Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	O preço do achocolatado.	15 a 20 min.	Em duplas	Individual
2	Um novo olhar...	Uma visita virtual ao Museu Imperial de Petrópolis.	15 a 20 min.	Nas mesmas duplas e conclusão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Um desafio.	25 a 35 min.	Discussão coletiva e cálculo nas mesmas duplas	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quis	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Esta dinâmica apresenta a equação geral de uma reta determinada por dois de seus pontos no plano cartesiano. Esta introdução é feita por meio de atividades que envolvem casos particulares, mas os procedimentos utilizados são os mesmos que seriam aplicáveis ao caso geral. A escolha conveniente da posição dos pontos tem o objetivo de tornar mais evidentes os argumentos que justificam a dedução da equação.

Como tema de revisão é proposta uma questão que envolve proporcionalidade, pois ela está por trás dos argumentos utilizados para a escrita da equação geral da reta. Esse tema foi desenvolvido somente na Primeira Etapa, pois a Segunda já foi utilizada para um caso particular de pontos de uma reta, com coordenadas naturais. Essa opção propiciou uma apresentação da equação da reta em passos menores.

Como sempre, você, professor, dispõe de uma certa folga na administração da duração de cada etapa.

1. Observando as razões que aparecem na tabela, responda:

a. Há alguma marca em que a massa e o preço sejam proporcionais à massa e ao preço da marca A? Em caso afirmativo, qual?

Resposta

Na marca B, tanto a massa quanto o preço são 1,6 vezes a massa e o preço da marca A, massa e preço da marca B são, portanto, proporcionais à massa e ao preço da marca A.

b. Qual a marca em que a razão entre as massas é maior do que a razão entre os preços?

Resposta

Na marca C, a massa é o dobro da massa da marca A, mas o preço é só 1, 8 vezes o preço da marca A.

c. Você acha que o menor preço é aquele em que a razão entre as massas é maior do que a razão entre os preços ou aquele em que a razão entre as massas é menor do que a razão entre os preços?

Resposta

Se a razão entre as massas é maior do que a razão entre os preços, você está pagando menos pela unidade de massa.

2. Então, qual a marca que propõe o menor preço?

Resposta

A marca C, pelo argumento exposto no item c da questão anterior.

Recursos necessários

- Encarte do Aluno.
- Calculadora, se possível, para facilitar os cálculos.

Procedimentos Operacionais

- *Espera-se que os alunos trabalhem em duplas e, se o número de alunos for ímpar, é importante que haja um trio, a fim de que nenhum deles fique sozinho.*
- *Se houver necessidade de alguma correção, ela pode ser feita coletivamente ou mesmo nas duplas.*
- *O uso da calculadora pode facilitar o trabalho que pretende focalizar a ideia de proporcionalidade e não a dos cálculos. Mesmo que não estejam disponíveis, há poucos cálculos a completar, pela mesma razão: a ênfase das questões está na proporcionalidade como igualdade de razões e não nos cálculos em si.*

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Muitos alunos têm sua maneira própria de resolver esses problemas e tirar suas conclusões, o importante é que cada um explore a sua maneira de analisar as questões propostas.*
- *A resolução da atividade está bastante dirigida com o intuito de focalizar razões que respondam às questões, mas o importante é analisar a proporcionalidade e a falta dela, nos dados colhidos no supermercado.*
- *Se possível e necessário, depois da resolução da atividade, generalize a definição de proporcionalidade como igualdade de razões. Duas grandezas que dependam uma da outra se dizem proporcionais, se multiplicado o valor de uma por um número real diferente de 0, o valor correspondente da outra fica também multiplicado por esse mesmo valor. Como a divisão é a operação inversa da multiplicação, duas grandezas se dizem proporcionais se o quociente entre valores correspondentes (diferentes de 0) é sempre o mesmo (é constante).*
- *Se chegar a essa definição, vale a pena lembrar que um outro nome para quociente de 2 números é a razão entre eles. E que, no caso de grandezas proporcionais, o que se obtém, dados os valores cor-*

Segunda Etapa

Um novo olhar ...

20 MINUTOS

Atividade • Uma visita virtual ao Museu Imperial de Petrópolis

Objetivo

Apresentar a equação geral de uma reta.

Descrição da atividade

Usando um problema de distribuição de estudantes em laboratórios com 4 e 5 lugares, o aluno deve chegar à equação geral de uma reta no plano. Continuando o contexto da professora de História, essa distribuição será feita para uma visita virtual ao Museu Imperial de Petrópolis (**http://www.museuimperial.gov.br/visita-interativa.html**).

Questão

Em agradecimento à festa de aniversário que a turma preparou para a professora de História, ela quis levar seus alunos a uma visita virtual ao Museu Imperial de Petrópolis. Para isso, ela dispõe de 2 salas na biblioteca com computadores conectados à internet. Numa delas há 2 computadores e na outra há 3. Ela foi procurar o professor de Matemática para saber quantas reservas ela deveria fazer de cada uma das salas para levar seus 36 alunos, ocupando todos os computadores, cada aluno num deles. O professor de Matemática lhe disse que isso os próprios alunos poderiam resolver. Ele sugeriu chamar de X a sala com 2 computadores e de Y a sala com 3 computadores.

Ele apresentou à professora a tabela a seguir e sugeriu que os alunos montassem a equação:

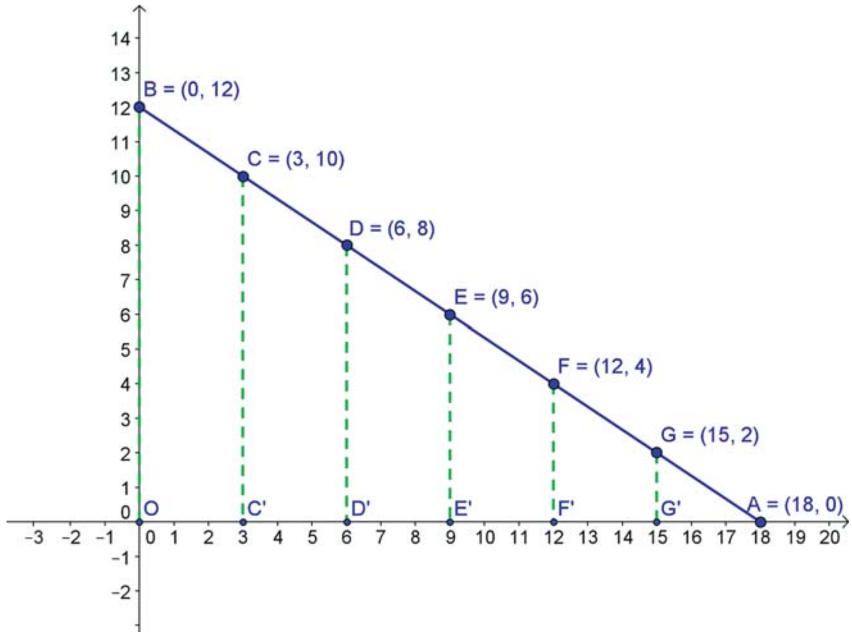
SALA	NÚMERO DE RESERVAS	NÚMERO DE ALUNOS ATENDIDOS
X, com 2 computadores	x	2x
Y, com 3 computadores	y	3y
Total		2x + 3y

Qual é a equação que o professor de Matemática espera que os alunos escrevam?

Resposta

$2x + 3y = 36$.

Professor



Considere todos os ângulos com vértice em A que os segmentos AB, AC, AD, AE, AF e AG fazem com o eixo x. São ângulos agudos, pois são ângulos de triângulos retângulos. Calcule suas tangentes. Você lembra que a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo se calcula como $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$?

Então preencha a tabela a seguir, onde C', D', E', F' e G', são as projeções sobre o eixo x dos pontos C, D, E, F e G, respectivamente e O é a origem do sistema de coordenadas:

Professor

Resposta

ÂNGULO	TRIÂNGULO RETÂNGULO	CATETO OPOSTO	CATETO ADJACENTE	TANGENTE DO ÂNGULO
$\widehat{OAB}$	AOB	12	18	$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
$\widehat{C'AC}$	AC'C	*10*	15	$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
$\widehat{D'AD}$	AD'D	8	*12*	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
$\widehat{E'AE}$	AE'E	*6*	9	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
$\widehat{F'AF}$	AF'F	4	*6*	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$\widehat{G'AG}$	AG'G	*2*	3	$\frac{2}{3}$

Em geral, dados números reais a, b, c, com, pelo menos a ou b diferente de 0, a equação

$$ax + by + c = 0,$$

diz-se **equação geral de uma reta**, pois todos os pontos desta reta têm coordenadas que satisfazem a esta relação e só coordenadas de pontos desta reta é que satisfazem a esta relação.

Se você está interessado em conhecer estas demonstrações, converse sobre isso com seu professor.

Recursos necessários

- Encarte do aluno.
- Régua.

Procedimentos Operacionais

- *Espera-se que os estudantes trabalhem em grupos a resolução do problema proposto pela professora de História, procurando e analisando as soluções com números naturais. A passagem para números reais quaisquer é só anunciada e um esboço da demonstração está na Etapa Flex deste Encarte.*
- *É importante que seja feita a leitura da conclusão sobre a existência e o significado da equação da reta. Essa leitura pode ser feita coletivamente.*

Intervenção Pedagógica

Professor

- *A prova de que $2x + 3y = 36$ é equação de uma reta tem os dois passos: se (x, y) satisfaz à equação, o ponto (x, y) está na reta e, se um ponto (x, y) está nessa reta, então $2x + 3y = 36$. Muitos estudantes e alguns livros didáticos fazem uma só parte dessa prova. Nesta dinâmica, a opção foi por detalhar essa prova só para os pontos que respondem à questão proposta, com coordenadas naturais e em número finito. Essa prova exigiu a verificação numa só direção: dados aqueles pontos cujas coordenadas satisfazem à equação, eles estão todos na mesma reta. É importante, porém, que o aluno perceba que, no caso geral, é necessário também fazer a verificação no outro sentido. Em geral, os alunos aceitam bem que para provar que os conjuntos U e V são iguais é preciso mostrar que $U \subset V$ e que $V \subset U$. Embora os alunos nem sempre percebam, esta é uma situação em que é preciso fazer*

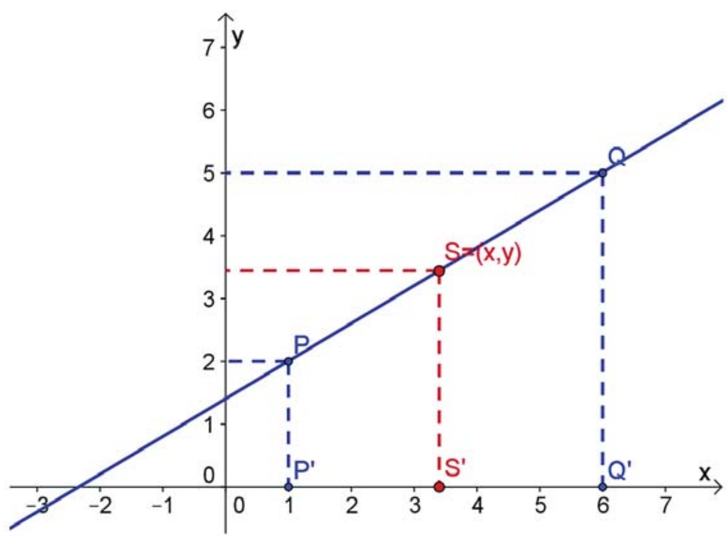
Desafiados pelo professor de Matemática, os alunos tentarão encontrar uma equação para uma reta, quando são dadas as coordenadas de dois de seus pontos.

Questão

Quando os alunos contaram ao professor de Matemática o problema que a professora de História tinha apresentado a eles, o professor resolveu aproveitar a oportunidade e deu o seguinte desafio aos alunos:

- *Então, quero que vocês achem uma equação para a reta que passa pelos pontos P = (1, 2) e Q = (6, 5).*

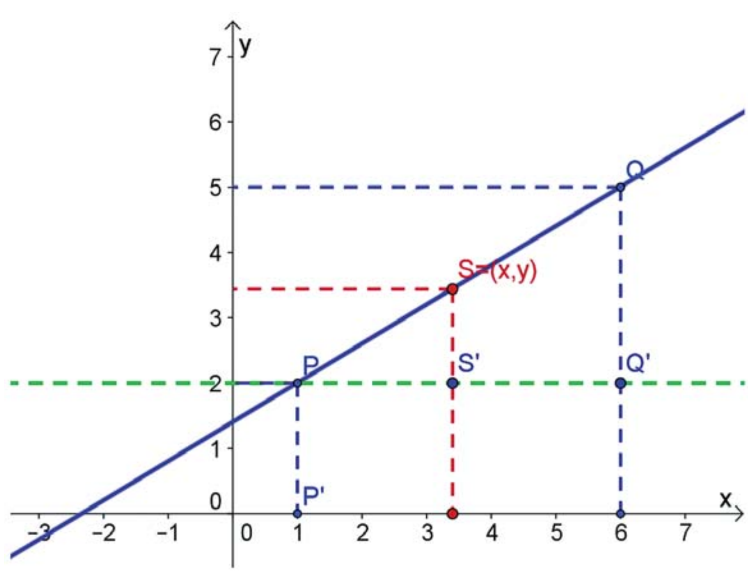
A primeira coisa que eles fizeram foi desenhar essa reta. Desenhe você também no plano cartesiano esboçado a seguir:



Como o professor pediu uma equação da reta, eles incluíram na figura um ponto

S = (x, y) nesta reta, no segmento PQ, diferente de P e de Q.

Passando uma paralela ao eixo dos x pelo ponto P, chame de S’ e Q’ as projeções, respectivamente, de S e de Q sobre esta reta.



Professor

Como o ponto S foi tomado diferente de P e de Q, vale a pena conferir se as coordenadas desses pontos também satisfazem à equação obtida:

$$P = (1, 2) \text{ e } 3 \times 1 - 5 \times 2 + 7 = 3 - 10 + 7 = 0$$

e

$$Q = (6, 5) \text{ e } 3 \times 6 - 5 \times 5 + 7 = 18 - 25 + 7 = 0.$$

● ● ● ● ●

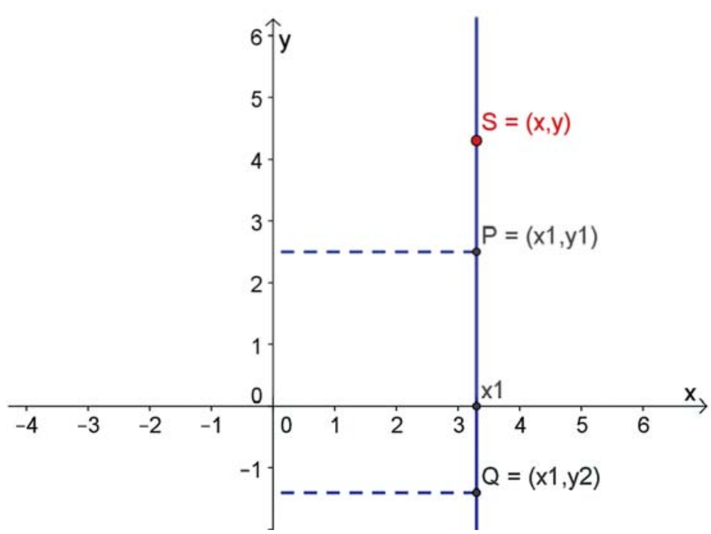
Observação: Se fossem tomados pontos P = (x_1, y_1) e Q = (x_2, y_2), por processo completamente análogo, você chegaria à equação geral da reta que passa pelos pontos P e Q desenvolvendo a seguinte proporção:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Claro que esta equação só pode ser escrita quando $x_1 \neq x_2$. Mas se os pontos P e Q têm a mesma abscissa, isto é, se $x_1 = x_2$, então a reta PQ é paralela ao eixo y e sua equação geral será:

$\mathbf{x - x_1 = 0}$,

isto é: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -x_1$.



E, se você gosta mais de usar determinantes, fica mais fácil ainda decorar a expressão da equação geral da reta escrita por meio de um determinante de terceira ordem:

Os alunos continuam trabalhando em duplas, mas haverá certamente necessidade de intervenções coletivas, principalmente, em turmas maiores.

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *O problema proposto é um caso particular, mas o caminho para resolvê-lo é o mesmo que para o caso geral. A proposta de um caso particular costuma dar maior confiança ao estudante. Além disso, novamente aqui, foram escolhidos dados e a posição do ponto geral S, de modo que a figura seja conveniente para induzir os cálculos a serem feitos. Estudada essa situação mais evidente, os demais casos ficam dependendo só da adaptação da figura, mas os resultados utilizados da Matemática são sempre os mesmos.*

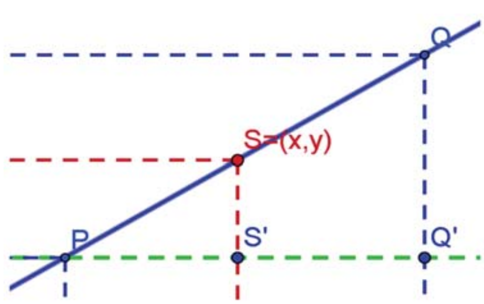
- *A expressão da equação geral da reta quando são dados dois de seus pontos é*

$$(y_1 - y_2)\,x + (x_2 - x_1)\,y + x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0,$$

mas as formas desta equação, como proporção, ou na forma de determinante são mais simples para serem decoradas:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad \begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix} = 0.$$

Principalmente, se o estudante se lembrar do resultado que inspirou cada uma delas.



A proporção vem da semelhança dos triângulos PS'S e PQ'Q, quando P, S e Q estão alinhados.

Professor

O aluno já conhece a fórmula para a equação geral da reta que passa pelos pontos $M = (x_1, y_1)$ e $N = (x_2, y_2)$, e que é mais simples de guardar na forma de determinante:

$\begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix} = 0$, poderia ter calculado diretamente o determinante $\begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{Vmatrix} = 0$,

ou, pela regra de Sarrus:

$2x + 4 + 5y - 10 - y - 4x = 0$ ou: $-2x + 4y - 6 = 0$ e, finalmente, dividindo por -2 ambos os membros: $x - 2y + 3 = 0$, e **a opção correta é (a)**.

Se o aluno ainda não sabe determinar a reta a partir de dois de seus pontos, ele pode determinar os coeficientes a, b, c da equação

$ax + by + c = 0$,

com as condições de que $x = 1$, $y = 2$ e $x = 5$ e $y = 4$ satisfazem a essa equação ou ir substituindo esses valores em cada uma das opções, a fim de escolher a opção correta.

No primeiro caso, para determinar os coeficientes, ele vai ter de levar em conta que a solução não é única, pois a equação continua válida e definindo a mesma reta quando multiplicada por uma constante diferente de 0. Substituindo os valores de x e y na equação geral, ele vai obter o sistema: $\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 5a + 4b + c = 0 \end{cases}$.

Multiplicando a 1ª equação por -5: $\begin{cases} -5a - 10b - 5c = 0 \\ 5a + 4b + c = 0 \end{cases}$

E somando as equações resultantes, para eliminar a, chega-se a:

$-6b - 4c = 0$ ou $b = -\dfrac{4c}{6}$, ou $b = -\dfrac{2c}{3}$.

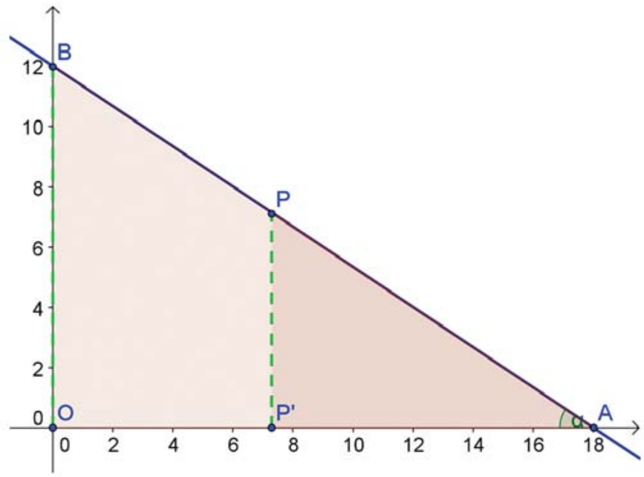
Multiplicando a 1ª equação por -2: $\begin{cases} -2a - 4b - 2c = 0 \\ 5a + 4b + c = 0 \end{cases}$ para eliminar b, chega-se a: $3a - c = 0$ ou $3a = c$ ou $a = \dfrac{c}{3}$.

Obtém-se, então, uma equação dependendo do fator c: $\dfrac{c}{3}x - \dfrac{4c}{6}y + c = 0$

Eliminando os denominadores: $2cx - 4cy + 6c = 0$. Como $c \neq 0$, dividindo por 2c, chega-se a $x - 2y + 3 = 0$.

No segundo caso, o aluno que ainda não conheça fórmula alguma, mas saiba o que significa equação de uma curva, pode substituir os valores de x e de y em cada uma das equações:

Opção (a): o ponto $M = (1, 2)$ daria: $1 - 2 \times 2 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$ e o ponto $N = (5, 4)$ daria: $5 - 2 \times 4 + 3 = 5 - 8 + 3 = 0$. Então M e N estão nessa reta e a opção (a) é correta.



Considere, então, a reta que passa pelos pontos A = (18, 0) e B = (0, 12) e seja

P = (x_0, y_0) um ponto qualquer desta reta. Por simplicidade, vamos tomar o caso em que x_0 está entre 0 e 18 (embora os cálculos sejam válidos para qualquer valor real de x_0, seria preciso analisar outros casos para estudo de sinais e dos triângulos formados).

Você vai poder verificar a condição 2x + 3y = 36, usando a semelhança dos triângulos AOB e AP'P ou a igualdade das tangentes do ângulo com vértice em A, calculadas num e noutro triângulo retângulo, conforme a tabela a seguir:

TRIÂNGULO	CATETO PARALELO AO EIXO Y	CATETO SOBRE O EIXO X	RAZÃO ENTRE OS CATETOS
AOB	12	18	$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
AP'P	y_0	$18 - x_0$	$\frac{y_0}{18 - x_0}$

Da semelhança dos triângulos, você conclui que as duas razões devem ser iguais:

ou seja: $\frac{y_0}{18 - x_0} = \frac{2}{3}$ e, daí:

$3y_0 = 2\,(18 - x_0)$ ou $3y_0 = 36 - 2x_0$ ou $2x_0 + 3y_0 = 36$.

Concluindo, as coordenadas do ponto P satisfazem à condição do filtro:

2x + 3y = 36.

Prova de (b): Os pontos (x, y) tais que 2x + 3y = 36 estão todos numa mesma reta,

No corpo da dinâmica, foi apresentada uma prova mais simples, mostrando que os pontos C, D, E, F e G estão todos na reta AB. Você vai ter uma ideia do que se pode fazer para um ponto (x, y) em geral. Vamos esboçar aqui uma prova de que os pontos (x, y) tais que 2x + 3y = 36 estão todos numa mesma reta, no caso, na reta AB,

Professor

3. Você encontra mais exercícios para fazer sobre determinação de equações da reta em:

http://www.brasilescola.com/matematica/equacao-geral-reta.htm

e

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/determinando-equacao-geral-reta.htm,

onde os exercícios já estão resolvidos.

4. Em

http://www.matematicadidatica.com.br/ENEM2011q17.aspx,

você encontra a resolução de uma questão do ENEM de 2011, que envolve a equação de uma reta e distância entre pontos no plano cartesiano.

Agora, é com você!

1. **(Saerjinho,** *3º bimestre de 2011, 3ª Série do Ensino Médio, Questão 24* **)**

Júlio precisa pintar 360 metros quadrados de parede. Com uma lata de tinta com 18 litros, ele pintou 40 metros quadrados. Para terminar o serviço, de quantos litros de tinta ele ainda vai precisar?

a. 720

b. 342

c. 320

d. 162

e. 144

Professor

Resposta

Se ele já pintou 40 m2, ele ainda precisa pintar 360 – 40 = 320 m2. Este problema pode ser resolvido de muitas maneiras:

Usando o modelo linear, se Júlio pintou 40 m^2 com 18 litros de tinta, tem-se que, dividindo 40 por 18, acha-se a área que ele pode pintar com 1 litro de tinta. E, então, a área A pintada com x litros de tinta **é dada por:** *$A = \frac{40}{18}x$. Donde, se A = 320, então $320 = \frac{40}{18}x$, donde $x = \frac{18 \times 320}{40}$, isto é, x = 18 × 8 = 144 e a* **opção correta é a** *opção (e).*

Usando a razão de proporcionalidade, se ele pintou 40 m^2 com 18 litros e precisa pintar ainda 320 m^2, como $\frac{320}{40} = 8$, então a quantidade de tinta gasta será também 8 vezes a quantidade que ele gastou para pintar os 40 m^2, isto é a quantidade de tinta *deve ser tal que:*

$$\frac{14000}{28} = \frac{23000}{a} \text{ ou seja: } 14000a = 28 \times 23000 \text{ ou } 14a = 28 \times 23 \text{ ou } a = \frac{28 \times 23}{14},$$

donde: a = 2 × 23, isto é, a = 46.

A miniatura da pirâmide de Keops que a turma vai construir terá, então, 28 cm de altura e 46 cm de aresta da base, que é quadrada.

Observação: este é um problema em que não seria preciso reduzir à mesma unidade, desde que os termos correspondentes estivessem na mesma unidade. Ou seja, as razões $\frac{140}{28}$ *e* $\frac{230}{a}$ *também devem ser iguais, desde que se considere a em centímetros, pois 28 é a altura dada em centímetros.*

Professor