Reforço escolar · Matemática ·

Esopo, castanhas... e viva a sopa de letrinhas!

Dinâmica 1

2ª Série | 4º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 1ª	Algébrico-Simbólico	Sistemas Lineares

DINÂMICA	Esopo, castanhas... e viva a sopa de letrinhas!
HABILIDADE BÁSICA	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
HABILIDADE PRINCIPAL	Resolver situação- problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Estado de Educação
Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Ciência e Tecnologia
Fundação CECIERJ – Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Adoro sopa de letrinhas!	15 a 25 min.	Em duplas com discussão coletiva	Individual
2	Um novo olhar ...	Uma fábula de Esopo.	25 a 30 min.	Em duplas com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Haja castanha!	15 a 20 min.	Em duplas com discussão coletiva	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

A álgebra é uma das dificuldades que os alunos encontram na Educação Básica. Nós, professores, não podemos considerar que ela esteja consolidada no Ensino Fundamental e, por isso, temos que retomar alguns aspectos importantes sempre que possível. Por esse motivo, na Etapa 1, abordamos a transcrição da escrita textual para a linguagem matemática e, vice- versa e nas etapas 2 e 3, por meio de situações- problema, buscamos identificar a partir de textos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas, respectivamente. No caso do sistema de ordem 2, a proposta incluiu também a sua solução.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira etapa
Compartilhar ideias

25 MINUTOS

Atividade • Adoro sopa de letrinhas!

Objetivo

Relacionar a linguagem corrente e a linguagem algébrica.

Descrição da Atividade

Professor/a, nessa etapa os alunos devem experimentar a linguagem algébrica por meio da transcrição da linguagem textual para a matemática, e vice-versa. Veja a proposta da atividade.

Nessa etapa você e seu colega devem traduzir sentenças, algumas vezes da linguagem corrente para a linguagem matemática e em outras ao contrário.

1. O triplo de um número é 6. Você pode adivinhar que número é esse? Justifique sua resposta.

Resposta

Sim, 2. O triplo de 2 é 6, porque $3 \cdot 2 = 6$.

• • • • •

2. E, agora, como você pode representar, em linguagem matemática, um número qualquer?

   E o triplo desse número?

Resposta

Por meio de uma letra ou símbolo. Por exemplo, se y representa um número qualquer, 3y representa o triplo desse número.

• • • • •

3. Em cada linha da tabela expressamos uma sentença em uma linguagem. Complete a tabela, traduzindo cada sentença na outra linguagem.

Linguagem Textual	Linguagem Matemática
O dobro de x	
	4x
A soma entre o dobro de um número e 4	
A diferença entre o quadrado de a e 6	
	$2(x+4)$
O cubo de a mais o dobro de x	
	$5a-\frac{y}{6}$
O quociente entre o triplo de x e 2	
	x+y

Resposta

Linguagem Textual	Linguagem Matemática
O dobro de x	2x
O quádruplo de um número	4x
A soma entre o dobro de um número e 4	2x+4
A diferença entre o quadrado de a e 6	a^2-6
O dobro da soma de um número com 4	$2(x+4)$
O cubo de a mais o dobro de x	a^3+2x
O quíntuplo de a subtraído da sexta parte de y	$5a-\frac{y}{6}$
O quociente entre o triplo de x e 2	$\frac{3x}{2}$
Um número adicionado de outro número	x+y

Professor

4. Sílvio, um professor muito brincalhão, falou para seu aluno:.

Sou capaz de adivinhar a sua idade! Quer ver?
Multiplique-a por 4.
Some 20.
Subtraia o dobro da sua idade.
Tire 10.
Agora, some o triplo da sua idade.
Agora, me diga o resultado.

E o aluno disse, 90.
O professor Sílvio rapidamente afirmou: Você tem 16 anos!
O aluno ficou encantado e logo descobriu como o professor fez para adivinhar a sua idade.
Agora, você também descobrirá como Sílvio adivinhou a idade de seu aluno.

a. Preencha a tabela a seguir.

FALA DO PROFESSOR SÍLVIO	REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA
Pense na sua idade	x
Multiplique sua idade por 4	
Some 20 ao resultado	
Subtraia o dobro da sua idade	
Tire 10	
Some o triplo da sua idade ao resultado	
Diga o resultado final	

Resposta

FALA DO PROFESSOR SÍLVIO	REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA
Pense na sua idade	x
Multiplique sua idade por 4	4x
Some 20 ao resultado	4x + 20
Subtraia o dobro da sua idade	$4x+20-2x \rightarrow 2x+20$
Tire 10	$2x+20-10 \rightarrow 2x+10$
Some o triplo da sua idade ao resultado	$2x+10+3x \rightarrow 5x+10$
Diga o resultado final	$5x+10$

b. Usando a expressão que você encontrou e o resultado final dito pelo aluno, encontre a idade do aluno.

Resposta

Resolvendo a equação $5x+10=90$*, você descobre a idade de seu amigo!*

$5x=90-10 \rightarrow 5x=80 \rightarrow x=80\div 5 \rightarrow x=16$

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Professor/a, esta atividade foi planejada para que a turma esteja organizada em duplas.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor/a, se julgar pertinente, discuta um pouco com os alunos que a letra, geralmente utilizada na linguagem algébrica, pode ser uma incógnita, cujo valor determina-se com exatidão levando em consideração as restrições do problema (resolução de equação), ou ainda pode ser uma variável que representa um número genérico, ou seja, aquela letra que aparece em generalizações (função e fórmulas).*
- *Na questão 1, o número mencionado pode ser representado por uma letra, que neste caso é uma incógnita, uma vez que é pensada como tendo valor particular (mas inicialmente desconhecido), enquanto na questão 2, a letra é usada como variável, pois pode assumir infinitos valores. Na questão 3 e na questão 4 item (a), as letras assumem o papel de variável. Já no item 4 (b), a letra torna-se uma incógnita no momento em que aluno deve resolver a equação.*
- *Na questão 3, pode ocorrer de os alunos trocarem a ordem das operações, confundindo os itens "A soma entre o dobro de um número e 4" e " ". Nesse caso, na tabela aparecem as duas formas, mas os alunos devem saber expressar-se corretamente independente do apa-*

recimento das situações possíveis de confusão. Uma ideia é você pedir que os alunos representem o dobro da soma e a soma do dobro, ou ainda, o quadrado do produto e o produto do quadrado.

- *Na questão 4, caso os alunos tenham dificuldade em compreender como o aluno de Síilvio chegou nao número 90, aconselhamos a organização das informações em uma tabela como a seguinte.*

Fala do professor Sílvio	Cálculos mentais realizados pelo aluno
Pense na sua idade	16
Multiplique sua idade por 4	
Some 20 ao resultado	
Subtraia o dobro da sua idade	
Tire 10	
Some o triplo da sua idade ao resultado	
Diga o resultado final	90

- *Já no item 4 (a) oriente os alunos para que reduzam as expressões, principalmente quando subtraíremem o dobro da idade e somam o triplo.*
- *Seus alunos ainda podem ter dificuldade em formar a equação no item 4 (b), nesse caso, mostre a eles que 90, bem como , representam a mesma coisa.*

Segunda etapa
Um novo olhar...

Atividade • Uma fábula de Esopo.

Objetivo

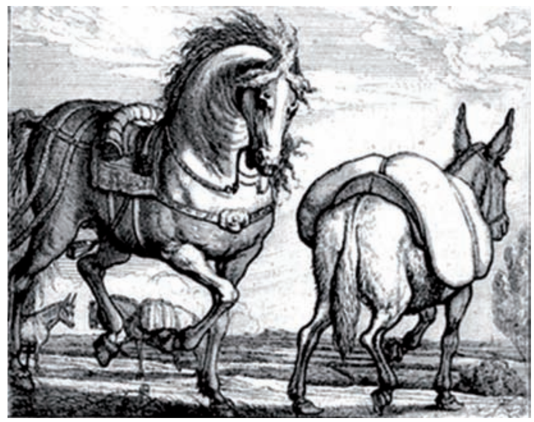
Identificar e resolver sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.

Descrição da Atividade

Professor/a, nesta etapa, assim como na anterior, pretendemos que os alunos se habituem com aà linguagem algébrica. Para isso, devem transcrever o texto apresentado da linguagem textual para a linguagem matemática, bem como, identificar e resolver um sistema linear de duas equações e duas incógnitas. Veja a proposta a seguir.

Na Grécia Antiga as fábulas eram muito populares. Nesta atividade, apresentamos um problema, baseado numa fábula de Esopo, escritor grego, que viveu no século VI a.C.. Suas fábulas tornaram-se clássicos da cultura ocidental e muitos escritores, como Monteiro Lobato, por exemplo, as recriaram. As fábulas de Esopo geralmente envolvem animais personificados, como a que apresentamos a seguir, na qual um burro e um cavalo dialogam.

Inicialmente, você e seu colega devem ler o diálogo. Vamos à história!



O Cavalo e o burro, ilustração de Frances Barlow, metade do século XVII.

Um cavalo e um burro caminhavam juntos carregando, cada um, pesados sacos. Como o cavalo reclamava muito de sua pesada carga, respondeu-lhe o burro.

- De que te queixas? Se me desses um saco, minha carga seria o dobro da tua, mas se eu te der um saco, tua carga será igual à minha.

O cavalo ficou pensando se tinha razão em reclamar.

O que você acha?

Vamos verificar!

Como temos dois valores desconhecidos, vamos usar a álgebra para nos ajudar. Para começar, indicamos a quantidade inicial de sacos da carga de cada animal por uma letra.

Número inicial de sacos da carga do burro.	b
Número inicial de sacos da carga do cavalo.	c

Observe a seguir a tradução da primeira parte da história:.

Professor

INFORMAÇÃO DO TEXTO		LINGUAGEM MATEMÁTICA
"Se me desses um saco"	Número de sacos do burro.	b - 1
	Número de sacos do cavalo.	c + 1
"minha carga seria o dobro da tua"		$b+1=2(c-1)\rightarrow$ $\rightarrow b+1=2c-2\rightarrow$ $\rightarrow b-2c=-2-1\rightarrow$ $\rightarrow b-2c=-3$

1. Agora, chegou a sua vez!

Preencha a tabela abaixo completando a tradução.

INFORMAÇÃO DO TEXTO		LINGUAGEM MATEMÁTICA
"Se me desses um saco"	Número de sacos do burro.	
	Número de sacos do cavalo.	
"minha carga seria o dobro da tua"		

Resposta

INFORMAÇÃO DO TEXTO		LINGUAGEM MATEMÁTICA
"Se me desses um saco"	Número de sacos do burro.	b - 1
	Número de sacos do cavalo.	c + 1
"minha carga seria o dobro da tua"		$b-1=c+1\rightarrow$ $\rightarrow b-c=1+1\rightarrow$ $\rightarrow b-c=2$

2. O texto nos fornece duas equações. Escreva-as, formando um sistema.

Resposta

$$\begin{cases} b-2c=-3 \\ b-c=2 \end{cases}$$

3. Resolva o sistema e determine a quantidade inicial de sacos que cada animal carregava.

Em seguida, avalie se o cavalo tinha motivos para reclamar.

Resposta

O burro carregava 7 sacos e o cavalo, 5. Logo, a carga do cavalo era, de fato, inferior aà do burro.

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Mantenha a turma organizada como na etapa anterior.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor/a, é muito comum o uso das letras x e y para expressar números desconhecidos. Destaque com os alunos que podemos utilizar outras letras, por exemplo, nesse problema, podemos associar os números desconhecidos com as inicias do burro e do cavalo.*
- *No item 1, é importante que você discuta com eles sobre a escrita matemática da sentença que eles devem traduzir. Observe que nesta sentença há uma ação de transformação em relação ao valor inicial. Caso eles não compreendam, você pode mostrar a eles que a afirmação feita pelo burro "se eu te der um saco" significa que o burro terá um saco a menos e o cavalo, um saco a mais.*
- *Quando escreverem o sistema no item 2, como a primeira equação já foi dada, é provável que ela apareça como na resposta indicada. Entretanto, a segunda equação pode ser escrita de outras maneiras, como, por exemplo. É importante que você valide as diferentes formas de escrita apresentadas pelos alunos e mostre que elas são equivalentes.*

- *No item 3, os alunos podem resolver o sistema pelo método que desejarem. Explore os raciocínios que não usam os processos algébricos, pois geralmente são baseados em um raciocínio interessante e que deve ser valorizado no contexto escolar.*

Terceira etapa

Fique por dentro!

20 MINUTOS

Atividade • Haja castanha!

Objetivo

Identificar sistemas lineares com três equações e três incógnitas.

Descrição da Atividade

Nesta etapa, os alunos devem identificar o sistema linear de três equações e três incógnitas correspondente à situação descrita, através da tradução do problema para a linguagem matemática. Veja a proposta.

Você e seu colega devem ler o problema a seguir.

Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que cada lata deve conter 1 quilo da mistura e custará R$ 12,00. Sabe-se também que o quilo de amendoim custa R$ 6,00, o quilo de castanha de caju custa R$ 20,00, e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Além disso, a soma das quantidades de amendoim e de castanha-do-pará deve ser o triplo da quantidade de castanha de caju.

1. Identifique cada uma das grandezas que aparecem na situação descrita anteriormente por uma letra de sua preferência.

GRANDEZA	LETRA
Quantidade (em quilograma) de amendoim.	
Quantidade (em quilograma) de castanha de caju,	
Quantidade (em quilograma) de castanha-do-pará.	

Resposta

GRANDEZA	LETRA
Quantidade (em quilograma) de amendoim.	a
Quantidade (em quilograma) de castanha de caju,	c
Quantidade (em quilograma) de castanha-do-pará.	p

2. Preencha a tabela a seguir descrevendo em linguagem matemática cada sentença.

INFORMAÇÃO DO TEXTO	LINGUAGEM MATEMÁTICA
"Sabe-se que cada lata deve conter 1 quilo da mistura..."	
"... custará R$ 12,00. Sabe-se também que o quilo de amendoim custa R$ 6,00, o quilo de castanha de caju custa R$ 20,00, e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00."	
"... a soma das quantidades de amendoim e de castanha-do-pará deve ser o triplo da quantidade de castanha de caju."	

Resposta

INFORMAÇÃO DO TEXTO	LINGUAGEM MATEMÁTICA
"Sabe-se que cada lata deve conter 1 quilo da mistura..."	$a+c+p=1$
"... custará R$ 12,00. Sabe-se também que o quilo de amendoim custa R$ 6,00, o quilo de castanha de caju custa R$ 20,00, e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00."	$6a+20c+16p=12$
"... a soma das quantidades de amendoim e de castanha-do-pará deve ser o triplo da quantidade de castanha de caju."	$a+p=3c \rightarrow$ $\rightarrow a-3c+p=0$

• • • • •

3. Qual é o sistema linear que descreve essa situação?

Reposta

$$\begin{cases} a+c+p=1 \\ 6a+20c+16p=12 \\ a-3c+p=0 \end{cases}$$

• • • • •

Professor

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Mantenha a turma organizada em duplas.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor/a, é muito importante que os alunos, ao escolherem as letras, tenham clareza do que cada uma delas representa. Por isso, é interessante que eles escolham as letras de acordo com uma associação com a grandeza que ela representa, como sugerimos no padrão de resposta. No entanto, isso não é o fundamental! O que é fundamental é que eles saibam o que cada letra representa. Nesse caso, eles devem ter clareza, por exemplo, de qual letra representa a quantidade de amendoins, seja a, x ou m. Isso porque, geralmente, os alunos não têm esse hábito, o que pode ter reflexos negativos, por exemplo, usando uma letra no lugar da outra. Por isso, quando os alunos forem montar as equações, é importante que eles retomem à associação feita no item 1.*

- *Na transcrição das equações, além de compreender a relação entre as linguagens corrente e matemática, é muito importante que você chame atenção que as equações se formam a partir de relações de natureza diferentes: a primeira, a partir da relação com o peso (peso de cada grão e o peso total da mistura), a segunda a partir do preço (preço do quilo de cada grão e o preço total) e a terceira, também a partir da relação com o peso (relação entre os pesos de cada grão).*

- *Os alunos não devem encontrar muitas dificuldades para escreverem a primeira equação, o que não deve acontecer na segunda. No caso de dúvida, use alguns exemplos para mostrar que, se   representa a quantidade de amendoinm, então, representa o preço pago por essa quantidade, uma vez que o preço do quilo de amendoim é R$ 6,00. O mesmo raciocínio pode ser usado para as castanhas de caju e do pará.*

- *Já para a última equação, acreditamos que o trabalho realizado nas outras etapas, ajude os alunos, mas, caso eles ainda tenham dificuldade, oriente-os pensando separadamente em cada parte da oração.*

Quarta etapa
Quiz

10 MINUTOS

Se André der R$ 3,00 a Bruno, então ambos ficarão com a mesma quantia. Se a quantia de Bruno dobrar, então Bruno ficará com R$ 12 a mais do que André.

Qual dos sistemas representa a situação descrita acima?

a. $\begin{cases} x = y \\ 2y = x + 12 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ x = y + 12 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ 2x = y + 12 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2y = x + 12 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x = y + 12 \end{cases}$

Quinta etapa
Análise das respostas ao quiz

15 MINUTOS

Resposta

Sejam x e y as quantias, em reais, que André e Bruno possuem, respectivamente.

Cada trecho do problema pode ser escrito na linguagem algébrica como a seguir:

INFORMAÇÃO DO TEXTO	LINGUAGEM ALGÉBRICA
“Se André der R$ 3,00 a Bruno, então ambos ficarão com a mesma quantia.”	$x - 3 = y + 3$
“Se a quantia de Bruno dobrar, então Bruno ficará com R$ 12 a mais do que André.”	$2y = x + 12$

Assim, o sistema linear que representa o problema proposto é e, portanto, a alternativa correta é a letra (d).

Erros Possíveis

O aluno que escolheu a alternativa (a) pode ter considerado apenas a informação de que André e Bruno ficaram com o mesmo valor, ou seja, . O aluno que escolheu a alternativa (b) pode ter interpretado de forma equivocada o trecho "Se a quantia de Bruno dobrar, então Bruno ficará com R$ 12 a mais do que André", esquecendo-se de que, se a quantia de Bruno dobra, então o coeficiente 2 é necessário na segunda equação. Já quem escolheu as alternativas (c) ou (e) pode ter interpretado corretamente a primeira equação, mas inverteu as variáveis ao descrever a segunda.

• • • • •

Etapa flex

Para saber +

O Filho da Lua!

Há aproximadamente 3600 anos, viveu no Egito um escriba chamado Aahmesu, cujo nome significa "filho da lua". Ele era muito menos importante que o faraó, é claro, mas hoje é bem mais famoso que muitos soberanos do Egito.

Conhecido nos meios científicos por Ahmes, ele é o autor de uma das mais antigas obras de Matemática de que se tem notícia: o Papiro de Ahmes, que está guardado num Museu Britânico. Com 5,5 metros de comprimento por 32 centímetros de largura, o Papiro de Ahmes contém 80 problemas, todos resolvidos.

A maior parte dos problemas refere-se a assuntos do dia a dia dos antigos egípcios: o preço do pão e da cerveja, a alimentação do gado, a quantidade de grãos de trigo armazenados. Alguns, no entanto, eram do tipo "Determinar um número tal que...". Ou seja, não se referiam a coisas concretas, mas aos próprios números.

Nesses problemas, o número procurado era sempre representado pela mesma palavra: montão.

Veja um exemplo:

Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

Hoje podemos traduzir o problema para a Álgebra, através da equação a seguir.

$$x+\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x=26$$

Resolvendo a equação, encontramos , ou seja, o tal montão vale 12.

Os egípcios não usavam álgebra, mas conseguiam resolver este problema de um modo muito engenhoso: a regra do falso!

Inicialmente, atribuíam a montão um valor falso qualquer, por exemplo, 18, e com ele faziam o seguinte:

$$18+\frac{1}{2}\cdot 18+\frac{2}{3}\cdot 18=18+9+12=39$$

Os valores falsos (18 e 39) eram então usados para montar uma regra de três simples com os elementos do problema:

VALOR FALSO	VALOR VERDADEIRO
18	montão
39	26

onde

$$montão\cdot 39=18\cdot 26$$

$$montão=\frac{468}{39}$$

$$montão=12$$

Matemáticos de várias partes do mundo adotaram a regra do falso dos egípcios para resolver problemas desse tipo.

Você saberia dizer por que a regra do falso é verdadeira?

Texto adaptado do livro "Contando a História da Matemática", vol. 2 - Oscar Gueli - 1998

Professor

Etapa flex

Agora, é com você!

1. Transcreva as situações abaixoa seguir para a linguagem matemática.

a. Se Pablo ganhar o dobro das moedas que tem agora, ficará com 30 moedas.

Resposta

$x+2x=30$

b. Se triplicarmos um número e, em seguida, multiplicarmos o resultado por 4, obteremos 96.

Resposta

$(3x)\cdot 4=96$

c. Se eu diminuir 1 de um número e dividir o resultado por 2, dá o mesmo que dividir esse número por 3 e somar 1 ao quociente.

Resposta

$$\frac{x-1}{2}=\frac{x}{3}+1$$

• • • • •

2. A seguir, indicamos um problema. V, você deve traduzi-lo, escrevendo um sistema, mas não precisa resolvê-lo.

Um problema babilônio – Um quarto da largura mais o comprimento é igual a 7 mãos. O comprimento junto com a largura são 10 mãos. Qual é o comprimento e qual é a largura?

Resposta

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\cdot y+x=7 \\ x+y=10 \end{cases}$$

• • • • •

10 MINUTOS