



Ângulos desconhecidos? Nem tanto...

Dinâmica 5

1ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	1ª do Ensino Médio	Geométrico	Trigonometria na Circunferência

DINÂMICA	Ângulos desconhecidos? Nem tanto...
HABILIDADE BÁSICA	Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.
HABILIDADE PRINCIPAL	Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias.	Girando e desenhando.	25 min.	Individual.	Individual.
2	Um novo olhar...	Círculo Trigonométrico	25 min.	Individual.	Individual.
3	Fique por dentro!	Qual é o ângulo?	25 min.	Grupos de até 5 alunos.	Individual.
4	Quiz	Quiz	10 min.	Individual.	Individual.
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min.	Coletiva	Individual.
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

APRESENTAÇÃO

Você sabia que há várias situações em que é importante conhecermos o ângulo de inclinação entre dois objetos? Ou ainda, conhecer um ângulo que fornece uma mudança de direção em um determinado percurso?

Nesta dinâmica nós iremos explorar os dois tipos de situação e, também, rever e estudar mais as Equações Trigonométricas. Para isso, é importante lembrar o círculo trigonométrico, os arcos côngruos, as simetrias, os sinais do seno, do cosseno e da tangente.

Pois é, o trabalho nos espera!

Chegou a hora de por a mão na massa!

PRIMEIRA ETAPA

COMPARTILHAR IDEIAS



ATIVIDADE • GIRANDO E DESENHANDO

Objetivo

Levar o aluno a reconhecer ângulo como um giro ou mudança de direção e a identificar ângulos retos e não retos.

Descrição da atividade:

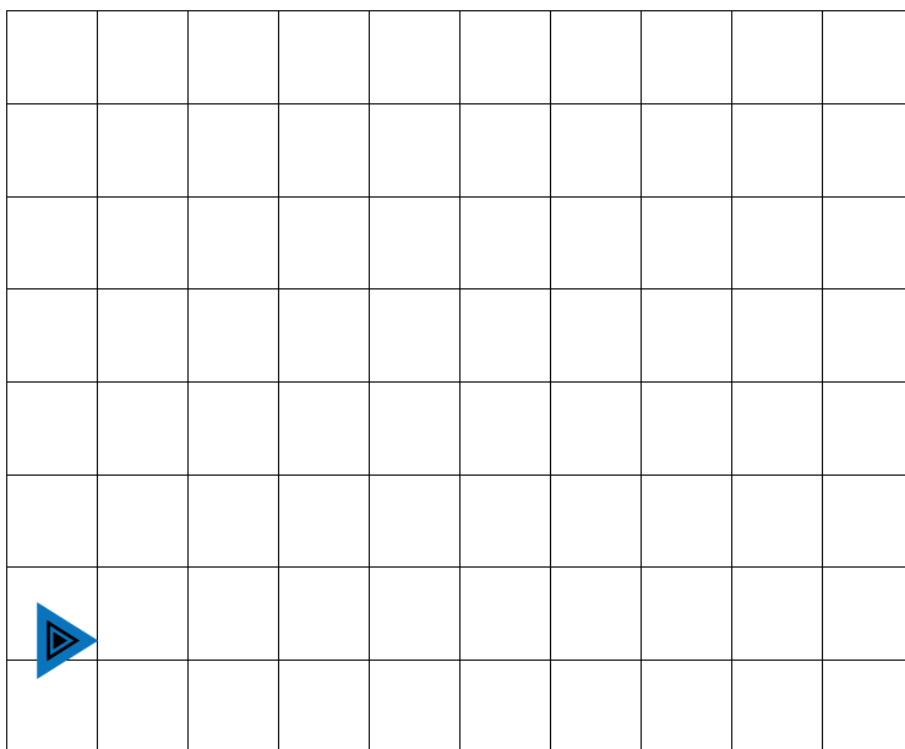
Professor,

Na Atividade 1 espera-se que o aluno consiga compreender ângulo como uma mudança de direção. Já na Atividade 2, o ângulo será abordado como giro. Dessa forma, considera-se importante que a habilidade abordada nesta etapa venha contribuir com o desenvolvimento das demais.

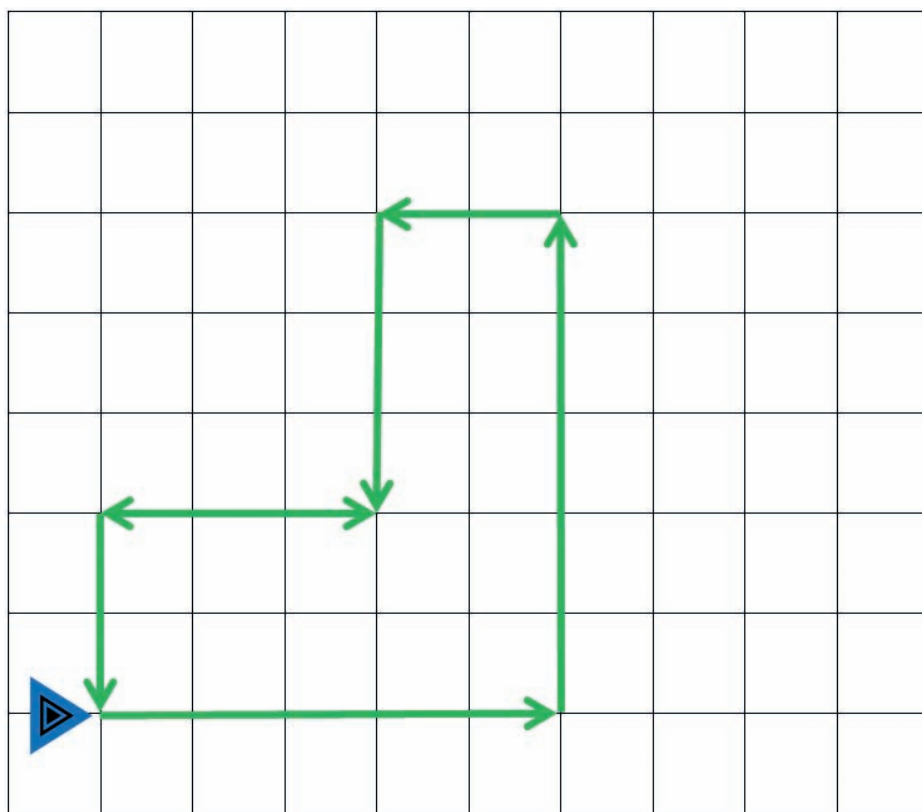
ATIVIDADE 1

Siga as orientações abaixo utilizando a malha e em seguida responda as questões. A partir do marcador:

- 1º – Ande 5 lados de quadradinho para a direita;
- 2º – Gire $\frac{1}{4}$ de volta no sentido anti-horário;
- 3º – Ande 5 lados de quadradinho para cima;
- 4º – Gire $\frac{1}{4}$ de volta no sentido anti-horário;
- 5º – Ande 2 lados de quadradinho para a esquerda;
- 6º – Gire $\frac{1}{4}$ de volta no sentido anti-horário;
- 7º – Ande 3 lados de quadradinho para baixo;
- 8º – Gire $\frac{1}{4}$ de volta no sentido horário;
- 9º – Ande 3 lados de quadradinho para a esquerda;
- 10º – Gire $\frac{1}{4}$ de volta no sentido anti-horário e
- 11º – Ande 2 lados de quadradinho para baixo.



Resposta



- a. A figura desenhada é um polígono?

Resposta

Sim. Pois é uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada.



- b. Escreva uma sequência de passos (programa) para desenhar na malha um quadrado, cujos lados meçam o tamanho do lado de 4 quadradinhos a partir do marcador.

Resposta

A partir do marcador: 1º - Ande 4 lados de quadradinho; 2º - Gire $\frac{1}{4}$ de volta para a esquerda; 3º - Ande 4 lados de quadradinho; 4º - Gire $\frac{1}{4}$ de volta para a esquerda; 5º - Ande 4 lados de quadradinho; 6º - Gire $\frac{1}{4}$ de volta para a esquerda; 7º - Ande 4 lados de quadradinho.



- c. Podemos dizer que a figura desenhada é composta de retângulos e/ou quadrados?

Resposta

Sim. Serão 16 quadrados.



- d. Observando os giros como os dados no item (a) e que você provavelmente utilizou no item (b), comente qual o motivo de serem nomeados como ângulos retos?

Resposta

Eles são nomeados dessa forma, pois correspondem a um quarto de um giro completo, ou seja, 90° dos 360° de um giro completo.



ATIVIDADE 2

Num primeiro momento, obedeça os seguintes comandos do professor:

- 1º Aluno: fazer um giro completo;
- 2º Aluno: fazer meio giro;
- 3º Aluno: fazer a metade de meio giro, e;
- 4º Aluno: fazer a metade da metade de meio giro;

Responda os seguintes questionamentos para identificar os movimentos:

- a. Você gira mais se der uma volta ou meia volta?

Resposta

Giro mais se der uma volta.



- b. Uma volta completa corresponde a quantos giros?

Resposta

Corresponde a 1 giro completo.



- c. Um giro completo é igual a quantos quartos de giro?

Resposta

Um giro completo é igual a 4 quartos de giro.



- d. Um giro completo equivale a quantos oitavos de giro?

Resposta

Um giro completo equivale a 8 oitavos de giro.



- e. Um oitavo de giro é maior ou menor que meio giro?

Resposta

Um oitavo de giro é menor que meio giro.



Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

Professor,

- As atividades abordadas na etapa devem ser realizadas individualmente, com exceção do primeiro momento da Atividade 2, o qual será realizado com a observação de todos os alunos da turma.
- Quatro alunos devem vir à frente da turma e se posicionarem em frente ao quadro branco para realizarem o primeiro momento. O critério a escolha dos 4 alunos é seu.
- Os registros devem ser individuais.



Intervenção pedagógica

Professor,

- Na Atividade 1, no item (c) você pode abordar algumas divisões do polígono em quadrados e/ou retângulo, aproveitando para desenvolver a percepção geométrica. Cabe aqui destacar que, de acordo com

Van Hiele, o aluno desenvolve sua aprendizagem em geometria em diferentes níveis de compreensão. Isso não é diferente para os ângulos, primeiro eles veem a figura geométrica como um todo e só gradativamente desenvolvem suas relações e propriedades.

- Para o item (d) da Atividade 1 você pode lembrar ao aluno que: um ângulo de 90° é um ângulo formado de lados perpendiculares entre si, por isso nomeado como ângulo reto. Esteja atento as dificuldades do aluno para escrever suas ideias sobre a questão levantada.
- Na Atividade 2, é preciso verificar se os alunos compreendem que uma parte de uma volta completa sempre terá um giro menor. Por exemplo: um oitavo de volta é oito vezes menor que uma volta completa. Esteja atento pois, os alunos podem apenas comparar os números oito e um, concluindo erradamente que um oitavo é maior.
- Para facilitar as comparações de giro, você pode orientar os alunos para girarem sempre no mesmo sentido (seja horário, seja anti-horário).



SEGUNDA ETAPA

UM NOVO OLHAR



ATIVIDADE • CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Objetivo: Descobrir o valor do seno, do cosseno e da tangente de ângulos da 1ª volta, utilizando a redução ao primeiro quadrante.

Descrição da atividade:

Professor,

A atividade é exclusivamente operacional e busca consolidar a redução de um ângulo ao correspondente no primeiro quadrante e o cálculo de razões trigonométricas de alguns ângulos da primeira volta. Na realização da atividade é apresentado um ciclo trigonométrico e valores de alguns de seus ângulos. O desenvolvimento da etapa necessita que seja consultada a Tabela de Razões Trigonômétricas para os ângulos apresentados, em anexo a este encarte. No desenvolvimento da atividade alguns tópicos como simetria e estudo dos sinais aparecerão e podem necessitar de ser lembrados.

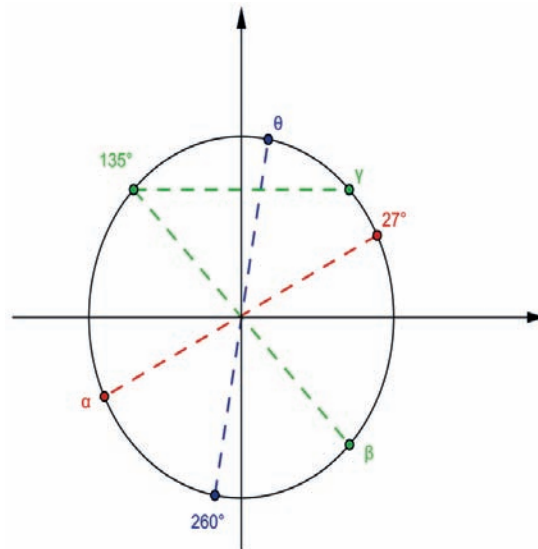
ATIVIDADE

De acordo com o círculo trigonométrico a seguir e a tabela de razões trigonométricas, responda a pergunta: Quais são os valores do: seno de α , cosseno de β , seno de γ e cosseno de θ ?

Na busca de resposta, vamos aos poucos, analisar o ciclo e procurar a resposta?

Então mãos à obra!

Veja o ciclo trigonométrico a seguir.



Verifique que existem ângulos conhecidos e desconhecidos, certo? O nosso trabalho inicial é a descoberta destes valores e a busca das razões trigonométricas na tabela em anexo a esta dinâmica.

Para encontrarmos os senos e cossenos pedidos, podemos reduzir todos os ângulos α , β , γ e θ ao primeiro quadrante para então consultarmos a tabela e obtermos os valores.

- a. Determine o valor dos ângulos α , β , γ e θ .

Resposta

Os ângulos são $\alpha = 207^\circ$, $\beta = 315^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ e $\theta = 80^\circ$.

• • • • •

- b. No caso dos ângulos α e β que estão, respectivamente, nos 3º e 4º quadrantes, faça a sua redução ao primeiro quadrante.

Resposta

Os ângulos são $\alpha = 207^\circ \equiv 27^\circ$ e $\beta = 315^\circ \equiv 45^\circ$.

• • • • •

- c. Com o auxílio da **Tabela de Senos, Cossenos e Tangentes**, determine os valores do seno de α , do cosseno de β , do seno de γ e do cosseno de θ .

Resposta

Resposta: Seno de $\alpha = -0,454$; Cosseno de $\beta = 0,707$; Seno de $\gamma = 0,707$ e cosseno de $\theta = 0,174$.



- d. Novamente com o auxílio da Tabela, verifique quais são os valores da tangente de α e da tangente de β .

Resposta

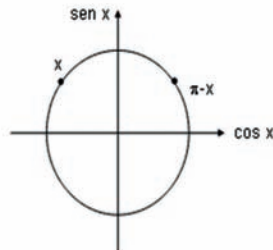
Tangente de $\alpha = 0,510$ e a tangente de $\beta = -1$.



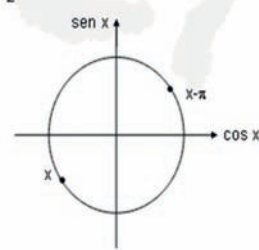
- e. Agora, descreva as fórmulas de redução de um ângulo qualquer ao seu correspondente no primeiro quadrante.

Resposta

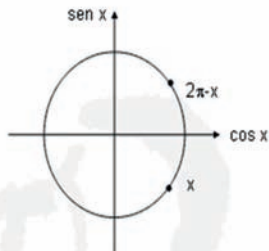
Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ então:



Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ então:



Se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ então:



Recursos necessários:

- Encarte do aluno;
- Tabela de Razões Trigonométricas, nos Anexos do encarte do aluno;
- Quadro e caneta.

Procedimentos operacionais

Professor,

- *As atividades devem ser realizadas individualmente, inclusive o registro;*
- *Lembre aos alunos que para responder as perguntas da atividade, será necessária a consulta à Tabela, que se encontra no Anexo do encarte do aluno;*
- *Leia a atividade juntamente com seus alunos.*



Intervenção pedagógica

Professor,

- *No item (a), para que o aluno encontre os valores dos quatro ângulos, será necessário relembrar dos quatro quadrantes que formam o círculo trigonométrico. Além disso, é necessária a utilização das expressões para redução de ângulos ao primeiro quadrante e conhecer as simetrias possíveis;*
- *É interessante que você represente o círculo trigonométrico no quadro branco e chame a atenção dos alunos para os ângulos 135° , γ e β , que são simétricos em relação ao eixo y e à origem;*
- *Procure não exibir a fórmula pronta e tente mediar o processo de descoberta da fórmula de redução de um ângulo ao seu correspondente no primeiro quadrante;*
- *No item (b), acreditamos que os alunos não encontrarão dificuldades, pois para descobrir os valores dos ângulos já sabe suas reduções ao primeiro quadrante;*
- *Já no item (c) e (d), os alunos podem achar que basta consultar a tabela para responder as perguntas, mas lembre-os da necessidade de fazer o estudo do sinal;*

- No item (e) generalize de forma conjunta a fórmula já utilizada nos itens anteriores. Esteja atento, pois mais uma vez pode ser necessário que você represente os círculos trigonométricos com o estudo do sinal para cada razão.



TERCEIRA ETAPA

FIQUE POR DENTRO!



ATIVIDADE • QUAL É O ÂNGULO?

Objetivo

Resolver problemas de trigonometria e estimar valores de ângulos.

Descrição da atividade:

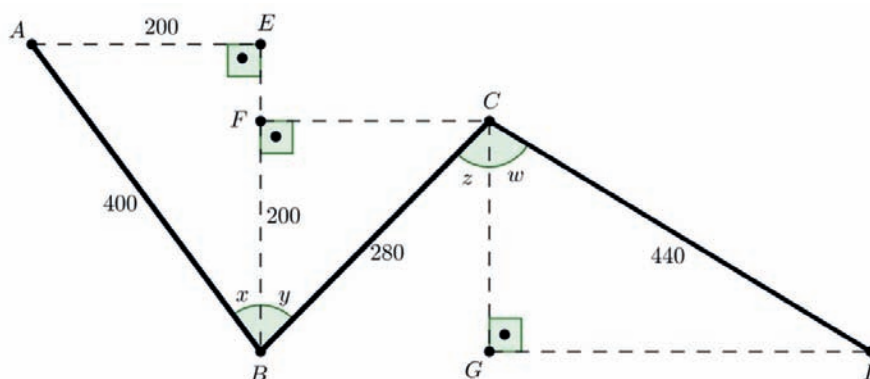
Professor,

Nesta atividade os alunos serão levados a articular seus conhecimentos sobre trigonometria para resolver uma situação problema. Após uma leitura inicial, eles deverão descobrir as medidas dos ângulos desconhecidos, utilizando a calculadora e a tabela de razões trigonométricas em anexo a este encarte.

Vamos continuar nossa viagem?

ATIVIDADE

O ônibus que Letícia e Ricardo utilizam, diariamente, percorre o caminho ABCD na figura a seguir para levá-los de casa até a escola. Queremos descobrir algumas medidas, para tanto utilizamos a representação gráfica abaixo, onde as distâncias entre cada ponto de referência estão dadas em metros.



Legenda: A: Casa, B: Praça, C: Supermercado, D: Escola, E: Lan House, F: Padaria e G: Posto de Saúde.

O ônibus precisa mudar de direção duas vezes ao longo do trajeto: uma na praça (ponto B), e outra no supermercado (ponto C).

Vamos ajudar Letícia e Ricardo a encontrar os ângulos de mudança de direção?

1. O ângulo B (dividido na figura em duas partes, x e y) é a primeira mudança de direção. Ela ocorre no sentido horário ou anti-horário? Depois, utilizando apenas a figura, você deve estimar um valor para B como maior ou menor do que um ângulo reto?

Resposta

Em B, o ônibus faz um giro no sentido anti-horário para mudar de direção. O ângulo B tem um valor que, estimando através da figura, é menor do que 90° .



2. O ângulo C (dividido na figura em duas partes, z e w) é a segunda mudança de direção. A mudança ocorre no sentido horário ou anti-horário? Depois, utilizando apenas a figura, você deve estimar um valor para B como maior ou menor do que um ângulo reto?

Resposta

Em C, o ônibus faz um giro no sentido horário para mudar de direção. O ângulo C tem um valor que, estimando através da figura, é maior do que 90° .



3. Vamos descobrir quanto medem os ângulos B e C ? Para isso vocês devem utilizar os outros pontos de referência da figura, as distâncias fornecidas, bem como os triângulos que podem ser visualizados. (Por exemplo, no triângulo ABE podemos montar a equação trigonométrica $\text{sen}(x) = \frac{200}{400}$, para descobrir o valor de x).
- a. Quais são as soluções dessa equação, na 1ª volta?

Resposta

$$\operatorname{sen} x = \frac{200}{400} \rightarrow \operatorname{sen} x = 0,5 \rightarrow x = 30^\circ \text{ ou } x = 150^\circ$$

• • • • •

- b. Qual das soluções encontradas será a resposta para o valor de x no problema?

Resposta

Pela figura vemos que x é um ângulo menor do que 90° . Logo, a solução é $x = 30^\circ$.

• • • • •

4. Expresse cada um dos ângulos y , z e w através de uma equação trigonométrica, para tanto, determine o que se pede:
- a. Encontre as soluções de cada equação, na 1ª volta.

Resposta

Ângulo y	Ângulo z	Ângulo w
$\cos(y) = \frac{200}{280} \cong 0,71$	$\cos(z) = \frac{200}{280} \cong 0,71$	$\cos(w) = \frac{200}{440} \cong 0,46$
$y \cong 45^\circ \text{ ou } y \cong 315^\circ$	$z \cong 45^\circ \text{ ou } z \cong 315^\circ$	$w \cong 63^\circ \text{ ou } w \cong 297^\circ$

• • • • •

- b. Diga quais soluções são as mais adequadas para resolver a situação problema inicial?

Resposta

Como y , z e w são menores do que 90 , as soluções mais adequadas são $y \cong 45^\circ$, $z \cong 45^\circ$, e $w \cong 63^\circ$.

• • • • •

5. Qual é o valor aproximado do ângulo B?

Resposta

Como $B = x + y$, seu valor é de aproximadamente 75° .



6. Qual é o valor aproximado do ângulo C?

Resposta

Como $C = z + w$, seu valor é de aproximadamente 108° .



Recursos necessários:

- Encarte do aluno;
- Tabela de Razões Trigonométricas anexa a esta dinâmica;
- Calculadora;
- Quadro branco e caneta.

Procedimentos operacionais

Professor,

- Oriente a divisão dos grupos com o mesmo número de componentes (até um máximo de 5 componentes por grupo);
- O registro das atividades deve ser realizado de forma individual;
- Tome cuidado para que haja pelo menos uma calculadora em cada grupo;
- Chame a atenção dos alunos para situações onde será necessária a consulta à Tabela de Razões Trigonométricas.



Professor,

- As perguntas 1 e 2 são rápidas, e visam a uma verificação da aprendizagem dos conceitos revistos na 1ª Etapa desta dinâmica;
- A pergunta 3 ilustra, com um exemplo, a montagem de uma equação trigonométrica que leva ao valor de x . Verifique no decorrer da dinâmica se ficou claro que foi utilizado o seno devido aos dados que estão presentes no triângulo ABE. O objetivo da letra (a) é chamar a atenção dos alunos de que, na 1ª volta, a equação dada possui duas soluções, e não apenas uma (a que é mais adequada ao problema). Destaque a importância de saber encontrar ambas, e não apenas a que pertence ao 1º quadrante do círculo trigonométrico;
- Para responder a pergunta 4, os alunos devem considerar valores aproximados, pois o quociente obtido para cada equação é um valor aproximado. Será necessário orientá-los na busca desse valor aproximado na Tabela de Razões Trigonômicas, lembrando-os dos critérios de arredondamento.



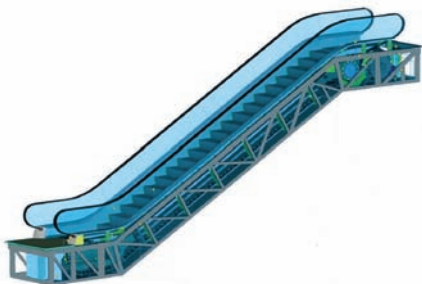
QUARTA ETAPA

Quiz

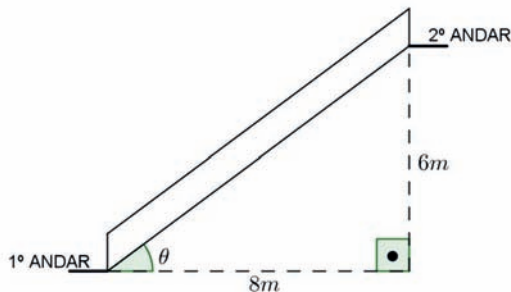


QUESTÃO

Uma escada rolante será instalada em um shopping, para ligar o 1º ao 2º andar. Uma imagem da escada, assim como um esquema simplificado com algumas medidas exigidas pelo shopping se encontra na figura a seguir:



Escada (<http://portuguese.alibaba.com>)



Esquema (fora de escala)

A medida aproximada do ângulo θ , em graus, é de:

- a. 10°
- b. 37°
- c. 41°
- d. 49°
- e. 53°

Para responder a esta questão consulte a tabela de razões trigonométricas do Anexo.

QUINTA ETAPA

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ



Resolução

Utilizando a razão trigonométrica ($tg(\theta) = \text{cat. oposto/cat. adjacente}$) e apenas as medidas dadas na figura, montamos a equação trigonométrica $tg(\theta) = \frac{6}{8} = 0,75$. Consultando a tabela do anexo, chegamos a medida aproximada de 37° para θ .

Gabarito: letra B)

Possíveis erros:

O aluno que marcou a letra (A) utiliza o Teorema de Pitágoras e encontra a medida do 3º lado do triângulo do esquema, fornecendo-o como resposta.

O aluno que marcou a letra (C) monta o quociente $\frac{6}{8}$, mas não o identifica como o valor de $tg(\theta)$, e sim de $\cos(\theta)$.

O aluno que marcou a letra (D) monta o quociente $\frac{6}{8}$, mas não o identifica como o valor de $tg(\theta)$, e sim de $\sin(\theta)$.

O aluno que marcou a letra (E) monta o quociente $\frac{8}{6}$, o identifica como representante de uma tangente, mas não percebe que o mesmo não se refere ao valor de $tg(\theta)$, e sim de $tg(90^\circ - \theta)$.



ETAPA FLEX

PARA SABER +

Prezados,

Recomendamos o livro “O conceito de ângulo e o ensino de geometria”, das autoras Maria Ignez de Souza Vieira Diniz e Kátia Cristina Stocco Smole - IME-USP. Ele contém interessantes sugestões referentes à habilidade básica desta dinâmica.

Há também um guia com técnicas para transformar equações trigonométricas em equações simples, no *link* a seguir. Recomendamos que o acesse e avalie as possibilidades de utilização, de acordo com o nível de seus alunos.

- <http://guiadoestudante.abril.com.br/estudar/matematica/equacoes-inequacoes-trigonometricas-677858.shtml>

Da Coleção do Professor de Matemática, publicada pela SBM, recomendamos o livro Trigonometria - Números Complexos, de Manfredo Carmo, Augusto Morgado e Eduardo Wagner. Este livro destina-se a você, professor, e contém a trigonometria da educação básica e um bom embasamento matemático.

Abaixo temos dois *links* um representa uma revisão rápida das razões trigonométricas e o outro que auxiliam na compreensão das razões trigonométricas e as relações gerais.

- <http://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes.php>
- http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/trigonometricas/rz_trigo_triret.htm/rz_trigo_triret.htm

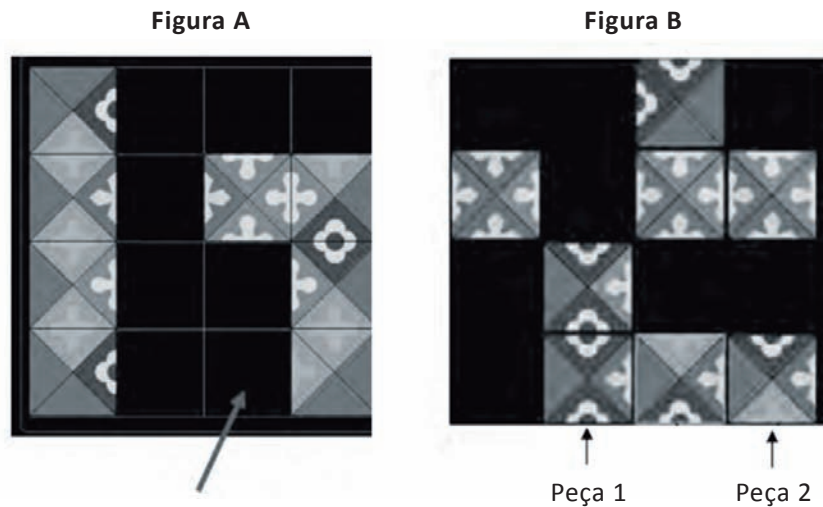
Outra boa opção para relembrar as razões trigonométricas é o vídeo abaixo.

- <http://www.youtube.com/watch?v=vXthrWzfvjY>

AGORA, É COM VOCÊ!

A partir de agora vocês poderão utilizar os exercícios a seguir para se familiarizarem mais com as habilidades abordadas nesta dinâmica.

1. (ENEM-2009) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.



Disponível em: <http://pt.eternityl.com>. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça

- 1 após girá-la 90° no sentido horário.
- 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.
- 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.
- 2 após girá-la 180° no sentido horário.
- 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

Resposta

Gabarito: letra (C)

O aluno deve perceber que a peça a ser colocada na posição da seta (Figura A) precisa completar um quadrado cinza claro, sem estampa. Como a Peça 1 não possui tal quadrado, a solução é usar a Peça 2. Das transformações sugeridas nas letras: (C), (D) e (E), apenas a letra (C) permite completar a figura adequadamente.



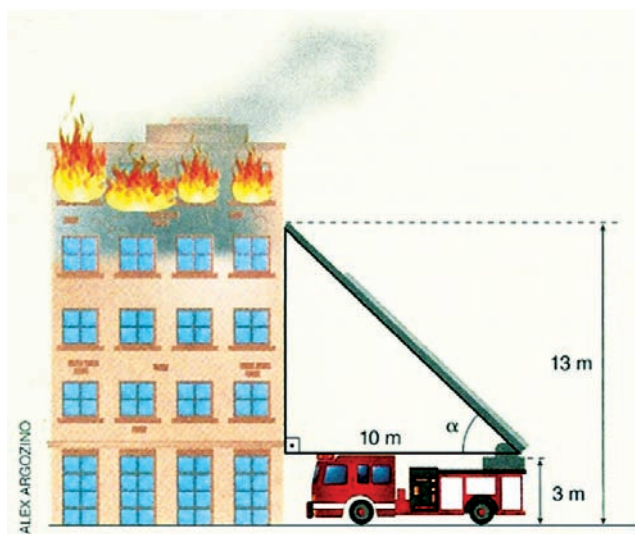
- As soluções da equação $\text{tg}(x) = \sqrt{3}$, na 1ª volta do círculo trigonométrico são:
 - 30° e 150°.
 - 30° e 210°.
 - 60° e 120°.
 - 60° e 240°.
 - 60° e 300°.

Gabarito: letra (D)

O aluno encontra o ângulo do 1º quadrante que atende a equação ($x=60^\circ$), e encontra seu correspondente no 3º quadrante ($x=240^\circ$).



3. O último andar de um prédio começou a pegar fogo, mas para sorte dos moradores, o corpo de bombeiros chegou rapidamente para combater as chamas. Observe a figura a seguir:



PAIVA, Manoel. Matemática, 1ª Ed. Moderna 2009, SP, p.68.

O ângulo de abertura da escada magirus assinalado na figura tem como medida

- a. 30° .
- b. 45° .
- c. 60° .
- d. 75° .
- e. 90° .

Resposta

Gabarito: letra (B)

Calculando a diferença $13 - 3 = 10$, descobrimos que o lado do triângulo comum à parede mede 10 m. Logo, podemos montar a equação $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{10}{10}$, cuja solução no 1º quadrante (e coerente com a figura) é $\alpha = 45^\circ$.

• • • • •

4. Joana resolveu, na 1ª volta do círculo trigonométrico, a equação $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, mas não acertou toda a questão porque deu como resposta $x=30^\circ$. Seu professor lhe disse que a resposta estava incompleta, pois o ângulo x também admite como resposta o valor:

- a. 330° .
- b. 315° .
- c. 300° .
- d. 270° .
- e. 240° .

Resposta

Gabarito: letra (A). A aluna resolveu a equação e encontrou apenas a sua solução no 1º quadrante (30°), desconsiderando a outra solução da equação (330°).

• • • • •

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

ÂNGULO	SENO	COSENSO	TANGENTE	ÂNGULO	SENO	COSENSO	TANGENTE
1°	0,017	1,000	0,018	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,088	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,425	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,748
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

Os valores foram apresentados até a casa dos milésimos.

