

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Quebrando a cabeça.	10 a 15 min.	Em 6 grupos ou menos.	Individual
2	Um novo olhar ...	Ver para crer!	20 a 25 min.	Coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Onde está o tesouro?	25 a 35 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min.	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min.	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

APRESENTAÇÃO

Esta dinâmica tem o objetivo principal de usar e introduzir a expressão para o cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano, em função de suas coordenadas. Sendo essa uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras, o tema de revisão escolhido foi uma prova geométrica desse teorema. Essa prova foi escolhida porque é baseada num quebra-cabeça bem simples, mas se for analisada sob o ponto de vista da justaposição dos ângulos e do cálculo de áreas, ela é completa e geral.

Como nas demais dinâmicas, você, professor, pode administrar a margem de duração que é deixada em cada etapa.

PRIMEIRA ETAPA

COMPARTILHAR IDEIAS

Objetivo:

Rever o Teorema de Pitágoras.



Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Peças do quebra-cabeça para recorte.

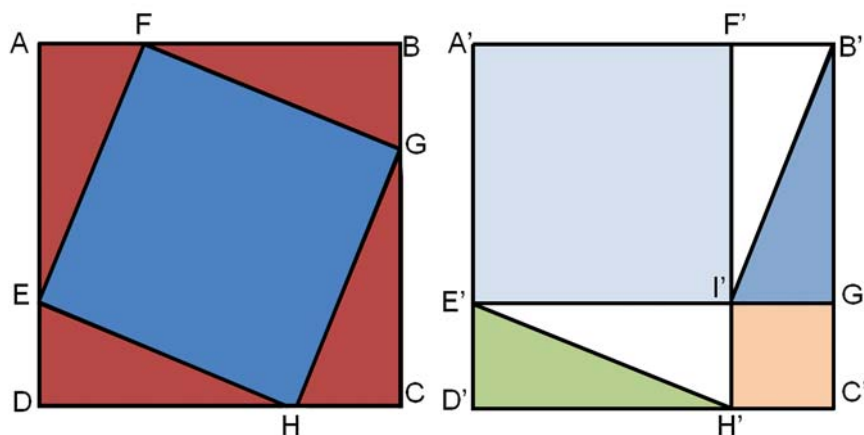
Procedimentos Operacionais

- Como sempre, é importante que o recorte das peças para o quebra-cabeça seja feito com antecedência.
- O número de alunos por grupo pode variar. O cálculo de 6 conjuntos para recorte é feito com base em 25 alunos em sala. O importante é que não fique aluno sozinho, pois o trabalho em grupo enriquece a argumentação e funciona como um filtro que deixa ao professor somente as dúvidas mais sérias, aquelas comuns a todos os alunos do grupo.

Intervenção Pedagógica

Professor:

É importante que os estudantes percebam que, apesar da pouca precisão de figuras e recortes, a justaposição dessas figuras pode ser teoricamente defendida. Com efeito, quando completado o quebra-cabeça:



Vale a pena gastar um pouco do tempo para mostrar que os ângulos em A , B , C , D , A' , C' e D' são todos ângulos retos dos quadrados ou dos triângulos retângulos. O ângulo B' é reto (mede 90°), porque é igual à soma de 2 ângulos agudos complementares, como ângulos de duas cópias do triângulo retângulo dado. Os ângulos em E , F , G , H , E' , F' , G' , H' são ângulos que somam 180° e o ângulo em I' é uma soma de 3 ângulos retos e 2 complementares, totalizando 360° ou ângulo de uma volta.

QUESTÃO 3

Chame de s a área de um dos triângulos retângulos usados no quebra-cabeça e calcule a soma das áreas das figuras justapostas em cada um dos dois quadrados que serviram de base ao quebra-cabeça.

Resposta

Um dos quadrados foi coberto, sem superposições, pelo quadrado de lado a e por 4 triângulos retângulos. Sua área é, portanto igual a:

$$a^2 + 4s.$$

O outro quadrado foi coberto, sem superposições, pelo quadrado de lado b , pelo quadrado de lado c e por 4 triângulos retângulos. Sua área é, portanto igual a:

$$b^2 + c^2 + 4s.$$



QUESTÃO 4

Igualando as duas áreas, qual a conclusão a que você chega em relação aos lados do triângulo retângulo?

Resposta

De $a^2 + 4s = b^2 + c^2 + 4s$, obtém-se, pelo cancelamento de $4s$ nos 2 membros que $a^2 = b^2 + c^2$.



Lembrando que a , b e c são medidas respectivamente da hipotenusa e dos 2 catetos de um triângulo retângulo, esse raciocínio provou que:

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

E esse é o conhecido e famoso Teorema de Pitágoras.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

A Geometria Analítica é uma ponte de duas mãos entre a Álgebra, com seus números e operações, e a Geometria, com suas figuras e gráficos. Ao atribuir números a posições, fica possível fazer cálculos e concluir informações sobre figuras e também observar figuras e gráficos para obter orientações sobre cálculos que devam ser feitos.

Essa é a origem da possibilidade de provocar movimentos por meio de computadores que, depois de muita sofisticação, chega a permitir operações cirúrgicas a distância, efeitos especiais em filmes e, infelizmente também, ataques mortais a quilômetros de distância.

Um primeiro resultado nessa direção é o cálculo da distância entre dois pontos dados por suas coordenadas no plano.

QUESTÃO

Um professor de Matemática levou sua turma para uma excursão nos arredores da cidade. A umas tantas, um estudante, o Bruno, encontrou uma mensagem que dizia:

Procure por aqui uma pedra bem parecida com uma pirâmide e considere a origem do sistema de coordenadas como a projeção no solo do vértice dessa pirâmide. Tome como eixo dos x a direção Oeste – Leste, nesse sentido e como eixo dos y , a direção perpendicular a essa, orientada do Sul para o Norte. A unidade em cada um dos eixos deve ser igual a 1 m. Você vai encontrar um tesouro enterrado no ponto de coordenadas $(0, -d)$, onde d é a distância entre os pontos

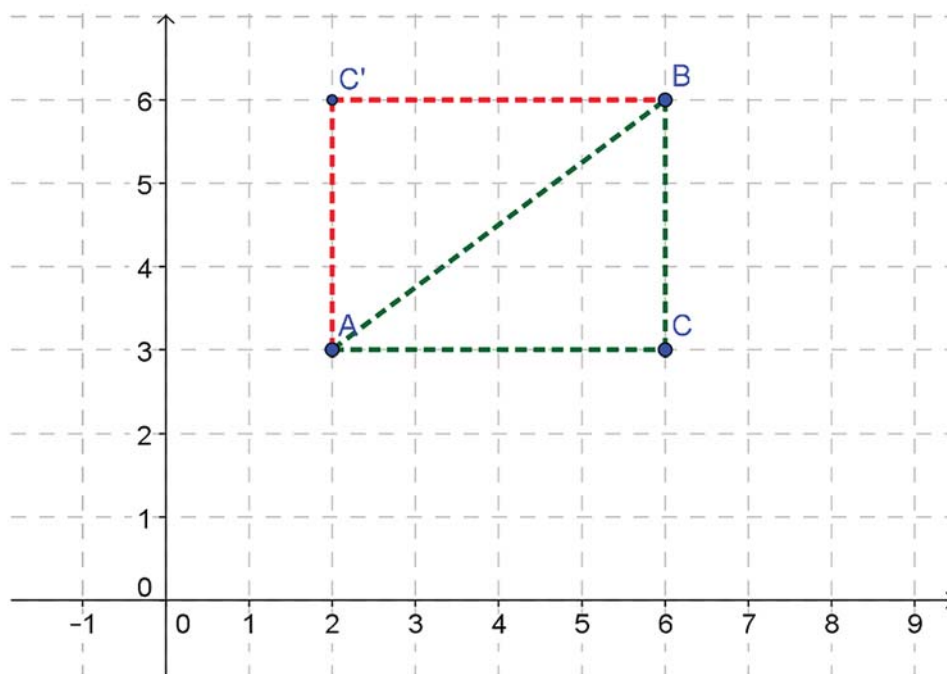
$$A = (2, 3) \text{ e } B = (6, 6).$$

O professor queria voltar para o colégio, mas os alunos queriam procurar o tesouro. Ficaram muito curiosos. O professor fez, então, o seguinte contrato com a turma:

Podemos ficar mais um pouco aqui, mas vocês terão que resolver o problema teoricamente e só depois irão procurar o tesouro. Combinado?

Eles estavam tão curiosos que aceitaram as condições e passaram a fazer os desenhos para estudar o problema da distância entre dois pontos no plano, dados por suas coordenadas.

Você vai acompanhar o raciocínio deles. Começaram por desenhar os pontos citados num sistema de coordenadas, desenhe você também:



Agora, você pode usar o teorema de Pitágoras para calcular a distância de A a B, certo?

Basta completar:

Comprimento de AC	$6 - 2 = 4$
Comprimento de BC	$6 - 3 = 3$
d = Comprimento da hipotenusa AB	$d^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ onde $d = \sqrt{25} = 5$

• • • • •

E os alunos quiseram logo ir procurar o tesouro, mas o professor insistiu:

O trato entre nós é que vocês resolveriam o problema teoricamente, mas o que vocês fizeram até agora foi resolver um problema bem particular. Vocês precisam ainda encontrar a distância entre um ponto $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Esse é o problema teórico que vocês precisam resolver.

Você também vai resolver esse problema. Veja qual foi o desenho que os alunos fizeram para fazer esse cálculo:

donde:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

e, finalmente:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Tendo achado esta fórmula, o professor de Matemática deixou que os alunos fossem ao ponto $(0, -5)$ para cavar em busca do tesouro. Mal retiraram um pouco de terra e encontraram uma caixa de madeira. Abriram a caixa e encontraram um papel dobrado. Ao abri-lo, leram a seguinte expressão:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O professor justificou:

Vocês encontraram o tesouro mesmo antes de cavar. A curiosidade, a busca lógica e a sabedoria são o tesouro que vocês encontraram hoje.

Recursos necessários:

- Encarte do Aluno.
- Muita paciência!

Procedimentos Operacionais

- *Espera-se que os estudantes trabalhem em grupo e que tenham paciência para deduzir a expressão que costuma ser cobrada em provas e testes. Ela nem sempre é deduzida, embora tenha uma explicação simples a partir da figura, no caso em que os pontos estejam no 1º quadrante como foi proposto aqui. Além disso, é uma aplicação importante do teorema de Pitágoras.*
- *Esta etapa tem dois momentos bem distintos. Logo de início, o aluno se depara com um caso particular em que ele aplica diretamente o Teorema de Pitágoras e não a fórmula. No segundo momento, ele faz o mesmo, mas com coordenadas literais.*
- *No caso, porém, em que você considere que essa prova possa ficar como exercício optativo, é possível parar no cálculo numérico proposto para localizar o tesouro e passar diretamente à expressão final encontrada.*



Neste mapa, qual é a melhor aproximação da menor distância, entre São Paulo e Vitória?

- a. 5,2 cm
- b. 6,6 cm
- c. 9,0 cm
- d. 22,5 cm
- e. 45,0 cm

Considere:

$$\sqrt{5} \cong 2,2$$

QUINTA ETAPA

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ

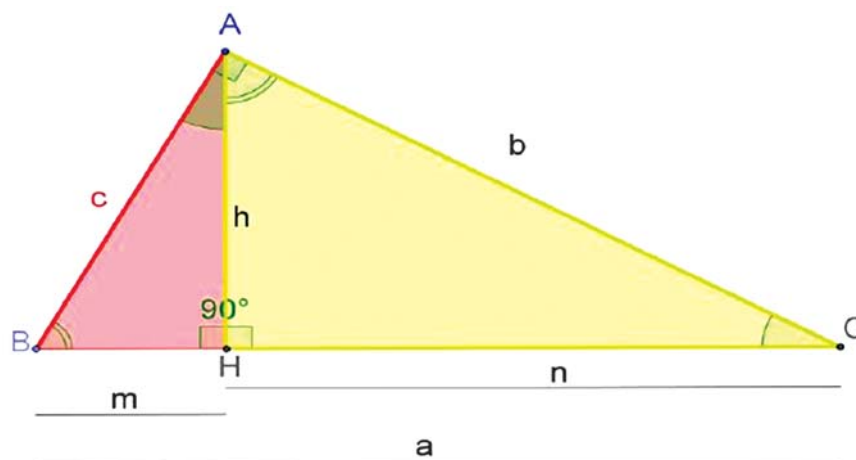


RESOLUÇÃO:

Apesar do enunciado grande, trata-se simplesmente de calcular a distância entre o ponto (6,3) e a origem, (0,0). Esse cálculo pode ser feito pela aplicação direta do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo com vértices em São Paulo, no ponto (6, 0) e em Vitória, ou pela aplicação direta da fórmula que dá a distância entre 2 pontos em termos de suas coordenadas.

Essa distância é igual a: $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{5 \times 9} = 3\sqrt{5} \cong 3 \times 2,2 = 6,6$

e a resposta correta é (b).



De acordo com as notações da figura, chamando de triângulo 1 o triângulo original, BAC, de triângulo 2 o triângulo BHA e de triângulo 3 o triângulo CHA, pode-se mostrar que eles são semelhantes por terem os ângulos iguais. Com efeito, o ângulo em A do triângulo 1 e os ângulos em H dos triângulos 2 e 3 são retos. O ângulo agudo em B é o mesmo no triângulo 1 e no triângulo 2, logo os triângulos 1 e 2 têm 2 ângulos iguais e, portanto, os três ângulos são iguais e eles são semelhantes. Analogamente, o ângulo agudo em C é o mesmo no triângulo 1 e no 3, o que garante a semelhança desses triângulos também.

Dos dados resumidos na tabela a seguir

TRIÂNGULO	HIPOTENUSA	CATETO MAIOR	CATETO MENOR
1	a	b	c
2	c	h	m
3	b	n	h

podem ser extraídas as proporções:

- razão da hipotenusa e cateto menor nos triângulos 1 e 2: $\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$ ou $c^2 = am$;
- razão da hipotenusa e cateto maior nos triângulos 1 e 3: $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$ ou $b^2 = an$.

Somando essas igualdades, tem-se:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a \times a = a^2, \text{ ou seja:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Observe que, na tabela, foi destacado o cateto maior do menor para que seja mantida a ordem no cálculo das razões. Se o triângulo retângulo for isósceles, não há distinção entre os catetos, mas também não há necessidade de estabelecer uma ordem, pois os dois catetos têm, nesse caso, a mesma medida.

- A terna pitagórica mais conhecida é formada pelos naturais consecutivos 3, 4 e 5. Com efeito, um triângulo retângulo com catetos que meçam 3 e 4, tem como hipotenusa:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

- Em

http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ23/pitagoras.html

you can build other brain-teasers related to this theorem. These are virtual.

- Em

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm14/aplicacoes.htm>

you find some applications of the Pythagorean Theorem and the resolution is at a click.

AGORA, É COM VOCÊ!

1. A pirâmide de Keops é uma pirâmide reta de base quadrada. Suas medidas são aproximadamente 140 m de altura e 230 m de aresta da base.



Pergunta-se:

- a. Qual a altura de uma de suas faces?
- b. Qual a distância entre um vértice da base e o centro da base?

(Imagem: http://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&cad=rja&docid=E3112WO9XTdZLM&tbid=-GgfO3yiiB4S7M:&ved=0CAgQjRwwAA&url=http%3A%2F%2Fpt.wikipedia.org%2Fwiki%2FPir%25C3%25A2mide_de_Qu%25C3%25A9ops&ei=VCZoUdX8BozY9ASt0IDIBQ&psig=AFQjCNEfO33BlzUOGwT-U65gmv6Wb5kB4g&ust=1365866452211509)

Resposta

a. “Cortando” a pirâmide por um plano que passa pelo seu vértice e é perpendicular à base, passando pelo ponto médio de uma das arestas da base, tem-se um triângulo retângulo como interseção da pirâmide com esse plano: em que a medida de OV é a altura e a medida de OM é a metade do lado da base da pirâmide. VM é a altura da face triangular que contém o ponto M . O triângulo VOM é retângulo, com ângulo reto em O , daí:

A medida solicitada é do segmento AD. O triângulo ACD é retângulo em C, embora, na figura, o ângulo não seja reto por efeito da perspectiva para desenhar no plano uma figura espacial. A diagonal procurada é a hipotenusa do triângulo ACD, cujos catetos são CD que é uma aresta do cubo e AC que é a diagonal de uma face do cubo. A diagonal AC é também hipotenusa do triângulo ABC, retângulo em B, o que também não é evidente na figura em perspectiva. Os catetos do triângulo ABC são, ambos, arestas do cubo. Aplicando sucessivamente o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC e, depois, ao triângulo ACD, obtém-se:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 7^2 + 7^2 = 98$ (não é preciso calcular sua raiz quadrada, pois é o seu quadrado que vai entrar no próximo cálculo.)

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 98 + 7^2 = 147, \text{ donde } \overline{AD} = \sqrt{147} \cong 12,1.$$



Observe que esses cálculos, quando feitos para um cubo de aresta a, mostram que sua diagonal d medirá: $d = a\sqrt{3}$.

(QUESTÃO 15, SAERJINHO, 3ª SÉRIE, 3º BIMESTRE DE 2011.)

3. Qual é a distância entre os pontos P (10, 40) e Q (40, 10)?
- 30
 - $30\sqrt{2}$
 - 40
 - $40\sqrt{2}$
 - 60

Aplicando diretamente a fórmula para distância, com $x_1 = 10$, $y_1 = 40$ e $x_2 = 40$, $y_2 = 10$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(40 - 10)^2 + (10 - 40)^2} = \sqrt{30^2 + (-30)^2} = \\ &= \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800} = \sqrt{18 \times 100} = 10\sqrt{18} = 10\sqrt{2 \times 3^2} = 30\sqrt{2} \end{aligned}$$

e a alternativa correta é (b).

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 + 5)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

e a alternativa correta é (c).



5. Qual o ponto do eixo x, que dista do ponto P = (1, 2) a mesma distância entre P e Q = (4, 6).

Resposta

A distância d entre P e Q pode ser calculada pela fórmula

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, onde $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $y_2 = 6$. Então:

$$d^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ ou } d = 5.$$

Vamos, agora, procurar o ponto S do eixo x cuja distância a P seja também 5. Se S está no eixo x, sua ordenada é nula. Seja x sua abscissa, então P = (1, 2) e S = (x, 0) e a distância entre esses 2 pontos será também d:

$$d^2 = (x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 1)^2 + 4.$$

Mas $d = 5$, então x deve satisfazer à equação:

$$(x - 1)^2 + 4 = 25 \text{ ou } x^2 - 2x + 1 + 4 - 25 = 0 \text{ ou } x^2 - 2x - 20 = 0$$

onde:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-20)}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 80}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{84}}{2} = 1 \pm \sqrt{21}$$

e são duas as respostas possíveis:

$$x' = 1 + \sqrt{21} \cong 1 + 4,58 = 5,58 \text{ e } x'' = 1 - \sqrt{21} \cong 1 - 4,58 = -3,58$$

De fato, são duas as possibilidades, o que se vê geometricamente: os pontos que estão à distância 5 de P formam uma circunferência de centro P e raio 5. Como a distância de P ao eixo x é igual a 2 (a distância de um ponto ao eixo x é o módulo da ordenada, verifique isso.) e 2 é menor que 5, então essa circunferência corta o eixo x em 2 pontos, exatamente nos pontos $(1 + \sqrt{21}, 0)$ e $(1 - \sqrt{21}, 0)$, o que está esboçado na figura a seguir, em que A $\cong (5,58; 0)$ e B $\cong (1 - 3,58; 0)$.

