Reforço escolar • Matemática •

Soma dos ângulos: internos ou externos?

Dinâmica 5

9º Ano | 4º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	ANO	CAMPO	CONCEITO
Matemática	9º do Ensino Fundamental	Geométrico.	Polígonos regulares e áreas de figuras planas

DINÂMICA	Soma dos Ângulos: Internos ou Externos?
HABILIDADE BÁSICA	Calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo.
HABILIDADE PRINCIPAL	H06 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados e/ou pelos tipos de ângulos.
CURRÍCULO MÍNIMO	Calcular os ângulos internos e externos de um polígono regular.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar ideias.	Dobraduras no triângulo.	de 15 a 20 min.	Dupla de alunos.	Individual.
2	Um novo olhar...	A soma dos Ângulos Internos.	de 15 a 20 min.	Dupla de alunos.	Individual.
3	Fique por dentro!	A soma dos Ângulos Externos.	De 25 a 35 min.	Dupla de alunos.	Individual.
4	Quiz.	Quiz.	10 min	Individual	Individual.
5	Análise das respostas ao Quiz.	Análise das respostas ao Quiz.	15 min	Coletiva	Individual.
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Esta dinâmica busca identificar as propriedades dos ângulos internos e externos de um triângulo. Assim, na primeira etapa, pretende-se que os alunos, a partir da dobradura de um triângulo, experimentem encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo que é igual a 180º. Já na segunda etapa, terão a oportunidade de explorar o cálculo dos ângulos internos de um triângulo. Finalmente, na terceira etapa, realizam uma atividade envolvendo o cálculo dos ângulos externos de um triângulo. Como sempre, você terá a possibilidade de fazer algumas escolhas, entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais necessário para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa

Compartilhar ideias

Atividade • Dobraduras no triângulo

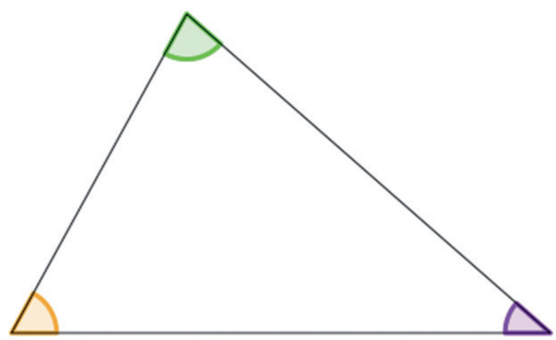
Objetivo

Experimentar o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

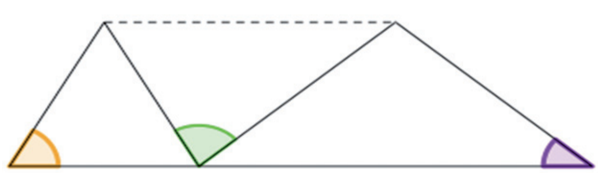
Descrição da atividade:

Nesta etapa, o aluno é convidado a realizar três dobraduras no triângulo do anexo A.

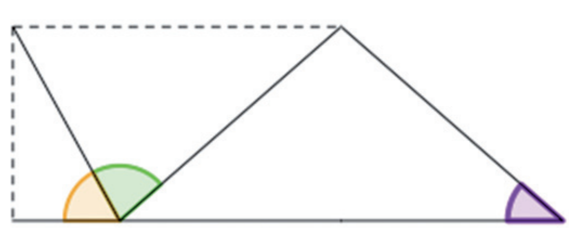
- Corte um triângulo de uma folha de papel.



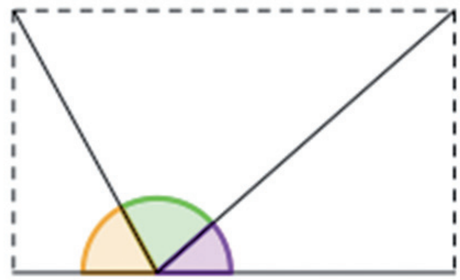
- Dobre esse triângulo ao "meio", paralelo a um dos lados juntando um vértice ao lado oposto (um jeito de fazer ficar bem paralelo é dobrar nos pontos médios dos lados).



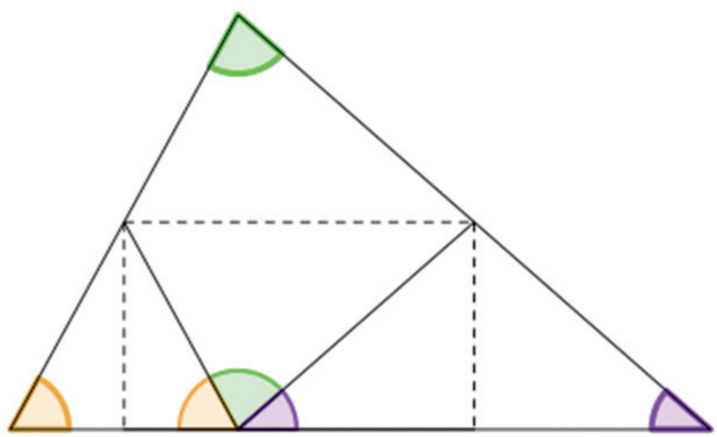
- Agora dobre perpendicular à base, juntando o ângulo laranja ao ângulo verde.



- Agora dobre perpendicular à base, juntando o ângulo roxo ao ângulo verde.



- Então os três ângulos ficam juntos na base!



- Qual a conclusão a que você chega com relação à soma dos ângulos internos de um triângulo?

Professor

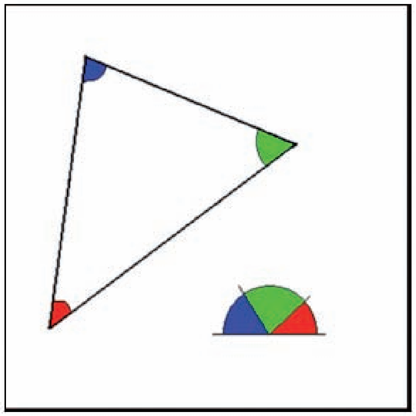
Recursos Necessários

- Encarte do aluno com o anexo A para recortar. Tesoura e transferidor.

Procedimentos Operacionais

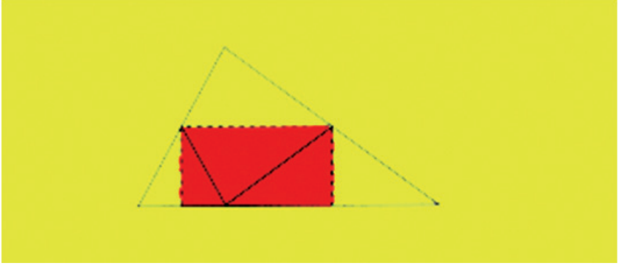
A atividade poderá ser feita em dupla de alunos e o registro individual.

- *Professor, nesta etapa, o objetivo é que o aluno chegue à conclusão de que "a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º". Esta propriedade dos triângulos é de grande importância, uma vez que, o conhecimento deste resultado vai ser bastante útil este ano e nos próximos.*

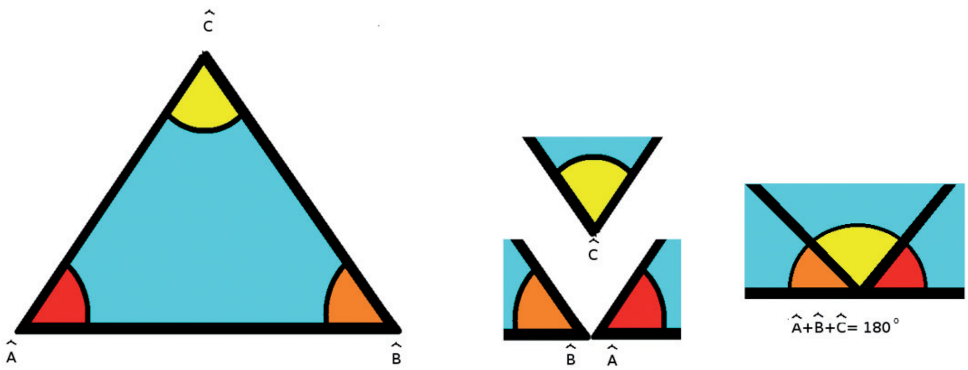


- *Professor, recordar ao aluno que a dobradura deve ser feita de modo que, ao final, o aluno obtenha um retângulo, portanto o lado inferior deve ser paralelo ao superior.*

- *Professor, seguidamente, os alunos devem dobrar os outros dois vértices de modo a encontrar o primeiro vértice. Desse modo, os três vértices encontram-se num ponto comum (ver a figura a seguir).*



- *Professor, se observarmos agora a figura a seguir, verificamos que os três ângulos internos do triângulo inicial se encontram juntos, e a soma das suas amplitudes é igual a 180º, visto que constituem um ângulo raso. Assim, por um processo extremamente simples, foi possível verificar que "A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º".*



Professor

Segunda Etapa
Um novo olhar...

Atividade • A soma dos Ângulos Internos

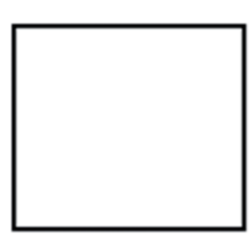
Objetivo

Calcular ângulos internos de um Polígono Regular

Descrição da atividade

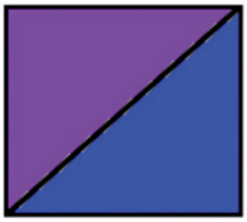
Na 1ª etapa, o aluno pode chegar à conclusão de que, para todo triângulo, a soma de seus ângulos internos vale sempre 180°. Sabendo disso, nesta 2ª etapa, podemos solicitar ao aluno que encontre a soma dos ângulos internos de outros polígonos, através de três desafios.

- **Desafio 1:** Determinar a soma dos ângulos internos do quadrilátero abaixo, a partir do simples conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.



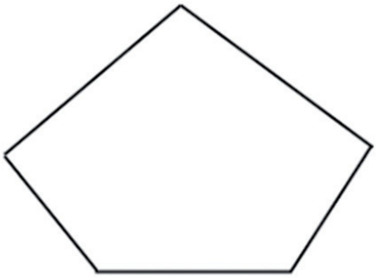
Resposta

Resultado esperado



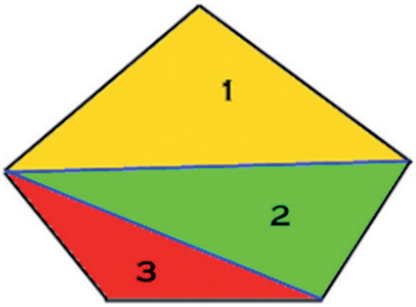
O quadrilátero é formado por dois triângulos. Então, se quisermos saber a soma dos ângulos internos dele basta sabermos a soma dos ângulos internos dos dois triângulos que o formam e, como um triângulo possui 180° de soma dos ângulos internos, então, dois triângulos vão possuir 2 · 180° = 360°, ou seja, a medida dos ângulos internos do quadrilátero vale 360°.

- **Desafio 2:** Determinar a soma dos ângulos internos do pentágono abaixo a partir do simples conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.



Resposta

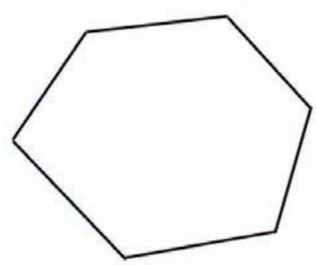
Resultado esperado



Vamos escolher um de seus vértices e, a partir dele, iremos traçar retas aos outros vértices que faltam e veremos, ao final,que esse pentágono pode ser dividido em três triângulos. Para determinar a soma de seus ângulos internos, basta multiplicarmos 180° por 3, pois temos 3 triângulos formando esse pentágono, então: 3 · 180° = 540°. Descobrimos que a soma dos ângulos internos de um pentágono vale 540º.

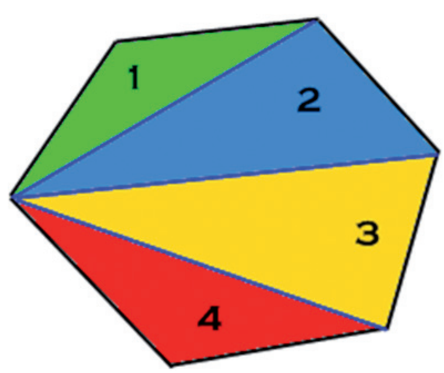
• • • • •

- **Desafio 3:** Determinar a soma dos ângulos internos do hexágono abaixo, a partir do simples conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.



Resposta

Resultado esperado



Podemos dividir esse hexágono em quatro triângulos com aquele mesmo processo de antes, escolhendo um de seus vértices e, a partir dele, traçando retas aos vértices que faltam. Agora, para saber a soma dos ângulos internos desse hexágono, basta multiplicarmos 180º pelo número de triângulos que esse hexágono é formado. Como são 4 triângulos então temos que: 4 · 180° = 720°, ou seja, a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono vale 720°.

• • • • •

Professor

Recursos Necessários:

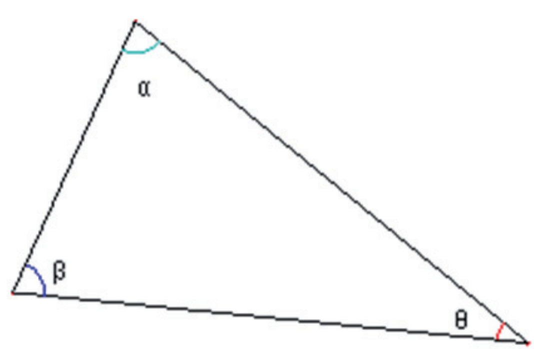
- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

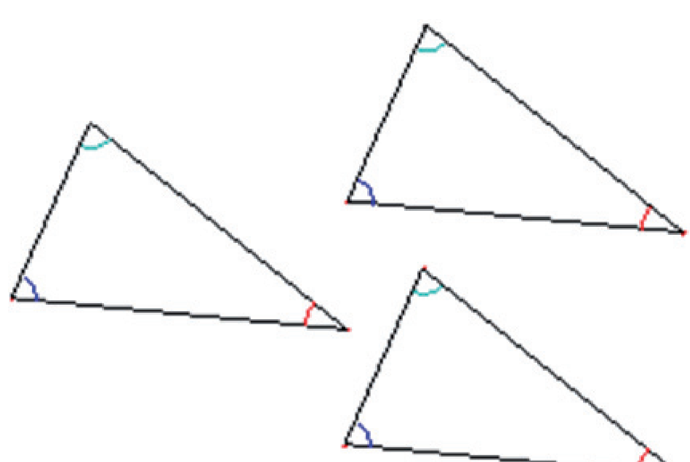
- *A atividade poderá ser feita em dupla de alunos e o registro individual.*

Intervenção Pedagógica

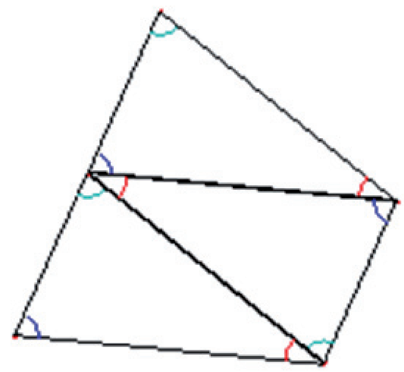
- *Professor, além da demonstração realizada com as dobraduras na 1ª etapa, vamos considerar outra forma de demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180º. Veremos a seguir.*
    - *Considere o triângulo a seguir e seus ângulos internos:*



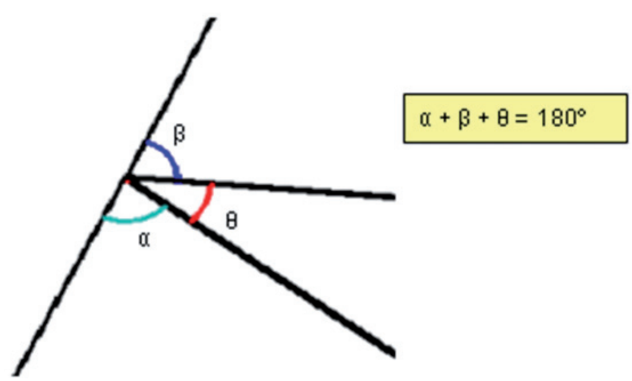
    - *Vamos desenhar mais dois triângulos, idênticos ao anterior:*



- Agora, observe:



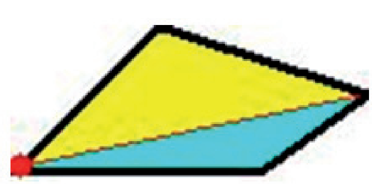
- *Girando os triângulos e unindo um vértice de cada um, de modo que os ângulos α, β e θ tornem-se, dois a dois, adjacentes, temos um ângulo raso:*



- *Assim, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180º.*

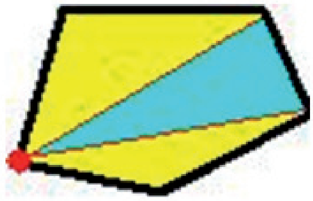
- *Professor, é importante aproveitar para relembrar ao aluno que, em um polígono, quanto maior o número de lados, maior a medida dos ângulos internos. Considerando as diagonais traçadas por apenas um dos vértices de um polígono, é possível perceber que elas formam triângulos. Conforme aumentamos os lados de um polígono, a quantidade de triângulos aumenta, veja:*

  Em um quadrilátero conseguimos formar 2 triângulos.



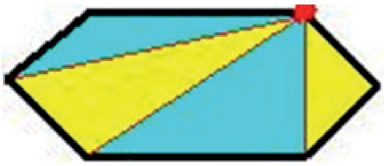
Considerando que em cada triângulo a soma dos ângulos internos iguais é 180°, então a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero será 2 . 180° = 360°.

Em um polígono de cinco lados (pentágono) formamos 3 triângulos.



Dessa forma, temos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é 180°. 3. 180º = 540°.

Em um polígono de seis lados (hexágono), formamos 4 triângulos.



Portanto, a soma dos ângulos internos é dada por 4 . 180° = 720°.

- *Professor, percebemos que a diferença do número de triângulos formados e o número de lados dos polígonos é sempre 2, então concluímos que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono será calculada através da expressão:*

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • A soma dos Ângulos Externos

Objetivo

Calcular ângulos externos de um Polígono Regular.

Professor

Descrição da atividade

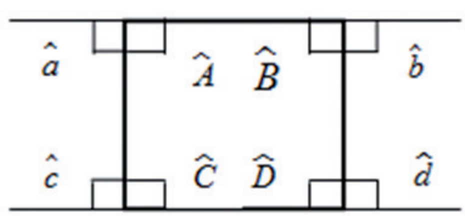
Dando continuidade ao estudo dos ângulos de um polígono. Nesta etapa, podemos solicitar aos alunos que encontrem a soma dos ângulos externos de polígonos regulares através de três desafios, considerando que o ângulo externo é o ângulo formado por um lado e o prolongamento de um lado adjacente.

- **Desafio 1:**

a. Dado o quadrilátero abaixo, marque os seus ângulos internos e chame-os de $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ e marque também os ângulos externos do quadrilátero. Chame os ângulos externos de $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$. Diga quanto vale a soma $\widehat{A}+\hat{a}, \quad \widehat{B}+\hat{b}, \quad \widehat{C}+\hat{c}, \quad \widehat{D}+\hat{d}$.

Resposta

Resultado esperado:



$$\widehat{A}+\hat{a}=180^o$$
$$\widehat{B}+\hat{b}=180^o$$
$$\widehat{C}+\hat{c}=180^o$$
$$\widehat{D}+\hat{d}=180^o$$

b. Observe o resultado obtido no item a) e, considerando a soma dos ângulos internos obtida na etapa 2, responda, quanto vale cada ângulo externo desse quadrilátero e dê o valor da soma de todos os ângulos externos.

Resposta

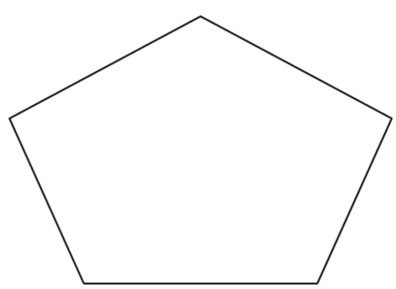
Resultado esperado:

A soma dos ângulos internos do quadrilátero vale 360º. Cada ângulo interno vale 360º/4 = 90º e, como a soma de cada ângulo interno com seu respectivo ângulo externo é 180º, temos que cada ângulo externo vale 90º. Portanto, a soma dos ângulos externos será 4 . 90º = 360º.

• • • • •

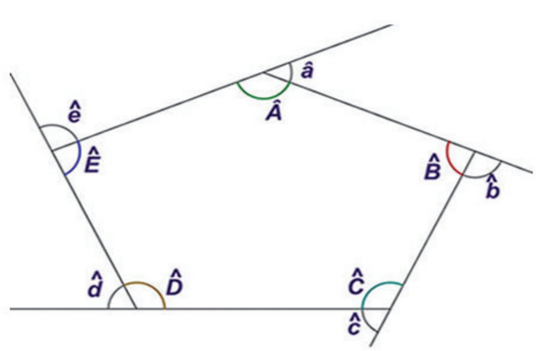
- **Desafio 2:**

a. Dado o pentágono abaixo, marque os seus ângulos internos e chame-os de $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},\widehat{D},\widehat{E}$ e marque também os ângulos externos prolongando os lados do pentágono. Chame os ângulos externos de $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d},\hat{e}$. Diga quanto vale a soma $\widehat{A}+\hat{a},\ \ \widehat{B}+\hat{b},\ \ \widehat{C}+\hat{c},\ \ \widehat{D}+\hat{d},\ \ \widehat{E}+\hat{e}$.



Resposta

Resultado esperado:



$$\widehat{A}+\hat{a}=180^o$$
$$\widehat{B}+\hat{b}=180^o$$
$$\widehat{C}+\hat{c}=180^o$$
$$\widehat{D}+\hat{d}=180^o$$
$$\widehat{E}+\hat{e}=180^o$$

b. Agora, responda quanto vale cada ângulo externo desse pentágono e dê o valor da soma de todos os ângulos externos.

Resposta

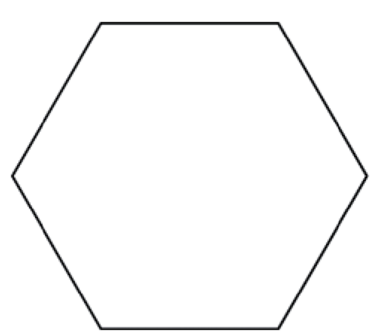
Resultado esperado:

A soma dos ângulos internos do pentágono vale 540º. Cada ângulo interno vale 540º/ 5 = 108º e, como a soma de cada ângulo interno com seu respectivo ângulo externo é 180º,temos que cada ângulo externo vale 72º. Portanto, a soma dos ângulos externos será 5 . 72º = 360º.

Professor

- **Desafio 3:**

a. Dado o hexágono abaixo, marque os seus ângulos internos e chame-os de $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}, \widehat{F}$ e marque também os ângulos externos, prolongando os lados do hexágono. Chame os ângulos externos de $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}, \hat{f}$. Diga quanto vale a soma $\widehat{A}+\hat{a}$, $\widehat{B}+\hat{b}$, $\widehat{C}+\hat{c}$, $\widehat{D}+\hat{d}$, $\widehat{E}+\hat{e}$, $\widehat{F}+\hat{f}$.



Resposta

Resultado esperado:

$$\hat{A}+\hat{a}=180^o$$
$$\hat{B}+\hat{b}=180^o$$
$$\hat{C}+\hat{c}=180^o$$
$$\hat{D}+\hat{d}=180^o$$
$$\hat{E}+\hat{e}=180^o$$
$$\hat{F}+\hat{f}=180^o$$

• • • • •

b. Observe o resultado obtido no item a) e, considerando a soma dos ângulos internos obtida na etapa 2, responda quanto vale cada ângulo externo desse hexágono e dê o valor da soma de todos os ângulos externos.

Resposta

Resultado esperado:

A soma dos ângulos internos do hexágono vale 720º. Cada ângulo interno vale 720º/ 6 = 120º e, como a soma de cada ângulo interno com seu respectivo ângulo externo é 180º,temos que cada ângulo externo vale 60º. Portanto, a soma dos ângulos externos será 6 . 60º = 360º.

• • • • •

Considerando os três exemplos acima, conclua quando vale a soma dos ângulos externos de um polígono regular?

Resposta

Resultado esperado:

A soma dos ângulos externos de um polígono regular vale 360º.

• • • • •

Recursos Necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

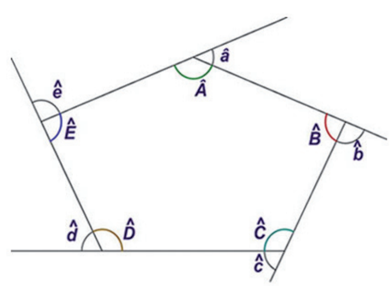
A atividade poderá ser feita em dupla de alunos e o registro individual.

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, vamos considerar outra forma de demonstrar que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono regular vale 360º. Primeiramente, será considerado a demonstração, utilizando um pentágono e depois a generalização para um polígono de n lados.*

  Considere o pentágono a seguir, com seus ângulos internos dados por $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ *e seus respectivos ângulos externos* $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}$, *conforme figura a seguir.*



Veja que a soma do ângulo externo com o seu ângulo interno adjacente resulta em um ângulo de 180°, ou seja, são ângulos suplementares. Façamos a soma de todos os ângulos suplementares desse pentágono.

$$\widehat{A}+\hat{a}=180^o$$
$$\widehat{B}+\hat{b}=180^o$$
$$\widehat{C}+\hat{c}=180^o$$
$$\widehat{D}+\hat{d}=180^o$$
$$\underline{\widehat{E}+\hat{e}=180^o}$$
$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}=900^o$$
$$S_i+S_e=900^o$$
$$(5-2)\cdot 180^o+S_e=900^o$$
$$S_e=900^o-540^o$$
$$S_e=360^o$$

Professor

Generalizando, veremos que a soma dos ângulos externos será 360° para qualquer polígono convexo.

Sabe-se que a soma dos ângulos internos é dada pela seguinte expressão:

$$S_i = (n-2).180^o$$

Se somarmos os ângulos suplementares de um polígono convexo com n lados, teremos a seguinte expressão:

$$S_i + S_e = n \cdot 180^o$$
$$(n-2) \cdot 180^o + S_e = n \cdot 180^o$$
$$S_e = n \cdot 180^o - n \cdot 180^o + 360^o$$
$$S_e = 360^o$$

Ou seja, para qualquer que seja o polígono convexo, a soma dos seus ângulos externos será igual a 360°.

- *Professor, seria importante aproveitar e mostrar ao aluno que, para calcular a medida do ângulo externo de um polígono, é preciso dividir 360º pelo número de lados da desse polígono.*

$$a_e = \frac{360^o}{n}$$

onde a_e é o ângulo externo e n o número de lados do polígono regular.

• • • • •

Quarta Etapa

Quiz

10 MINUTOS

Questão

(*Questão 49 da Avaliação Diagnóstica – C1005 – 2º bimestre – SAERJINHO – 2012*). A soma dos ângulos internos de um polígono pode ser calculada pela fórmula $S_i = (n - 2) . 180°$, onde n é o número de lados do polígono e S_i é a soma dos ângulos internos. Quantos lados tem um polígono cuja soma dos ângulos internos é 3 240º?

a. 7 lados.

b. 9 lados.

c. 16 lados.

d. 18 lados.

e. 20 lados.

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao Quiz.

15 MINUTOS

Atividade • A matemática das abelhas.

Resposta

e. 20 lados.

$$
\begin{aligned}
&S_i = (n-2).180^o \\
&3240^o = (n-2).180^o \\
&3240^o = 180^o n - 360^o \\
&-180^o n = -360^o - 3240^o \\
&180^o n = 3600^o \\
&n = \frac{3600^o}{180^o} = 20
\end{aligned}
$$

Distratores

- *O aluno que optou pela alternativa **A** pode não ter conhecimento do assunto e escolhido n = 7 como resultado.*
- *O aluno que optou pela alternativa **B** provavelmente pode ter se confundido para determinar o valor de n na equação e calculou 360n = 3240. Portanto, achou n = 9 como resultado.*
- *O aluno que escolheu a opção **C** pode ter achado que, como 18 x 180 = 3240, então, o polígono teria 16 lados e não prestou atenção que 18 já era o resultado de (n - 2).*
- *O aluno que escolheu a opção **D** pode ter achado que ,como 18 x 180 = 3240, então, o polígono teria 18 lados e não prestou atenção que a fórmula usa o valor de (n - 2).*

Etapa Flex

Para saber +

1. **Ângulo do triângulo – Matemática – Ens. Fund. – Telecurso**

Nesta vídeo-aula, é apresentada, de uma forma simples e interessante, que o **triângulo** é uma das figuras mais importantes da Geometria. Você saberá que as propriedades dele podem ser utilizadas para fazer uma estante ficar firme e que, até nos jogos de futebol, ouve-se falar em triângulos. Além disso, aprenderá a propriedade mais importante: não importa o tamanho ou o tipo de triângulo, **a soma dos ângulos dele será sempre 180 graus**.

- Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=4RtjYDLNdaE

2. **JOGO TRIÂNGULO GP**

Este é um jogo que trabalha a prática do conceito da **soma dos ângulos internos de um triângulo**, por meio de uma disputa entre dois carros de corrida em um circuito na forma de um triângulo.

- Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/5286

AGORA, É COM VOCÊ!

1. As medidas dos ângulos de um triângulo são, respectivamente, x, 3x e 5x. Calcule o valor de x.

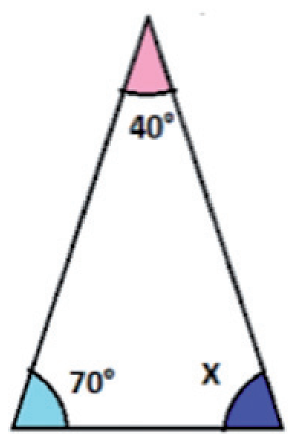
Resposta

x = 20º.

$$x + 3x + 5x = 180^o$$
$$9x = 180^o$$
$$x = \frac{180^o}{9} = 20^o$$

● ● ● ● ●

2. Determine o valor de x no triângulo abaixo.



Resposta

x = 70º.

$$40^o + 70^o + x = 180^o$$
$$x = 180^o - 110^o$$
$$x = 70^o$$

● ● ● ● ●

Professor

3. Quantos lados possui um polígono cuja soma dos ângulos internos é igual a 2340º?

Resposta

15 lados.

$$S_i = (n-2)\cdot 180^o$$
$$2340^o = (n-2)\cdot 180^o$$
$$2340^o = 180^o n - 360^o$$
$$-180^o n = -360^o - 2340^o$$
$$180^o n = 2700^o$$
$$n = \frac{2700^o}{180^o} = 15$$

• • • • •

4. Qual a soma dos ângulos internos de um icoságono (polígono de 20 lados)?

Resposta

A soma vale 3240º.

$$S_i = (n-2)\cdot 180^o$$
$$S_i = (20-2)\cdot 180^o$$
$$S_i = 18\cdot 180^o = 3240^o$$

• • • • •

5. Quanto mede o ângulo externo do icoságono?

Resposta

Cada ângulo externo mede 18º.

$$a_e = \frac{360^o}{n}$$
$$a_e = \frac{360^o}{20} = 18^o$$

• • • • •

ANEXO A