Reforço escolar · Matemática ·

Passeio pelo Rio

Dinâmica 6

3º Série | 3º Bimestre

DISCIPLINA	ANO	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª série do Ensino Médio	Geométrico	Geometria analítica.

DINÂMICA	Passeio pelo Rio
HABILIDADE BÁSICA	H61 – Associar o gráfico de uma função polinomial do 1º grau à sua representação algébrica ou vice-versa.
HABILIDADE PRINCIPAL	H15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar e determinar a equação reduzida de uma reta.

Professor

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Feixes de luz no Réveillon de Copacabana	20 a 25 min.	Em grupos de 3	Individual
2	Um novo olhar...	O "bondinho" do Pão de Açúcar	20 a 25 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
3	Fique por dentro!	Ruas do Rio	15 a 25 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou em outra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Esta dinâmica foi elaborada para analisar a determinação da equação reduzida de uma reta no plano cartesiano, a partir de uma equação geral dessa reta ou do conhecimento de sua inclinação mais um de seus pontos. Ela começa pela construção da equação geral de cinco retas, dadas por seus gráficos, passa pelo estudo do papel dos coeficientes da equação reduzida, focaliza a escrita da equação reduzida a partir do conhecimento da inclinação e de um dos pontos da reta em questão e termina com sugestões de desenho da reta no plano cartesiano, dada sua equação reduzida.

Durante o desenvolvimento deste tema, reaparece naturalmente a função afim e seu gráfico. Não foi feita uma revisão especial sobre estes temas, a fim de dar mais tempo ao tema principal, mas o assunto é citado nas atividades propostas.

Também aqui, você, professor, poderá administrar o tempo gasto em cada etapa, com uma certa margem para adaptação à sua turma.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

25 MINUTOS

Atividade • Feixes de luz no *Réveillon* de Copacabana.

VOCABULÁRIO	
RÉVEILLON	palavra francesa que significa passagem de ano e lê-se rêveion.

Objetivo

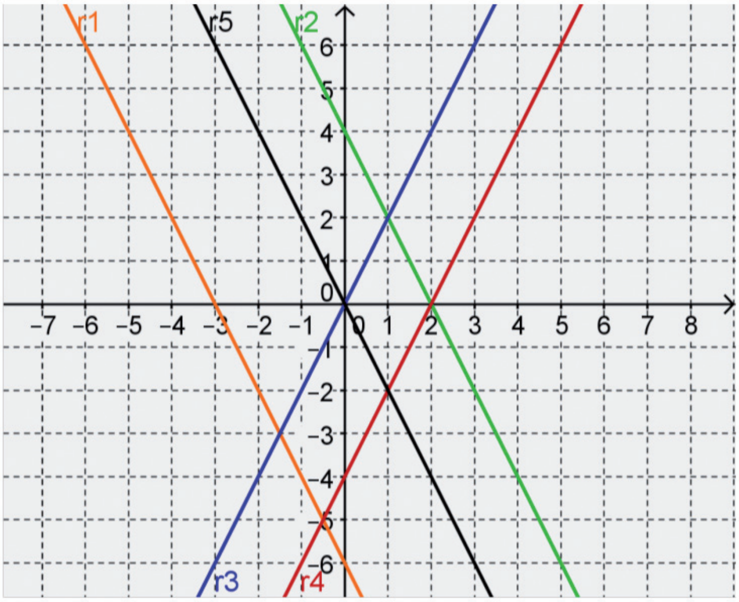
Introduzir a equação da reta na forma reduzida.

Descrição da atividade

Analisando algumas retas desenhadas num plano cartesiano, o aluno deverá escrever uma equação geral na forma ax + by + c = 0 de cada uma delas. Em seguida, por meio de manipulações algébricas, será solicitado a encontrar a equação da reta na forma reduzida, y=mx + n.

Questão

No *réveillon* de Copacabana, imagine que alguns raios de luz estão num mesmo plano e podem ser descritos pelo esboço gráfico a seguir.



Matemática

Professor

a. Escreva uma equação geral de cada uma dessas retas, a partir dos pontos em que cada uma delas corta os eixos coordenados e, um outro ponto, se for preciso:

COR DA RETA	ENCONTRO COM EIXO X	ENCONTRO COM EIXO Y	UM OUTRO PONTO, SE FOR PRECISO
r_1	(– 3, 0)	(0, – 6)	
r_2	(2, 0)	(0, 4)	
r_3	(0, 0)	(0, 0)	(1, 2)
r_4	(2, 0)	(0, – 4)	
r_5	(0, 0)	(0, 0)	(– 1, 2)

Uma equação geral da reta que passa pelos pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ é dada por:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ ou } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Você pode escolher o modo pelo qual prefere decorar esta equação.

Agora, complete a tabela a seguir, escrevendo a equação geral de cada uma das retas, simplificando o que seja possível, usando o processo que você prefere:

Resposta

COR DO GRÁFICO	(X_1, Y_1)	(X_2, Y_2)	EQUAÇÃO GERAL DA RETA
r_1	(– 3, 0)	(0, – 6)	$\frac{y-0}{x-(-3)} = \frac{-6-0}{0-(-3)}$ isto é: $3y = -6x - 18$ ou $6x + 3y + 18 = 0$ ou $2x + y + 6 = 0$
r_2	(2, 0)	(0, 4)	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ou $-4x - 2y + 8 = 0$ ou $2x + y - 4 = 0$
r_3	(0, 0)	(1, 2)	$\frac{y-0}{x-0} = \frac{2-0}{1-0}$ *isto é:* $y = 2x$ *ou* $2x - y = 0$
r_4	(2, 0)	(0, – 4)	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *ou* $4x - 2y - 8 = 0$ *ou* $2x - y - 4 = 0$
r_5	(0, 0)	(– 1, 2)	$\frac{y-0}{x-0} = \frac{2-0}{-1-0}$ *isto é:* $-y = 2x$ *ou* $2x + y = 0$

b. Se você escrever essas mesmas equações, calculando y como uma função de x, você vai obter o que se chama **equação reduzida** de cada uma dessas retas. Vá em frente e complete a tabela:

Resposta

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO GERAL DA RETA	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA
r_1	$2x + y + 6 = 0$	$y = -2x - 6$
r_2	$2x + y - 4 = 0$	$y = -2x + 4$
r_3	$2x - y = 0$	$y = 2x$
r_4	$2x - y - 4 = 0$	$y = 2x - 4$
r_5	$2x + y = 0$	$y = -2x$

A equação reduzida da reta é, pois, da forma:

$$y = mx + n$$

em que m e n são números reais quaisquer.

c. E, agora, pense no seguinte: você já sabe que a equação geral da reta é $ax + by + c = 0$. Conhecendo uma equação geral de uma reta, você pode escrever a sua equação reduzida? Justifique sua resposta.

Resposta

Espera-se que o estudante perceba que, para escrever a equação reduzida a partir da relação: $ax + by + c = 0$, ele vai ter de isolar y no primeiro membro e, para isso, terá de dividir por b: $by = -ax + c$,ou seja, $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$. Assim, a condição para que se possa escrever a equação de uma reta na forma reduzida é que, na sua equação geral, se tenha: $b \neq 0$.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Espera-se que os alunos conversem sobre a resolução em grupo, mas que façam todos os cálculos em seu encarte.*
- *A correção também pode ser feita nos grupos ou, se for necessário, numa discussão coletiva no final da etapa.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *É importante fazer um resgate sobre a obtenção da equação geral da reta, dada por dois de seus pontos. A solução sugerida nas duas primeiras linhas usa, ora a igualdade das razões, ora o determinante. O aluno, porém, não precisa se lembrar das duas formas, basta uma delas, de acordo com a preferência individual.*
- *Vale a pena chamar a atenção do estudante que a equação geral de uma reta, escrita como $ax + by + c = 0$, não é única. Qualquer número real diferente de 0, multiplicado por esta equação dá ainda uma equação geral da mesma reta. Já a equação reduzida, por ter o coeficiente de y igual a 1, é única. Toda reta que não seja paralela ao eixo y tem uma e, uma só, equação reduzida.*
- *Se houver oportunidade de uma discussão coletiva sobre esta etapa, vale a pena observar que a equação reduzida é aquela que caracteriza a reta como gráfico de uma função afim da abscissa, $f(x) = mx + n$. Fica então natural a condição $b \neq 0$ sobre a equação geral da reta $ax + by + c = 0$, para que se possa escrever a equação em forma reduzida. Pois, o que acontece quando $b = 0$? Como, na equação geral, há a condição para que a e b não sejam ambos nulos, se $b = 0$, tem-se, certamente, que $a \neq 0$. Mas, então, a equação pode ser escrita como:*

  $$x = -\frac{c}{a},$$

  ou seja, a reta é dada por todos os pontos que tenham abscissa igual a um certo número, $(-\frac{c}{a})$. Essa reta é paralela ao eixo y. E uma tal reta não pode mesmo ser gráfico de uma função de x. Este seria, se

Professor

necessário, um momento para relembrar a definição de função, destacando que, para qualquer valor de x, só poderia ser associado um único valor de y.

• • • • •

Segunda Etapa
Um novo olhar...

25 MINUTOS

Atividade • O "bondinho" do Pão de Açúcar.

Objetivo

Analisar o papel de cada um dos coeficientes na equação reduzida de uma reta.

Descrição da Atividade:

Da mesma forma que o "bondinho" de acesso ao Pão de Açúcar (ponto turístico da cidade do Rio de Janeiro) sobe e desce, as retas, num plano cartesiano, que não sejam paralelas ao eixo x, podem ter y crescendo ou decrescendo, quando x cresce. A análise deste comportamento, a partir da equação reduzida, será feita nesta etapa.

Questão

Você vai agora analisar o papel de cada um dos coeficientes m, n na equação reduzida, $y = mx + n$ e verificar as suas conclusões nas cinco retas estudadas na Primeira Etapa. Para isso, responda às seguintes perguntas:

a. Fazendo $x = 0$ na equação $y = mx + n$, qual é o valor correspondente de y?

Resposta

$y = m \times 0 + n = n.$

• • • • •

b. O que se pode dizer sobre a localização de um ponto (0,y)?

Resposta

É um ponto do eixo y.

• • • • •

c. Quais são, portanto, as coordenadas do ponto em que a reta de equação $y = mx + n$ corta o eixo y?

Resposta

A reta de equação $y = mx + n$ corta o eixo y no ponto (0, n).

d. Complete a tabela a seguir e confira suas respostas com os gráficos da Primeira Etapa:

Resposta

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA	SE X = 0, Y =	PONTO DE ENCONTRO DA RETA COM O EIXO Y	VERIFIQUEI NO GRÁFICO
r_1	$y = -2x - 6$	-6	$(0, -6)$	✓
r_2	$y = -2x + 4$	*4*	*(0, 4)*	✓
r_3	$y = 2x$	*0*	*(0, 0)*	✓
r_4	$y = 2x - 4$	*−4*	*(0, −4)*	✓
r_5	$y = -2x$	*0*	*(0, 0)*	✓

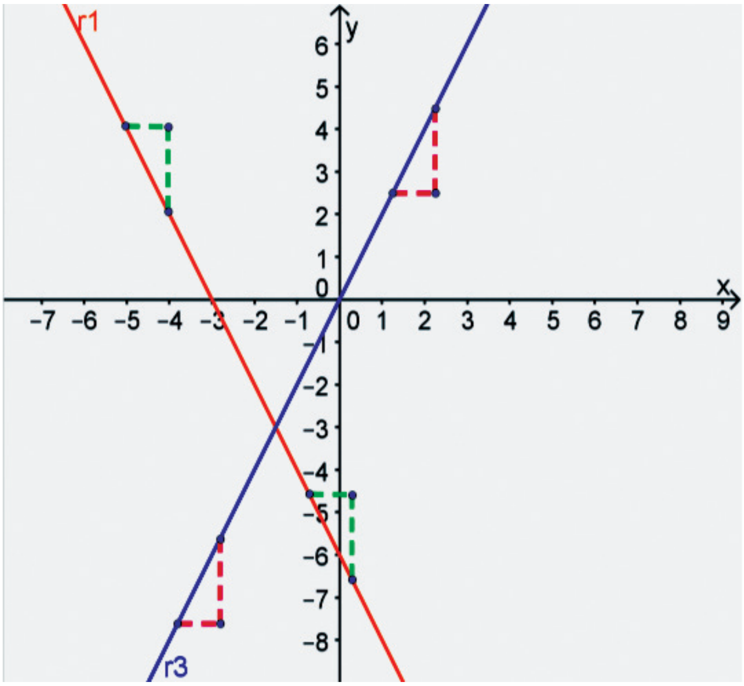
e. Observe que, na expressão $y = mx + n$, o valor de x está sendo multiplicado pelo número m. Então, se você parte de um valor de x e soma 1 a esse valor, o valor de y vai ficar modificado também. Complete a tabela a seguir, a partir desta observação:

Resposta

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA	SOMANDO 1 A X:	Y VAI SOFRER UM ACRÉSCIMO IGUAL A
r_1	$y = -2x - 6$	$y = -2(x + 1) - 6 = (\mathbf{-2x - 6}) - 2$	-2
r_2	$y = -2x + 4$	*$y = -2(x + 1) + 4 = (-2x + 4) - 2$*	*−2*
r_3	$y = 2x$	$y = 2(x + 1) = (\mathbf{2x}) + 2$	2
r_4	$y = 2x - 4$	*$y = 2(x + 1) - 4 = (2x - 4) + 2$*	*2*
r_5	$y = -2x$	$y = -2(x + 1) = (\mathbf{-2x}) - 2$	-2

Professor

f. Agora, observe o que isso acarreta no gráfico cartesiano. Pegue um ponto de r_1 e dê um acréscimo igual a 1 a x e o respectivo acréscimo a y para voltar a um ponto da reta. Repita o procedimento com um ponto da reta r_3 e compare os dois casos.



Resposta

Espera-se que os alunos percebam que, em r_3, quando m = 2, o acréscimo a y é igual a 2 × 1 e, portanto, o novo ponto, ainda no gráfico, fica acima do anterior, mas, em r_1, o acréscimo a y é igual a – 2× 1 e, portanto, o novo ponto, ainda no gráfico, fica abaixo do anterior.

• • • • •

g. Qual a conclusão que você pode tirar sobre a influência do sinal de m sobre a reta r de equação y = mx + n?

Resposta

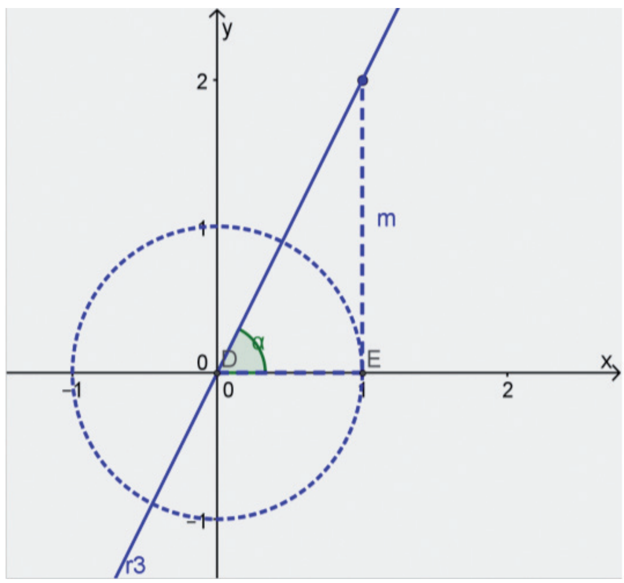
Quando x cresce, o acréscimo que y = mx + n sofre é o acréscimo dado a x multiplicado por m. Então, se m > 0, o acréscimo em y é também positivo e a função mx + n é crescente e, se m < 0, o acréscimo em y é negativo e a função mx + n é decrescente. Espera-se que o aluno perceba que esse resultado depende só do sinal de m.

• • • • •

h. Se as unidades nos dois eixos são as mesmas e se $m \neq 0$, você pode calcular o valor de m observando a reta de equação $y = mx + n$ e o ângulo α, formado pela reta e pelo eixo dos x. O ângulo α é aquele com vértice no encontro da reta com o eixo x, formado pelo semieixo das abscissas maiores do que a abscissa do vértice e a parte da reta cujos pontos têm ordenadas positivas (a semirreta que fica acima do eixo x). Examine os casos em que $m > 0$ e $m < 0$, desenhados a seguir, lembre-se da trigonometria no círculo e veja qual a relação entre m e o ângulo α.

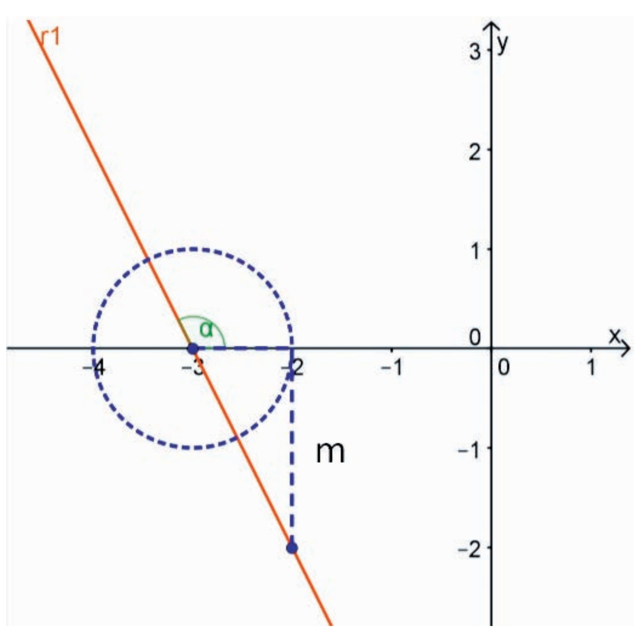
Na reta $r_{3:}$

m > 0



E, na reta r_1:

m < 0



Resposta

Resposta: Espera-se que os estudantes se lembrem de que em ambos os casos, tg $\alpha = m$.

• • • • •

i. E se $m = 0$, o que acontece com a reta?

Resposta

Espera-se que o estudante perceba que, se $m = 0$, a equação será: $y = n$ o que define uma reta paralela ao eixo x. Ou ela coincide com o eixo x, quando $n = 0$, ou ela não encontra o eixo x quando $n \neq 0$.

• • • • •

Pelo que você acaba de ver, o coeficiente m é chamado **inclinação** ou **coeficiente angular** da reta de equação: $y = mx + n$.

Uma reta de equação $y = mx + n$, faz um ângulo com o eixo x cuja tangente é m e corta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, n)$.

1. Se $m = 0$, a reta é paralela ao eixo x e o ângulo que ela faz com o eixo x está sendo considerado nulo também.
2. O coeficiente n é também conhecido como coeficiente linear.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

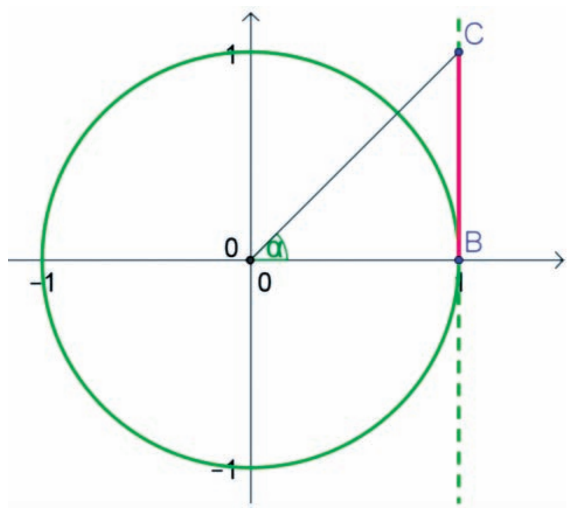
- *Como sempre, a discussão das questões deve ser feita nos trios, mas as respostas devem ser registradas individualmente no encarte do aluno para consulta posterior.*
- *Conforme o tempo disponível e o preparo dos alunos nessa fase, será preciso fazer a correção coletiva ou os próprios alunos vão se corrigindo nos grupos.*

• • • • •

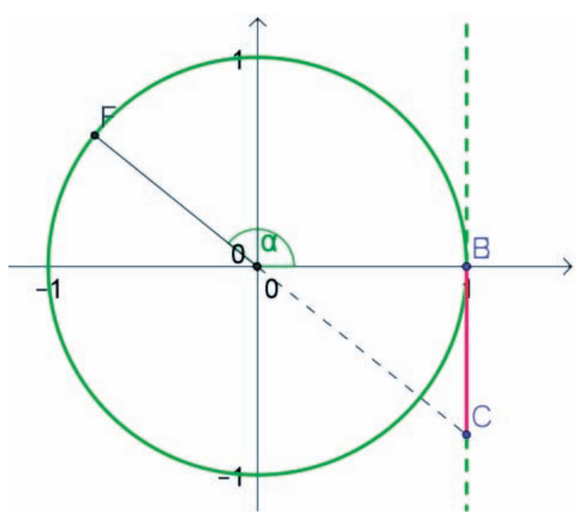
Professor:

- *Para calcular m = tg α, o estudante vai ter de se lembrar da definição de tangente de um ângulo no círculo trigonométrico. Essa definição usa a reta tangente ao ciclo trigonométrico que passa pelo ponto (1,0):*

Se o ângulo está no primeiro quadrante:

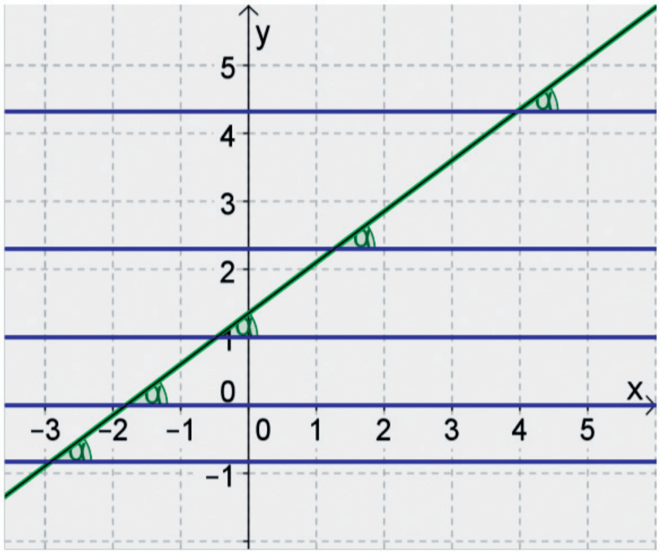


Se o ângulo está no segundo quadrante:



Em ambos os casos, a tangente do ângulo é a ordenada do ponto C, isto é, C = (1, tg α).

- *Vale ainda observar que, em qualquer ponto de uma reta que corte os dois eixos, o ângulo que a reta faz com a paralela ao eixo x, tirada desse ponto, é sempre o mesmo. Isso é garantido pela relação de ângulos formados por uma transversal a um feixe de paralelas. No caso, a reta é a transversal e o feixe de paralelas são as paralelas ao eixo x.*



Terceira Etapa
Fique por dentro!

Atividade • Ruas do Rio

Objetivo

Estudar equação e esboço gráfico de uma reta conhecidos um de seus pontos e sua inclinação.

Descrição da atividade

As ruas do Rio de Janeiro não são retas e, muito menos, infinitas, mas costuma-se dizer que uma rua é paralela à outra. Essa é uma linguagem herdada da Geometria e usada com bastante liberdade, o que não acontece na Geometria. Nesta etapa, os alunos vão determinar a equação reduzida de uma reta, conhecidos um de seus pontos e sua inclinação e desenhar retas no plano cartesiano, a partir de sua equação reduzida.

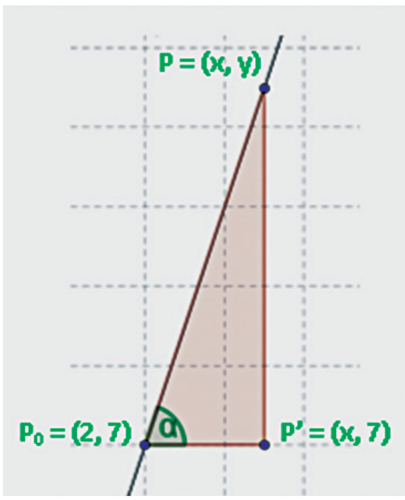
Questão 1:

Você já sabe escrever a equação reduzida de uma reta, dados dois de seus pontos, mas agora que você conhece o papel do coeficiente m, você poderá determinar a equação reduzida da reta que tem inclinação igual a 3 e passa pelo ponto $P_0 = (2, 7)$. Como você pode fazer isso?

O aluno pode usar um processo algébrico, sabendo que a equação reduzida da reta será y = 3x + n e determinar n de modo que para x = 2 se tenha y = 7, isto é:

7 = 3 × 2 + n ou n = 7 – 6 , isto é, n = 1

e a equação será:



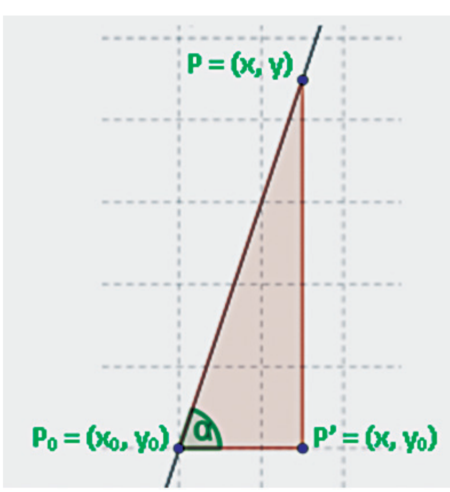
y = 3x + 1.

Ou pode também usar um processo geométrico, calculando a tangente do ângulo α que a reta faz com o eixo x, no triângulo de vértices P_0 = (2, 7), um ponto P = (x, y) na reta em questão e o ponto P' = (x, 7) que torna o triângulo retângulo. Como o cateto oposto ao ângulo α é PP', que mede y – 7, o cateto adjacente é P_0P', que mede x – 2 e a tg α = 3, tem-se:

$$\frac{y-7}{x-2} = 3 \text{ ou } y - 7 = 3(x-2) \text{ ou } y = 3x + 7 - 6 \text{ e, finalmente: } y = 3x + 1.$$

• • • • •

Observação (localizada na Etapa Flex no Encarte do Aluno):



Em geral, você pode escrever a equação reduzida de uma reta de inclinação igual a m e que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ igualando m à tg α, calculada no triângulo retângulo com vértice nos pontos: $P_0 = (x_0, y_0)$; $P' = (x, y_0)$ e P = (x, y). Como o cateto oposto ao ângulo α é PP', que mede $y - y_0$ e o cateto adjacente é P_0P', que mede $x - x_0$, tem-se:

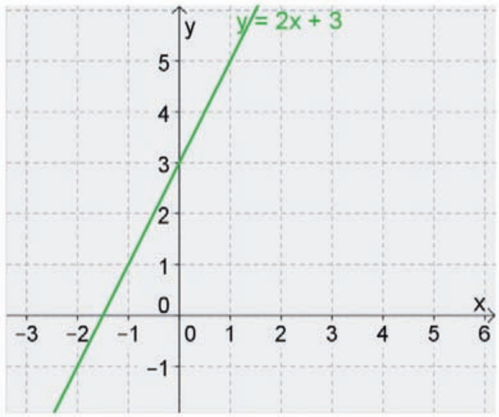
$$\text{tg } \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0} = m \text{, o que resulta em:}$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Professor

QUESTÃO 2:

Desenhe, no plano cartesiano a seguir, o esboço da reta de equação y = 2x + 3 e explique como você encontrou essa reta.



Resposta

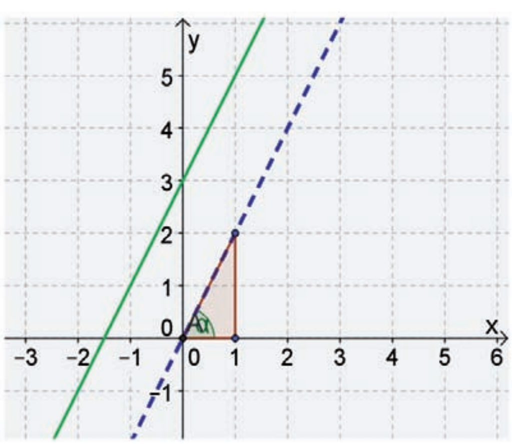
O aluno poderá explicar que já sabia que a reta deveria cortar o eixo y no ponto de ordenada 3. Então calculou um outro ponto pelo qual a reta deve passar. Em geral, o aluno calcula o ponto em que a reta corta o eixo x:

$$y = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -1{,}5$$

que é, portanto, o ponto de abscissa – 1,5.

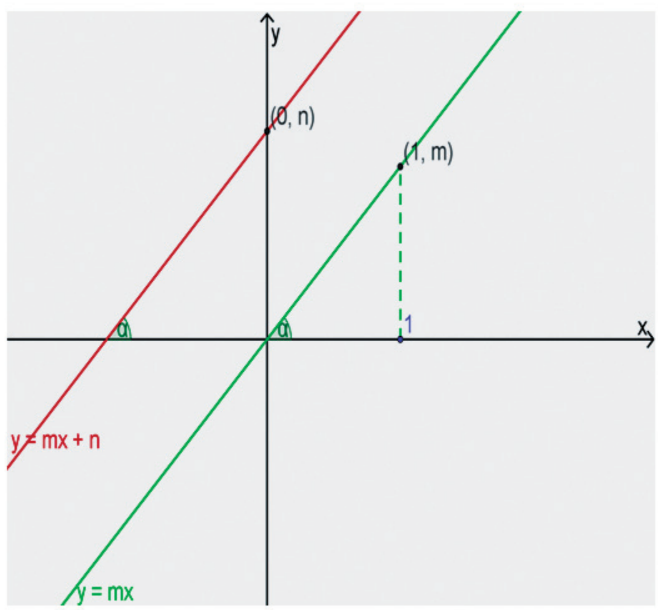
Pelo estudo feito na etapa anterior, ele pode ter sido levado a considerar os pontos (0, 3) e (1, 3 + 2) = (1, 5) ou, ainda um outro ponto qualquer.

Ele poderia, porém, ter considerado que a reta deve ter a inclinação igual a 2 e que o ângulo cuja tangente é 2, com vértice na origem e um lado no eixo x, é um ângulo agudo de um triângulo retângulo de catetos 1 (sobre o eixo x) e 2:



Fica aqui mais uma observação (no Encarte do Aluno, esta observação está na Etapa Flex):

Uma reta de equação y = mx (em que n = 0) é uma reta que passa pela origem e pelo ponto (1, m). E qualquer reta de equação y = mx + n é paralela à reta de equação y = mx pelo ponto (0, n), no eixo y.



Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Régua e, se possível, esquadro.

Procedimentos Operacionais

- *Estas atividades estão previstas para serem desenvolvidas nos grupos, mas podem ser objeto de uma discussão coletiva, por ser um prolongamento natural das etapas anteriores.*

Professor:

- *Não se espera que o aluno seja apto a repetir os argumentos aqui apresentados nas justificativas. É importante, porém, que ele veja, ainda que uma única vez, as justificativas de fatos que ele pode guardar, depois, com facilidade. Essa facilidade será maior se ele perceber a lógica de cada um dos fatos.*

- *Para o traçado de uma reta dada por uma equação geral, é provável que o aluno prefira encontrar 2 de seus pontos, substituindo valores de x e calculando os respectivos valores de y. Como foi dito anteriormente, neste caso, será aconselhável que o aluno calcule 3 pontos, para uma conferência (será difícil que um erro de cálculo ainda mantenha os pontos numa mesma reta). Já quando a reta é dada pela equação reduzida, $y = mx + n$, o aluno pode ainda seguir esses mesmos passos, calculando 2 ou 3 pontos, mas pode também usar já o ponto $(0, n)$ e um outro qualquer. Ou os pontos $(0, n)$ e $(1, m + n)$ ou, o que é mais comum, usar os pontos em que a reta corta os eixos. Um erro frequente cometido pelos alunos que costumam procurar os pontos em que a reta corta os eixos, é o de considerar o ponto $(m, 0)$ ao invés de calcular a raiz da equação e usar o ponto $(-\frac{n}{m}, 0)$ este, sim, pertencente à reta. Será interessante escolher entre deixar a escolha a critério do aluno ou fazer essa escolha de acordo com o que achar mais conveniente, desde que seja aceito qualquer procedimento correto que o aluno venha a usar.*

Quarta Etapa

Quiz

10 MINUTOS

Questão (Saerjinho, 3º bimestre de 2011, 3ª série):

A equação da reta na forma reduzida que passa pelo ponto (– 2, – 3) e tem inclinação igual a – 2 é

a. y = – 2x – 7

b. y = – 2x – 3

c. y = – x – 5

d. y = – 2x – 2

e. y = – 2x + 7

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

O aluno já sabe que a equação reduzida da reta é da forma y = mx + n, em que m é a inclinação, então, já deve ter y = – 2x + n.Está excluída a opção (c).

Se a reta deve passar pelo ponto (– 2, – 3) é porque para x = – 2 o valor de y deve ser – 3, isto é: = – 2 × (– 2) + n = – 3 ou seja: n = – 3 – 4 = – 7

A equação da reta é, portanto, y = – 2x – 7 e a **opção correta é (a)**.

O aluno que souber de cor que a equação da reta que tem inclinação m e passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0) é: $y - y_0 = m (x - x_0)$, pode aplicá-la diretamente:

y – (– 3) = – 2 [x – (– 2)] ou y = – 2x – 3 – 4 e, finalmente, y = – 2x – 7.

Possíveis erros:

- *O aluno que escolheu a opção (b), provavelmente usou as coordenadas do ponto dado como coeficientes da equação.*
- *O aluno que usou a diferença e a soma das coordenadas como coeficientes da equação pode ter chegado à opção (c).*
- *Uma escolha ao acaso ou uma aplicação equivocada da fórmula pode ter levado o aluno a optar pela resposta (d).*
- *Afinal, um erro de sinal pode ter levado o aluno à opção (e).*

Professor

ETAPA FLEX

PARA SABER +

1. Vale a pena lembrar que a equação geral de uma reta não é única, pois se a equação $ax + by + c = 0$ define uma reta, qualquer equação obtida desta pelo produto por uma constante não nula define ainda a mesma reta. Isto não acontece com a equação reduzida de uma reta não paralela ao eixo dos y. De fato, a fixação do coeficiente de y como sendo 1 estabelece a unicidade dessa equação. Da mesma forma uma reta não paralela ao eixo x pode ser definida de um só modo por uma equação do tipo: $x = py + q$.

2. Uma questão que não é muito discutida nos livros didáticos é a da escolha de unidades nos eixos coordenados.

   Algumas das conclusões estudadas, nesta dinâmica, são independentes dessa escolha sendo que uma delas, não. Vejamos com mais cuidado esses resultados.

- O fato de que o ponto (0, n) é o ponto em que a reta de equação $y = mx + n$ encontra o eixo y independe da escolha das unidades em cada eixo.
- O fato de que o coeficiente m está ligado à inclinação da reta de equação $y = mx + n$ independe da escolha das unidades em cada eixo. O fato de que, quando $m = 0$, a reta é paralela ao eixo x independe das unidades em cada eixo, e, que quando $m \neq 0$, o sinal de m indica se ela é o gráfico de uma função crescente, se $m > 0$, e o gráfico de uma função decrescente, se $m < 0$, também não depende das unidades nos eixos.
- Já a igualdade

  $$m = \text{tg}\ \alpha,$$

  onde α é o ângulo formado pela reta e o eixo x ,é válida quando a unidade nos dois eixos for a mesma. De fato, a tangente é uma ordenada e medida, portanto, na unidade do eixo y. Mas a reta paralela ao eixo y deve ser tangente ao círculo de raio 1 e esse raio deve medir 1 em qualquer direção do plano, incluindo o eixo x.

Em geral, o professor de Matemática usa a mesma unidade nos dois eixos, mas não chama a atenção para o fato. Os livros didáticos também costumam admitir que as unidades sejam as mesmas, até que apresentam um exemplo tirado da prática em que os números sejam muito diferentes nas grandezas em questão. Por exemplo, na ilustração de uma caixa d’água de 1000 litros que se enche em 2 horas, não é interessante o gráfico do volume em litros pelo tempo em horas, ou mesmo em minutos, num sistema com a mesma unidade nos dois eixos. Apesar disso, os livros costumam dizer que a reta de equação $y = x$ é a bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes e outras relações que envolvem ângulos ou medidas de segmentos, sem o cuidado de estipular que isso se dá quando as unidades nos eixos sejam as mesmas.

Hoje em dia, esses problemas podem, facilmente, vir à tona quando se usam *softwares* para o traçado de gráficos. Alguns deles ajustam as unidades a fim de apresentar os dados solicitados numa mesma janela e, nem sempre, esse ajuste leva à mesma unidade nos dois eixos. Um professor menos avisado pode se atrapalhar quando o resultado não seja aquele esperado.

3. Na teleaula de número 46 para o Ensino Médio do Novo Telecurso, você vai rever o estudo da equação reduzida da reta. Você assiste a essa aula em

http://www.youtube.com/watch?v=F4yDAGnRhhY

4. Você pode também assistir a um outro modo de construir a equação reduzida em:

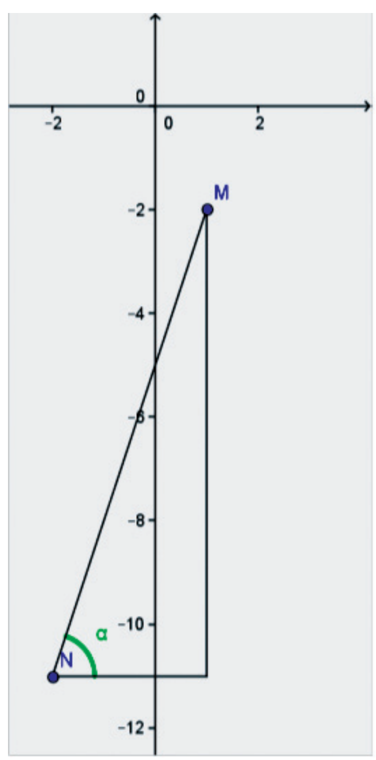
http://www.youtube.com/watch?v=95621FLonqg

5. Um problema e três soluções você encontra em:

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/equacao-reduzida-reta.htm

Agora, é com você!

1. (Saerjinho, 3ª série, 3º bimestre de 2011) A expressão algébrica da reta que passa pelos pontos M (1, – 2) e N (– 2, – 11) é



a. y = 3x – 5

b. y = – 5x + 3

c. y = 3x + 1

d. $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

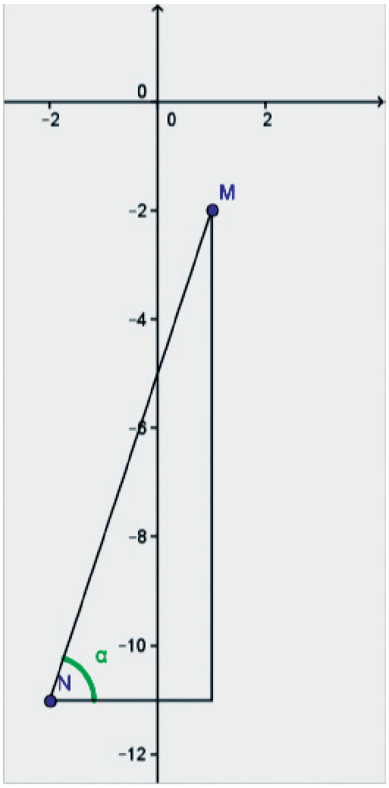
e. $y = \frac{5x}{3} + \frac{1}{3}$

Resposta

Você pode partir da equação geral que você calcula pela igualdade das razões ou pelo determinante. $\frac{y-(-2)}{x-1} = \frac{-11-(-2)}{-2-1}$ *isto é:* $\frac{y+2}{x-1} = \frac{-9}{-3}$ *ou* $\frac{y+2}{x-1} = 3$*, ou ainda*

$y + 2 = 3x - 3$ ou $y = 3x - 5$.

Você pode também usar o determinante:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } 9x - 3y - 15 = 0 \text{ ou } 3x - y - 5 = 0$$

ou, finalmente, $y = 3x - 5$.

Ou, calcular diretamente a inclinação (coeficiente angular) da reta a partir dos 2 pontos dados:

$$m = tg\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11-(-2)}{-2-1} = \frac{-9}{-3} = 3, \text{ logo } y = 3x + n.$$

Mas essa reta passa pelo ponto M (1, – 2), logo:

$-2 = 3 \times 1 + n$, donde: $n = -2 - 3 = -5$ e a equação é mesmo: $y = 3x - 5$.

Então a opção correta é a opção (a).

Matemática

2. (PUC – RJ) As retas dadas pelas equações x + 3 y = 3 e 2 x + y = 1 se interceptam:

a. em nenhum ponto;

b. num ponto da reta x = 0;

c. num ponto da reta y = 0;

d. no ponto (3, 0);

e. no ponto $(\frac{1}{2}, 0)$.

Resposta

Para achar as coordenadas do ponto de encontro, se elas não forem paralelas, será preciso resolver o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Um processo para resolvê-lo pode ser por adição, multiplicando-se a 1ª equação por (– 1) e a 2ª por 3 e somando ambas:

$$\begin{cases} -x - 3y = -3 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

e chegando a: 5x = 0 , donde x = 0. Substituindo este valor de x na 2ª equação, obtém-se: y = 1. Logo o ponto comum às duas retas é o ponto (0,1) e a opção correta é a opção (b).

• • • • •

3. (FGV–SP) A inclinação do segmento de reta que passa pelos pontos A (0, 3) e B (3, 0) é:

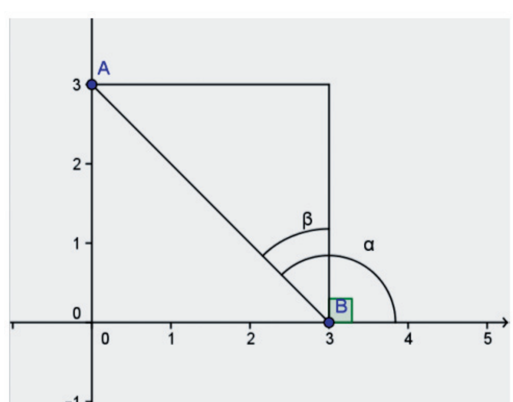
a. 1

b. – 1

c. 0

d. 3

e. – 3



(*Observação: a inclinação do segmento é a inclinação da sua reta suporte.*)

Professor

Resposta

A inclinação do segmento será, portanto:

$$tg\ \alpha = tg\ (\beta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{tg\beta} = -\frac{3}{3} = -1$$

ou ainda: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0 - 3}{3 - 0} = \dfrac{-3}{3} = -1$, *e a opção correta é a opção (b).*

• • • • •

4. (*Adaptada de DANTE, L.R. Matemática, Volume Único. São Paulo: Editora Ática, 2008, pág. 111*)

Biólogos descobriram que o número de sons emitidos por certa espécie de grilos que povoam a Floresta da Tijuca no Rio de Janeiro está relacionado com a temperatura. Numa aproximação um tanto livre, pode-se dizer que essa relação é afim, que, a 20 °C, os grilos emitem cerca de 124 sons por minuto e que, a 28 °C, eles emitem 172 sons por minuto. Qual seria, então, a expressão que relaciona a temperatura x, em graus Celsius, e o número y de sons por minuto desses grilos?

x = TEMPERATURA EM GRAUS CELSIUS	y = NÚMERO DE SONS EMITIDOS POR MINUTO	y = ax + b
20	124	20 a + b = 124
28	172	28 a + b = 172

Resolva o sistema obtido na 3ª coluna da tabela, a fim de determinar os coeficientes a e b dessa relação, e desenhe o gráfico da equação obtida.

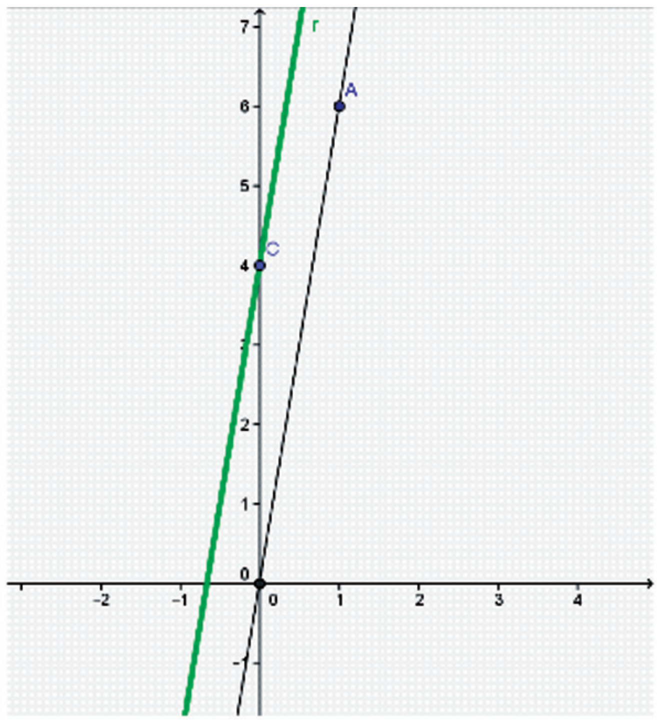
Resposta

Montando um sistema de equações com esses valores $\begin{cases} 20a + b = 124 \\ 28a + b = 172 \end{cases}$.

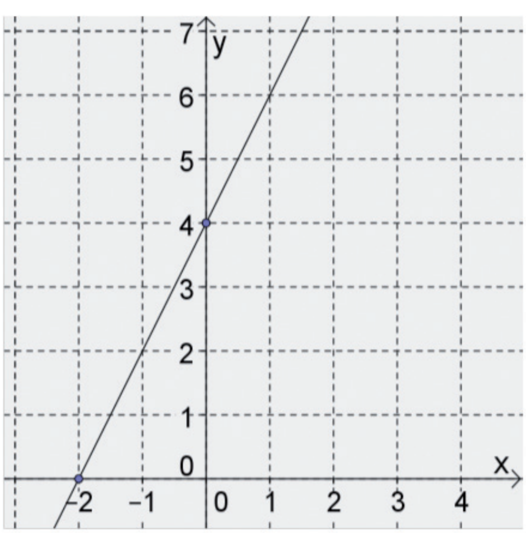
Fazendo a 2ª equação menos a 1ª, obtém-se: 8a = 48, donde $a = \dfrac{48}{8} = 6$, *que, substituído na 1ª equação, leva a: 20 × 6 + b = 124, ou: b = 124 – 120, donde b = 4 e a expressão procurada é: y = 6 x + 4.*

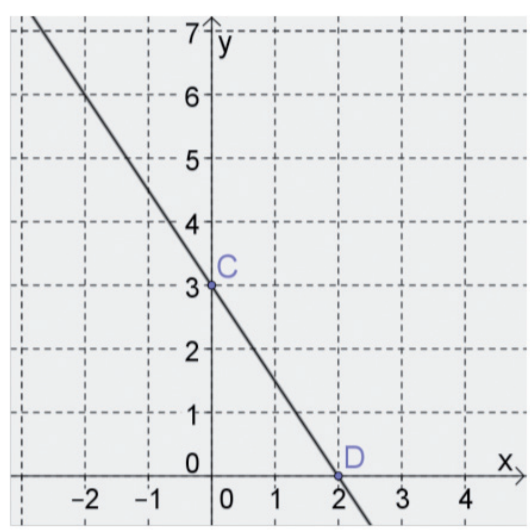
Matemática

Então, o gráfico é dado pela reta cuja equação reduzida é esta: tem uma inclinação igual a 6 e passa pelo ponto C = (0, 4). Então ela é a paralela à reta de equação y = 6x (esta passa pela origem e pelo ponto A = (1, 6)) pelo ponto do eixo y, C = (0,4):



5. A seguir, você encontra alguns gráficos e algumas equações reduzidas de retas. Procure na lista de equações aquela que está representada em cada um dos gráficos:

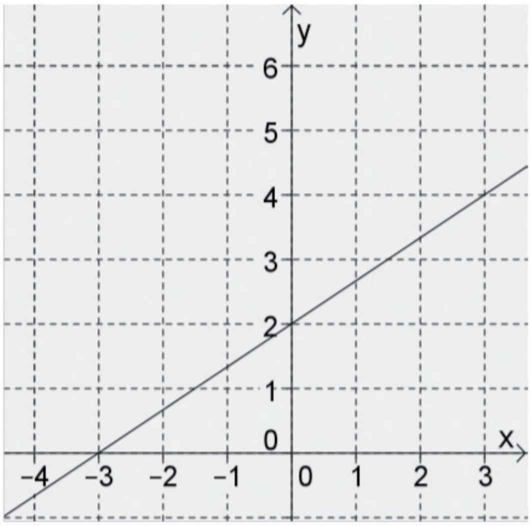


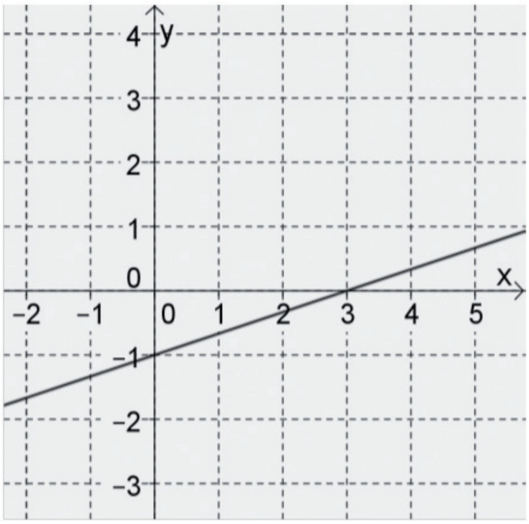


$y = 2x + 4$

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

Professor





$y = \frac{2}{3}x + 2$

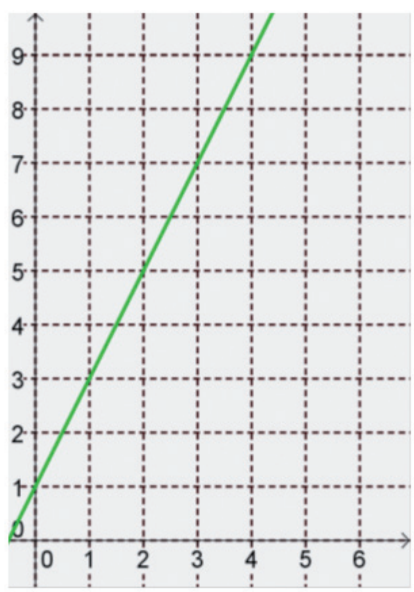
$y = \frac{1}{3}x - 1$

$y = \frac{3}{2}x + 3$	$y = 3x + 1$	$y = \frac{2}{3}x + 2$	$y = \frac{1}{3}x + 1$	$y = 3x + 2$	$y = 2x + 4$
$y = -\frac{3}{2}x + 3$	$y = -3x + 1$	$y = -\frac{2}{3}x + 2$	$y = -\frac{1}{3}x + 1$	$y = -3x + 2$	$y = -2x + 4$
$y = -\frac{3}{2}x - 3$	$y = -3x - 1$	$y = -\frac{2}{3}x - 2$	$y = -\frac{1}{3}x - 1$	$y = -3x - 2$	$y = -2x - 4$
$y = \frac{3}{2}x - 3$	$y = 3x - 1$	$y = \frac{2}{3}x - 2$	$y = \frac{1}{3}x - 1$	$y = 3x - 2$	$y = 2x - 4$

6. Num passeio pela praia de Copacabana, Lúcia começou a contar o tempo, a partir do instante em que manteve a velocidade constante de 2 kilômetros por hora. Chamando de s o espaço percorrido a partir do marco 0, no Leme, o espaço y podia ser medido em kilômetros em função do tempo x, medido em horas, pela relação: $y = 2x + 1$.

Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:CopacabanaBeach_RiodeJaneiro.jpg

Esta é uma função afim. Você se lembra de como é o seu gráfico? Use o plano coordenado a seguir para esboçar esse gráfico:



Agora, sem fazer cálculos, só utilizando o gráfico, complete:

Resposta

Se x = 3, o valor de y é: *7* e, se y = 8, o valor de x é: *3,5*

Professor