



Potências e exponenciais... ou é o inverso?

Dinâmica 1

1ª Série | 4º Bimestre

Aluno

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 1ª	Algébrico-Simbólico	Função Exponencial.

APRESENTAÇÃO

Você deve se lembrar do conceito de função, certo? Por exemplo, se aplicarmos a função $f(x) = 2x$ (a cada número do conjunto A associamos o seu dobro no B) ao conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, seu conjunto imagem será dado por $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Você sabe que em alguns casos podemos “desfazer” o que a função “fez”, elemento a elemento? Quando isso é possível, é porque existe a chamada função inversa.

No exemplo acima, a inversa de f é a função $g(x) = \frac{x}{2}$, que associa a cada elemento de B a sua metade em A .

Nesta dinâmica iremos estudar algumas situações modeladas pelas funções exponenciais e também vamos descobrir que esse tipo de função possui uma inversa. Ficaram curiosos?

Então mãos à obra!

PRIMEIRA ETAPA

COMPARTILHAR IDEIAS

ATIVIDADE • AS OPERAÇÕES, NÚMEROS PEQUENOS E GRANDES, E O BINGO!

Objetivo

Revisar as operações com números reais dando ênfase a potenciação e potências de base 10.

Descrição da atividade

Professor/a, Nesta etapa são apresentadas duas atividades que abordam a operação de potenciação, visando lembrar as suas propriedades, bem como as quatro operações básicas. Na primeira é apresentado um texto onde há números muito grandes ou pequenos, que os alunos devem ler. Destacam-se, também, as dificuldades de lidar com estes objetos e suas medidas. A seguir são feitos alguns questionamentos sobre os números e a utilização da notação científica para a sua representação.

Vamos começar?

ATIVIDADE 1 • ASTRONOMIA E BIOLOGIA

Vamos começar nosso desafio?

Leia o seguinte texto, em voz alta, em até 30 segundos.

“[...] como, por exemplo, o nosso sistema Solar que tem um diâmetro aproximado de 100.000.000.000 metros. E isto é muito pequeno se comparado com o tamanho da Galáxia onde vivemos com seus incríveis 100.000.000.000.000.000.000 metros de diâmetro. No entanto, ao lembrarmos que o Universo visível deve ter cerca de 100.000.000.000.000.000.000.000 metros de diâmetro, vemos que tamanhos assombrosos estão incluídos no estudo da Astronomia. Daí pensamos: é melhor estudar Biologia, pois a molécula do DNA tem apenas 0,0000001 metro, muito mais fácil de lidar. O problema é que a Astronomia não é uma profissão perigosa enquanto que a Biologia [...]. Imagine: os biólogos têm a coragem de lidar com vírus que medem apenas 0,000000001 metro e terrivelmente mortais. E se, por uma distração, um biólogo deixa um destes vírus cair no chão do laboratório? Nunca mais irá encontra-lo!”

Fonte: <http://fisicacomjofrenildo.blogspot.com.br/2012/03/escrevendo-numeros-muito-pequenos-e.html>

Agora responda às seguintes questões:

1. Você ou seu colega conseguiram fazer a leitura corretamente dentro do tempo determinado?

Como podem comprovar, números muito grandes ou muito pequenos apresentam uma dificuldade tanto na leitura quanto na representação. Um bom caminho para facilitar esta representação numérica é a utilização da notação científica. Vamos melhorar essas representações com este recurso?

Um número está em notação científica quando apresentado na seguinte forma:

$$a \times 10^n, \text{ com } 1 \leq a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$$

Por exemplo:

$$100 = 1 \times 10^2$$

$$0,0001 = 1 \times 10^{-4}$$

Verifique que para múltiplos de 10 o expoente é proporcional à quantidade de zeros do número dado. Perceba ainda que este expoente pode ser positivo ou negativo.

2. Observando os exemplos anteriores, diga em que caso os expoentes serão positivos e negativos.

3. Para começar, vamos representar os 'números grandes' em notação científica?

- 100.000.000.000 metros =
- 100.000.000.000.000.000.000 metros =
- 100.000.000.000.000.000.000.000.000 metros =

4. Agora vamos colocar os 'números pequenos' em notação científica?

- 0,0000001 metro =
- 0,000000001 metro =

ATIVIDADE 2 • BINGO!

Nesta atividade, cada dupla deve receber uma cartela e uma porção de grãos/marcadores para fazer a indicação/marcação de certo resultado de uma operação exponencial. Cada cartela possui 6 números, sendo que cada um representa o resultado de um cálculo sorteado. Ganhará a rodada a equipe que, primeiro, preencher total e corretamente a sua cartela.

A cada cálculo sorteado e cantado pelo professor, você deve procurar na cartela seu resultado. Assim que você completar a cartela com todos os números marcados, deve falar alto “Bingo!”, e depois da conferência o professor poderá lhe dar a vitória na rodada. Após o primeiro vencedor, será dado início a uma nova rodada, quando a cartela deverá ser trocada por outra. Em cada rodada os cálculos já sorteados serão reunidos, novamente, com os demais e embaralhados.

SEGUNDA ETAPA UM NOVO OLHAR...

ATIVIDADE • CHEQUE ESPECIAL? EM ÚLTIMO CASO!

Objetivo

Reconhecer que um problema de empréstimo, a uma taxa fixa de juros, segue um modelo exponencial de crescimento.

Descrição da atividade

Nesta atividade os alunos realizarão simulações na calculadora, com a finalidade de ajudar a personagem da situação-problema a verificar a natureza do crescimento de uma dívida (rápido ou lento? proporcional ou não proporcional?). Após a verificação, os alunos devem ser capazes de reconhecer um modelo exponencial e descrever a lei da função que rege a situação-problema.

Atividade

Vocês já ouviram falar do cheque especial? O cheque especial é um empréstimo pré-aprovado pelo banco, cujo valor o cliente já encontra disponível para uso em sua conta. Caso o cliente utilize esse serviço, ele deve pagar o valor do empréstimo e os juros do cheque especial, que é uma porcentagem do valor emprestado.

Devido a uma taxa de juros alta (8% ao mês, em média), não é recomendado tomar empréstimos valores muito altos no cheque especial. Também se recomenda pagar essa dívida o quanto antes, para que seu valor não cresça muito rápido.

Por causa de uma emergência familiar, Marcos precisa tomar empréstimos R\$ 2.000,00. Seu banco cobra uma taxa de 8% ao mês de juros do cheque especial, e ele pediu ajuda à sua amiga Ester para simular quanto ele pagará se escolher utilizar o cheque especial. Vamos ajudá-los a descobrir?

- Qual valor, em reais, Marcos precisará depositar em sua conta se ele pretende pagar esse empréstimo 1 mês após tê-lo feito?

- Para Marcos ter mais possibilidades na hora do pagamento, complete a tabela a seguir, que mostra os valores a serem pagos a cada mês inteiro que passa.

MESES APÓS O EMPRÉSTIMO	CÁLCULO	VALOR A SER PAGO (SEM APROXIMAÇÃO)	VALOR A SER PAGO (COM APROXIMAÇÃO)
1	$2000 \cdot 1,08$		
2			
3			
4			
5			

- A partir da tabela da pergunta 2, escreva qual é a fórmula da função exponencial que fornece o valor a ser pago (V), em reais, em função do tempo (t), em meses.

4. Se Marcos só puder pagar a dívida após um ano, quantos reais necessitará depositar em sua conta?

5. Estime com a calculadora em quantos meses, aproximadamente, a dívida de Marcos dobrará de valor.

TERCEIRA ETAPA

FIQUE POR DENTRO!

ATIVIDADE • É O INVERSO...

Nesta atividade os alunos serão levados a reconhecer as representações algébrica e gráfica da inversa da função exponencial. A proposta é relembrar o conceito de função inversa através da troca dos eixos e das coordenadas ($x \leftrightarrow y$), e utilizar a notação $x = \log_a y$ apenas como uma forma de representar o expoente x tal que $y = a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$.

Atividade

Considere a seguinte situação hipotética: Ana, Jorge e Letícia se reuniram para realizar um trabalho de matemática sobre funções exponenciais. Além das fórmulas das funções, os alunos deveriam apresentar os seus gráficos ao professor.

Vamos ajudá-los?

1. Em certo experimento, um cientista mediu o crescimento de certas culturas de bactérias, quando expostas ao calor. Em uma delas, por exemplo, a quantidade de bactérias dobrava a cada hora. Considerando que no início do experimento a quantidade de bactérias nessa cultura tinha “tamanho 1”, como o trio de colegas deve completar a tabela a seguir?

HORAS APÓS O INÍCIO DO EXPERIMENTO	0	1	2	3	4
"TAMANHO" DA AMOSTRA	1				

2. A partir da descrição do comportamento dessa cultura bacteriana, e dos valores encontrados na pergunta 1, qual é a função que rege a variação do tamanho dessa cultura (P) em função do tempo decorrido (t), em horas?

3. Ana, Jorge e Letícia deveriam entregar, ainda, o gráfico da função que representa essa cultura. Ao chegar ao colégio, porém, viram que seu gráfico estava diferente dos colegas de outro grupo.

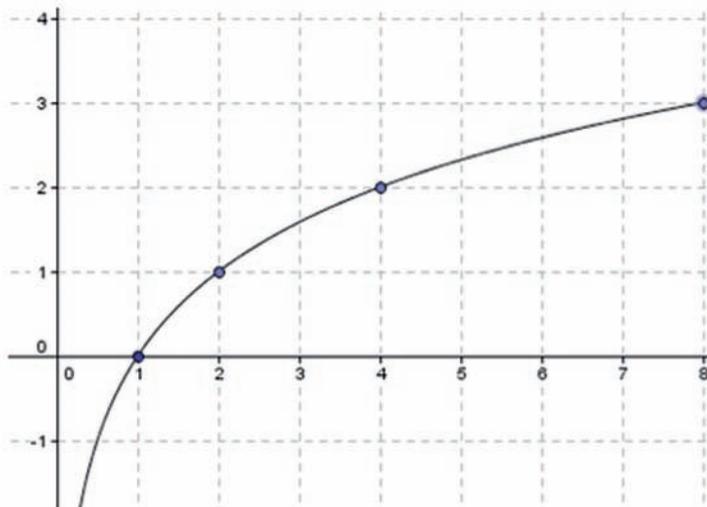


Gráfico de Ana, Jorge e Letícia.

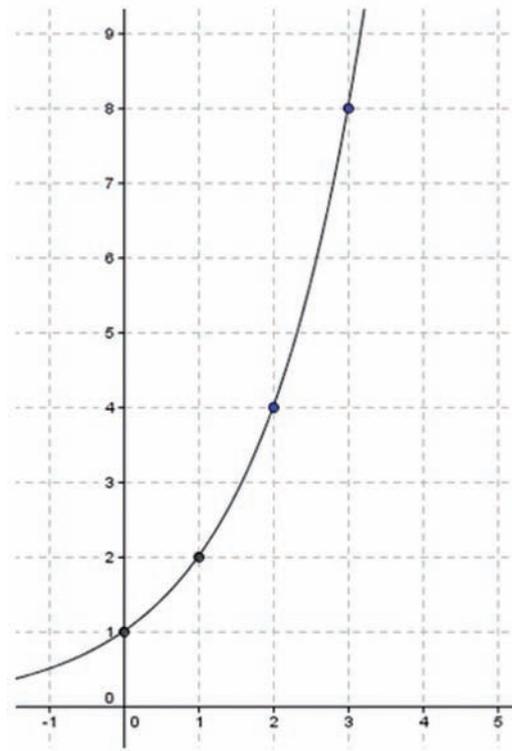


Gráfico do outro grupo.

Qual gráfico estava correto: o de Ana, Jorge e Letícia, ou o do outro grupo? Qual engano foi cometido pelo grupo que errou?

O gráfico errado na questão anterior corresponde à imagem da inversa da função P , pois, enquanto esta expressa P em função de t , a inversa expressa t em função de P . A inversa da função exponencial $P = 2^t$, de base 2, é a função logarítmica $t = \log_2 P$, também de base 2.

4. O professor da turma de Ana, Jorge e Letícia pediu uma tarefa em sala: representar algebricamente e/ou graficamente a inversa de uma função, a partir de sua fórmula e seu gráfico. Vamos ajudá-los?

a.

Gráfico de f

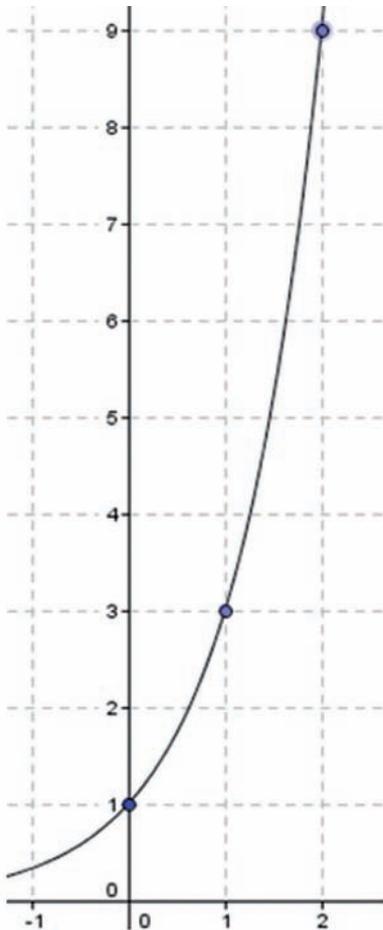
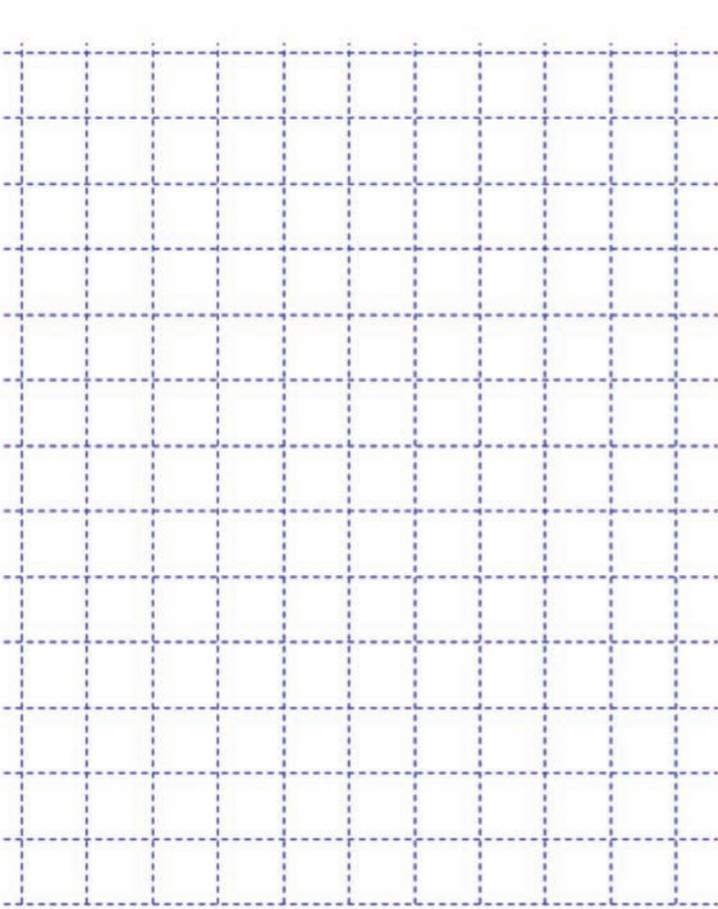


Gráfico da inversa de f



b. Fórmula de g

$$g = 5^x$$

Fórmula da inversa de g

c. Gráfico de h

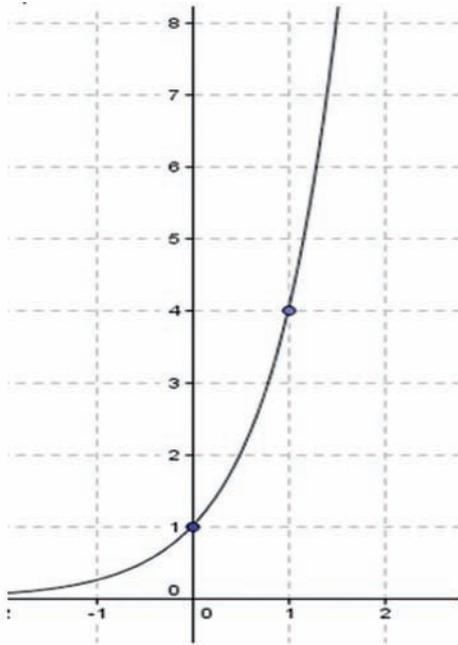
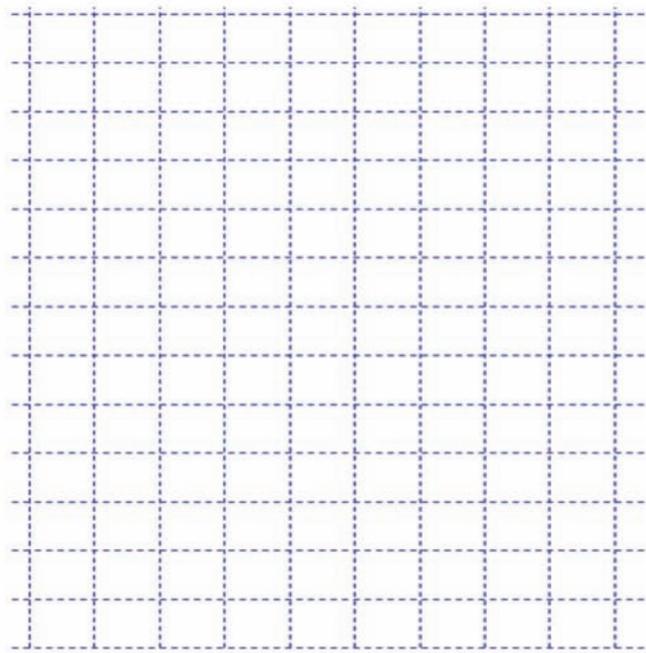


Gráfico da inversa de h



d. Fórmula de v

$$v = \log_7 x$$

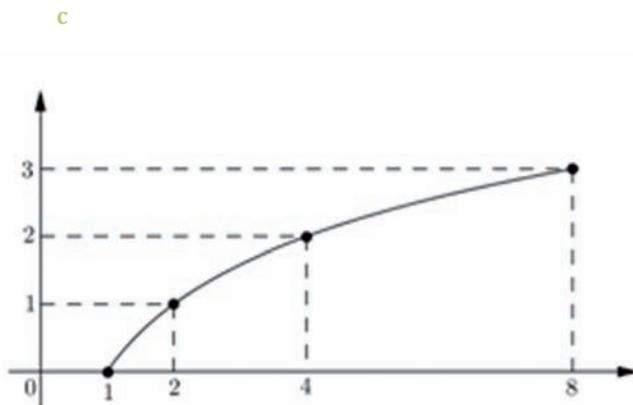
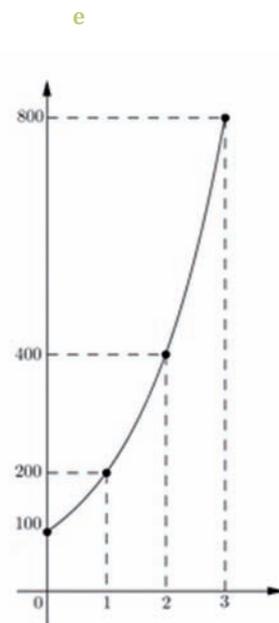
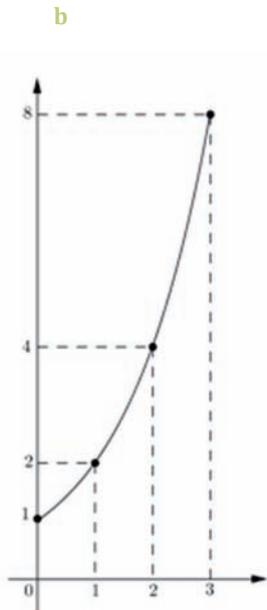
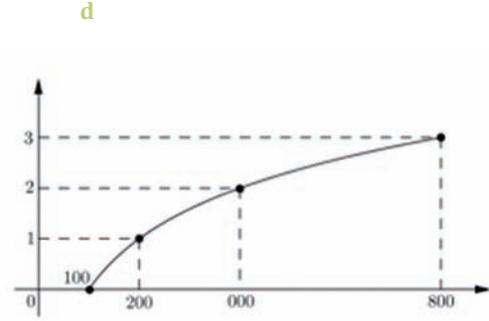
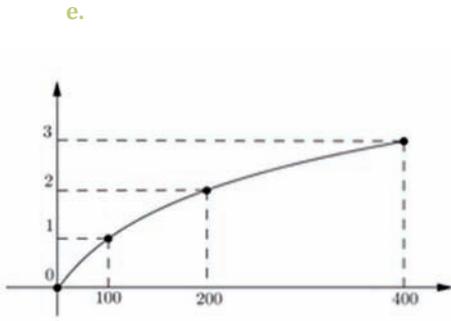
Fórmula da inversa de v

QUARTA ETAPA

QUIZ

QUESTÃO

Certo grupo de comédia, do site *You Tube*, consegue fazer com que o número de visualizações de seus vídeos dobre a cada hora após a postagem do vídeo. Em certo dia, quando havia 100 visualizações, o grupo começou a monitorar o número de acessos. Chamando de v o número de visualizações e t o tempo decorrido (em horas), o gráfico que melhor representa t em função de v é dado por:



assistisse a título de revisão para auxiliá-lo na aprendizagem do conteúdo de Função Exponencial. Disponível em

<http://www.youtube.com/watch?v=9EwnoXt0-u8> - Duração: 14 min 20 s

Indicamos, ainda, um livro, que aborda as duas funções – Exponencial e Logarítmica. A partir da página 95 é possível encontrar abordagens sobre a aplicação de escalas logarítmicas em sismógrafos.

2. **Livro:** ZAGO, Glaciete Jardim; SCIANI, Walter Antonio. **Exponencial e logaritmos**. 2ª ed. São Paulo: Érika. Estude e Use, 1996.

AGORA É COM VOCÊ!

A partir de agora vocês poderão utilizar os exercícios a seguir para se familiarizarem mais com as habilidades abordadas. Essas questões foram retiradas do banco de itens do Saerj.

1. (M100071B1) Determine o valor de y na expressão $y = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$.

a. $3^{\frac{3}{4}}$

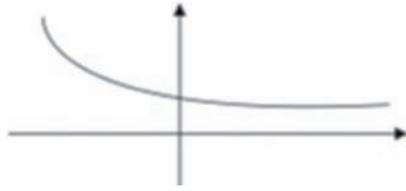
b. $3^{\frac{3}{6}}$

c. $9^{\frac{3}{4}}$

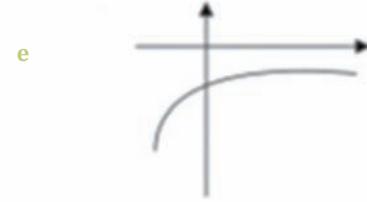
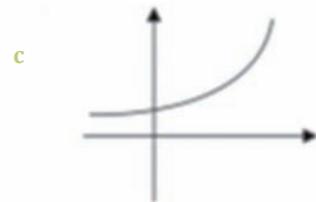
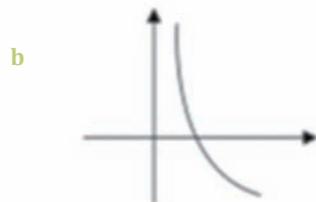
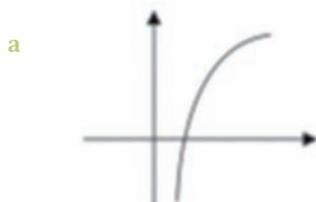
d. 9

e. 9^2

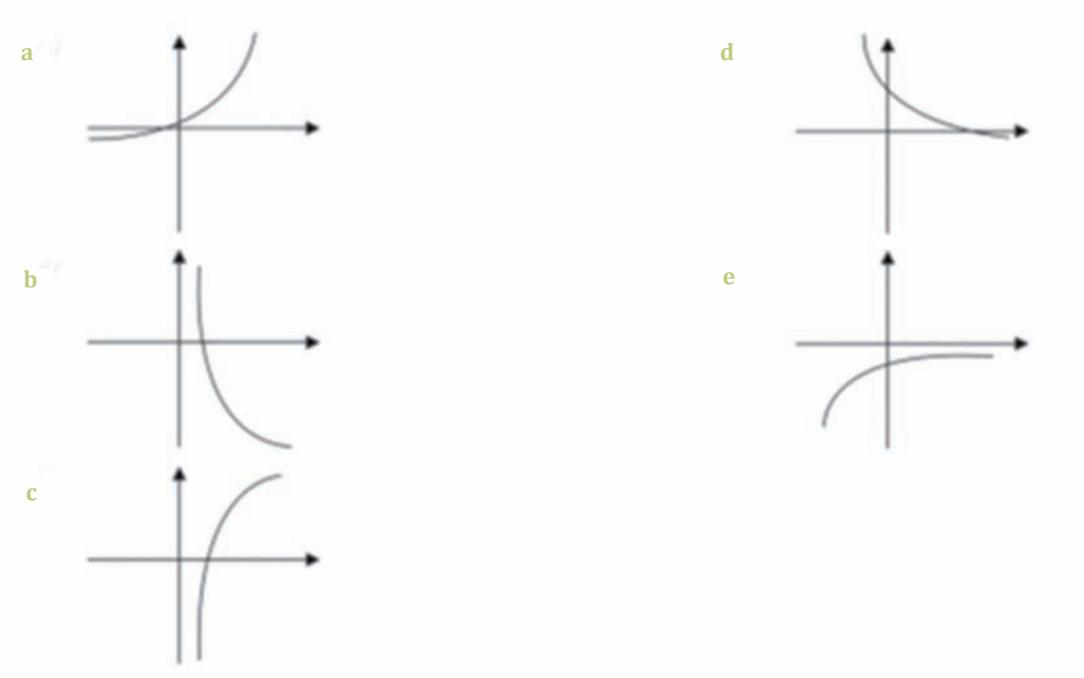
2. (PAMA11096AC) O gráfico abaixo representa a função exponencial $y = b^x$, onde b é uma constante.



Dentre os esboços abaixo, o que melhor representa o gráfico da função $y = \log_b x$ é

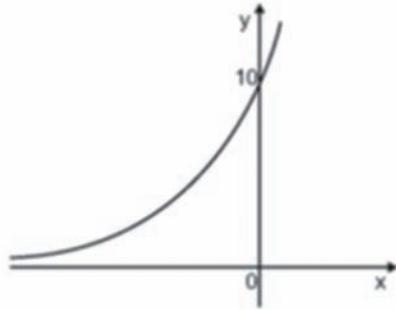


3. (M120037A9) Sendo $f(x) = a^x$, com $a > 0$, o gráfico que melhor representa a inversa de f é

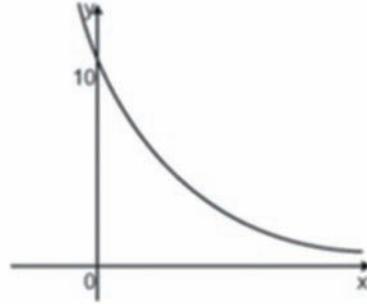


4. (M110057B1) Qual é o gráfico que melhor representa a inversa da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = 10^x$?

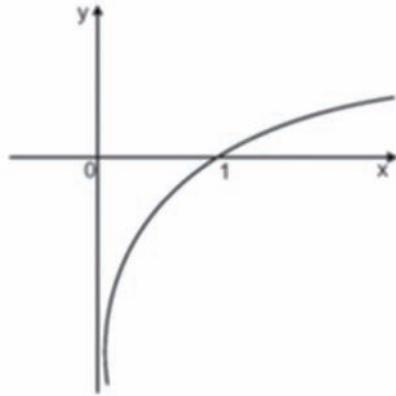
a



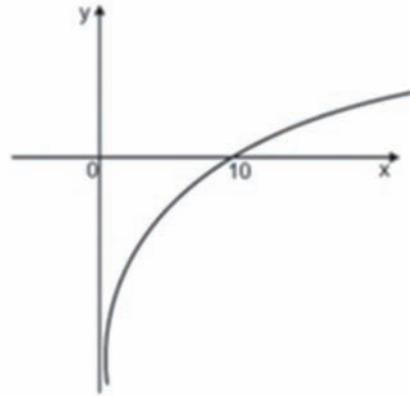
d



b



e



c

