Quiz | 15 min | Individual | Individual |
| **FLEX** | Para Saber + | Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica.<br>O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula. | | | |
| | Agora, é com você! | Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas. | | | |

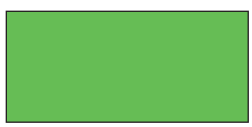
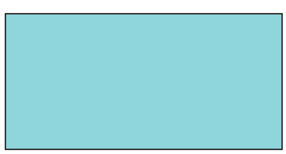
# Apresentação

Esta dinâmica explora a introdução dos números complexos, a partir da impossibilidade de calcular raízes quadradas de números negativos no campo real. Essa exploração é feita no ambiente das equações do 2º grau, com a ajuda de uma vovó desafiadora. A dinâmica prossegue com alguns cálculos com números complexos escritos em sua forma algébrica. As operações tratadas no corpo da dinâmica são a adição, subtração e multiplicação. A primeira etapa prepara o estudante para a multiplicação de complexos, com a revisão da multiplicação de binômios.

A divisão está desenvolvida somente na Etapa Flex, a fim de não sobrecarregar o aluno que não tenha chegado a esse ponto no curso regular.

A distribuição do tempo entre as diversas etapas deixa uma certa margem para melhor adaptação à sua turma.




| FIGURA | COMPRIMENTO | LARGURA | Área |
|---|---|---|---|
|  | 4 | 3 | 12 |
|  | *4* | *2x* | *8x* |
|  | *5x* | *3* | *15x* |
|  | *5x* | *2x* | $10x^2$ |
| Total destas áreas | $12 + 8x + 15x + 10x^2 =$<br>$= 12 + 23x + 10x^2$. | | |
| Retângulo maior | 4 + 5x | 3 + 2x | (4 + 5x) × (3 + 2x) |

E levou para a avó a resposta: $(4 + 5x) \times (3 + 2x) = 12 + 23x + 10x^2$

<u>Zé</u> gosta de fazer contas e preferiu montar uma parecida com o que ele faz para multiplicar números:

Professor

*Professor:*

- *Hoje em dia, os estudantes estão acostumados a lidar com comandos em videogames. Esse fato pode auxiliar o entendimento dos termos algébricos: monômio, binômio, trinômio e polinômio. Os prefixos indicam a quantidade: 1, 2, 3 e vários e nômio, vem de nomos, do grego que tem um significado ligado a conjunto de leis. O monômio $3x^5$, por exemplo, pode ser considerado como o "comando" que, aplicado a um número, eleva esse número à quinta potência e multiplica o resultado por 3. As operações algébricas permitidas são aquelas que podem modificar o comando, mas mantêm os resultados quando aplicados aos mesmos valores das letras. Por exemplo: os comandos $8x + 15x$ e $23x$ levam os mesmos valores de x ao mesmo resultado.*
- *A revisão do produto de dois binômios nesta dinâmica tem o objetivo imediato de preparar o aluno para o produto de números complexos. Daí, a escolha de binômios em que x ocupa a posição da unidade imaginária no número complexo. Daí também a vantagem dos processos algébricos sobre o geométrico.*

## Segunda Etapa

## Um novo olhar...


### Atividade • Descubra o mistério

**Objetivo**

Introduzir números complexos.

**Descrição da atividade**

Esta atividade consiste em levar os alunos a problemas sem solução aparente, fazendo com que reflitam sobre esses problemas.

Acompanhe a continuação da história:

Hugo, Zé e Luísa haviam participado de uma dinâmica do Reforço Escolar em que ficaram conhecendo uma equação do 2º grau que não tinha soluções reais. Eles viram que, com a introdução da unidade imaginária i, ela teria 2 raízes complexas. Fizeram então a seguinte proposta à avó:

**Recursos Necessários:**

- Encarte do Aluno.
- Fichas para eventual sorteio da leitura dos diálogos, disponíveis em anexo.

## Procedimentos operacionais

- *Esta etapa tem um caráter diferente de outras atividades. De certa forma, ela é uma retrospectiva de dinâmica anterior, em que foi introduzida a unidade imaginária e foram apresentados os números complexos nessa resolução que os netos propuseram à avó. A apresentação aqui, porém, é autocontida.*
- *Uma ideia para tornar esta etapa mais interessante será escolher ou sortear alunos que façam os papéis do narrador, dos netos e da avó, enquanto um outro, o escriba, copia os cálculos na lousa.*
- *Embora esta atividade seja melhor desenvolvida coletivamente, é bom que os grupos permaneçam próximos, pois trabalharão em conjunto novamente na terceira etapa.*

## Intervenção pedagógica

*Professor:*

- *Estas primeiras etapas são uma preparação para a introdução das operações algébricas com os números complexos escritos como a + bi, em que a e b são números reais. Esta se diz forma algébrica do número complexo.*
- *O número complexo pode ser escrito também na forma polar ou trigonométrica por meio do seu módulo e um ângulo chamado argumento, mas essa forma não faz parte dos temas do currículo mínimo.*

| x | – 10 + 5 i | – 10 – 5 i |
|---|---|---|
| $x^2$ | (– 10 + 5 i)x( – 10 + 5 i) =<br>$= (-10)^2 + (-10) \times 5\,i + 5\,i \times (-10) + (5i)^2 = 100 - 50\,i - 50\,i + 25\,(i)^2 = 100 - 100\,i - 25 = 75 - 100\,i$<br>Ou:<br>*(se o aluno conhece o produto notável que dá o quadrado de um binômio)*<br>$(-10 + 5\,i)^2 = (-10)^2 + 2 \times (-10) \times 5\,i + (5i)^2 = 100 - 100\,i + 25(i)^2 = 100 - 100\,i - 25 = 75 - 100\,i$ | *(– 10 – 5 i)x( – 10 – 5 i) =*<br>$= (-10)^2 + (-10) \times (-5\,i) + (-5\,i) \times (-10) + (-5i)^2 = 100 + 50\,i + 50\,i + 25\,(i)^2 = 100 + 100\,i - 25 =$<br>$= 75 + 100\,i$<br>*Ou:*<br>*(se o aluno conhece o produto notável que dá o quadrado de um binômio)*<br>$(-10 - 5\,i)^2 = [-(10 + 5\,i)]^2 =$<br>$= (-1)2 \times (10 + 5\,i\,)^2 = 100 + 100\,i + 25(i)^2 = 100 + 100\,i - 25 =$<br>$= 75 + 100\,i$ |
| 20x | $20 \times (-10 + 5\,i) = -200 + 100\,i$ | $20 \times (-10 - 5\,i) = -200 - 100\,i$ |
| $x^2 + 20x + 125$ | $(75 - 100\,i) + (-200 + 100\,i) + 125 =$<br>$= (75 - 200 + 125) + (100\,i - 100\,i) = 0$ | $(75 + 100\,i) + (-200 - 100\,i) + 125 =$<br>$= (75 - 200 + 125) + (100\,i - 100\,i) = 0$ |

**Recursos necessários:**

Encarte do aluno.

## Procedimentos operacionais

- *Os alunos podem voltar a trabalhar nos mesmos grupos e fazer os cálculos no formato escolhido por eles.*
- *A correção poderá ser feita nos próprios grupos ou coletivamente.*

• • • • •

## Intervenção pedagógica

- *Os números complexos têm aplicações em várias áreas, como, por exemplo, na Eletricidade. Essas aplicações, porém estão fora do âmbito do estudo no nível básico. Daí, a escolha da verificação de que esses números satisfazem à equação dada como motivação para a realização de cálculos com números complexos.*

*e a resposta correta é a* **opção (e)**.

*O aluno que souber de cor a parte real e imaginária do produto (o que não é muito difícil de deduzir, levando em conta que $i^2 = -1$) pode usar diretamente a expressão:*

*$(2 - 3\,i) \times (4 + 2\,i) = [2 \times 4 - (-3) \times 2] + [2 \times 2 + (-3) \times 4]\,i = (8 + 6) + (4 - 12)\,i = 14 - 8\,i$*

***Erros possíveis:***

- *A opção (a) é uma escolha errada que pode ocorrer quando os alunos consideram o valor 1 para o quadrado da unidade imaginária ou se esquecem do sinal em $-3$.*
- *A opção (b) é uma escolha errada também muito provável, por ser resultado da troca de $2 - 3\,i$ por $2 + 3\,i$, pois:*

  *$(2 + 3\,i) \times (4 + 2\,i) = 8 + 4\,i + 12\,i + 6\,i^2 = 8 - 6 + 16\,i = 2 + 16\,i$.*
- *O item (c) é uma escolha errada muito provável, que ocorre quando o aluno considera a parte real do produto como sendo o produto das partes reais e o mesmo com as partes imaginárias, a exemplo do que acontece com numeradores e denominadores de frações.*
- *Por fim, o item (d) é um erro menos provável, que pode ocorrer quando o aluno tenta decorar a fórmula, mas troca os sinais e a parte real com a parte imaginária.*

• • • • •

Professor

## Etapa Flex

## Para saber +

1. Esta dinâmica optou por motivar a álgebra dos complexos, explorando esses números como soluções de equações algébricas, mesmo que estas tenham todos os coeficientes reais. Uma outra aplicação que é acessível a esse nível de ensino seria a “tradução” de operações algébricas entre os complexos em movimentos no plano. Essas aplicações decorrem da representação geométrica dos números complexos.

   Os números reais já ocupam toda uma reta numérica. Os números imaginários puros (aqueles com parte real nula) são o produto de um número real pela unidade imaginária i. Ocupam, portanto, uma outra reta, dita reta imaginária.

   Tomadas essas duas retas (a dos números reais e a dos imaginários puros) como eixos num plano, cada número complexo passa a corresponder a um ponto desse plano e, reciprocamente, cada ponto desse plano tem um número complexo que o representa. A representação geométrica dos números complexos é feita, portanto, num plano em que um dos eixos é a reta

2. Para seus alunos, você pode sugerir os sonhos de Hans que explicam bem os números complexos, embora o Hans precise ainda aprender a conjugar os verbos quando usa o tratamento de tu e o verbo na terceira pessoa. O vídeo se encontra em:

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187

Sinopse: O Jovem Hans se depara com as palavras complexo e imaginário e fica muito incomodado, pois, para ele , Matemática deveria ser real, concreta e exata. Resolve dormir e sonha com um personagem estranho, que tem meia barba, usa bermudas e fraque e é uma mistura dos dois personagens do livro O Médico e o monstro o qual representa uma dualidade do mundo. Ao acordar entende que o sonho mostrou um pouco da magia dos números complexos.

3. Em:

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1142,

Você encontra um segundo vídeo sobre os números complexos com o mesmo personagem Hans, um jovem estudante. Hans vai dormir e sonha com outro jovem. Agora é o Morfeu, o deus dos sonhos. Morfeu explica direitinho ao jovem sobre a história dos números complexos, chegando à fórmula de De Moivre.

Professor

## Agora, é com você!

1. Efetue as seguintes operações entre números complexos, escrevendo o resultado na forma algébrica (parte real e parte imaginária):

a. $(2 + 3\ i) + (3 + 2\ i) = (2 + 3) + (3 + 2)\ i = 5 + 5\ i$

a. $(2 + 3\ i) – (3 + 2\ i) = (2 – 3) + (3 – 2)\ i = – 1 + i$

a. $(– 4\ \ – 2\ i) + (3 + 2\ i) = (– 4 + 3) + (–2 + 2)\ i = \ – 1$

a. $(1 + i) \times (1 – i) = (1 + 1) – (1\ \ –\ \ 1)\ i = 2$

a. $(a + b\ i) \times (a – b\ i) = a^2 + b^2 + (\ ab – ab)\ i = a^2 + b^2$

2. Calcule $(3 + 2\ i) \times (\ x + y\ i)$.

Resposta

$(3 + 2\ i) \times (\ x + y\ i) = 3x + 3y\ i + 2x\ i + 2y\ i^2 = (3x – 2y) + (2x + 3y)\ i.$

4. Calcule: $\dfrac{(2+3i)\times(3-2i)}{(3+2i)\times(3-2i)}$, efetuando as multiplicações em primeiro lugar.

Resposta

*$(2 + 3i) \times (3 - 2i) = 6 + 6 + (-4 + 9)i = 12 + 5i$*

*$(3 + 2i) \times (3 - 2i) = 9 + 4 + (-6 + 6)i = 13.$*

*Prosseguindo:* $\dfrac{(2+3i)\times(3-2i)}{(3+2i)\times(3-2i)} = \dfrac{12+5i}{13} = \dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}i.$

*Como as quatro operações entre os números complexos satisfazem às mesmas condições que nos números reais, comparando este resultado com o obtido no exercício anterior, tem-se, novamente:*

$$\frac{2+3i}{3+2i} = \frac{(2+3i)\times(3-2i)}{(3+2i)\times(3-2i)} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i.$$

***Observação:** Este é um procedimento que pode ser usado em geral. Para encontrar o quociente* $\dfrac{a+bi}{c+di}$, *com* $c + di \neq 0$.

*Calcula-se:* $\dfrac{(a+bi)\times(c-di)}{(c+di)\times(c-di)} = \dfrac{(a+bi)\times(c-di)}{c^2+d^2}$ *e, como o denominador é real e diferente de 0 (pois, pelo menos, c ou d deve ser diferente de 0), basta dividir a parte real e a parte imaginária do numerador pelo denominador que se encontram as partes real e imaginária do quociente.*

*Se $z = c + di$, o número obtido pela troca de sinal da parte imaginária de z se chama conjugado de z e se indica por $\overline{z}$: $\overline{z} = c - di$. Note que, então: $z \times \overline{z} = c^2 + d^2$ é sempre um número real e só é 0 quando $c = d = 0$, isto é, $z\overline{z}$ só é igual a 0 se $z = 0$.*

• • • • •

5. Calcule: $\dfrac{3+4i}{1+2i}$ e tire a prova real, fazendo a multiplicação.

Resposta

*Pelo que foi visto, o caminho é calcular*

Professor