Reforço escolar • Matemática •

Aluno

Observando incógnitas...

Dinâmica 2

2ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 2ª	Algébrico-Simbólico	Sistemas Lineares.

Primeira etapa
Compartilhar ideias

Atividade • Equações na memória!

Seu/sua professor/a entregou a seu grupo um conjunto de 24 cartões cada um com uma equação. Para jogar, vocês devem:

- Embaralhar os cartões e virá-los sobre a mesa voltados para baixo.
- Decidir como será a ordem das jogadas.
- Cada jogador, em sua vez, deve virar dois cartões para cima. Se os cartões virados corresponderem a equações equivalentes, o aluno fica com o par para si, caso contrário, desvira os cartões mantendo-os nas mesmas posições.
- O jogo acaba quando todos os pares estiverem formados.
- O aluno que possuir a maior quantidade de pares no grupo é o vencedor.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

E, então, como anda a memória? Baseado no que você fez no jogo, faça o que se pede.

1. Nas duas colunas a seguir estão indicadas as 24 equações do jogo "Equações na memória!". Utilizando um traço, ligue os pares de equações equivalentes.

$x+y=2$	$y-1=3x$
$3x+1=y$	$y=\dfrac{3x-4}{4}$
$2x-y=0$	$y=2-x$
$4x+2=2y$	$x+5y-8=0$
$x=2-7y$	$y=2x$
$x+5y=8$	$y=-(33-x)$
$4=3x-4y$	$\mathrm{y}=\dfrac{2\mathrm{x}+1}{2}$
$2x+1=2y$	$y=-10x+1$
$3x-8=y$	$x+7y=2$
$10x+y=1$	$-8-y+3x=0$
$x-y=33$	$2x+1=y$
$2x+1=y$	$10=3x+y$

Aluno

2. Podemos escrever um "monte" de equações equivalentes a uma determinada equação. Assinale as opções que correspondem a equações equivalentes a $2x+4=x+7$.

a. ( ) $x+7=2x+4$

b. ( ) $2x-3=x$

c. ( ) $3x=11$

d. ( ) $x+4=7$

e. ( ) $x=-3$

Segunda etapa
Um novo olhar...

Atividade • Na minha mão é mais barato!

Você e seus colegas devem ler o problema e trocar ideias sobre as perguntas a seguir. Depois cada um deve colocar as soluções em seu encarte.

Um feirante faz o seguinte anúncio em sua barraca:

Um dúzia de laranjas mais um abacaxi por R$ 10,50.

ou

Meia dúzia de laranjas mais 2 abacaxis por R$ 12,00.

De acordo com as promoções, podemos montar o seguinte sistema.

$$\begin{cases} 12L+A=10{,}5 \\ 6L+2A=12 \end{cases}$$

onde A representa o preço de um abacaxi e L o preço de uma laranja.

1. Indique uma frase correspondente a cada uma das equações.

$12L+A=10{,}5$	
$6L+2A=12$	

2. Nos pares ordenados a seguir, a primeira coordenada indica o preço da laranja e a segunda, o do abacaxi.

(1;3)	(1,5; -7,5)	(0,50; 4,50)	(3;1)

a. Um par ordenado é solução de um sistema quando satisfaz todas as equações desse sistema.

Verifique quais deles são soluções do sistema.

b. Indique o valor de uma laranja e de um abacaxi.

Aluno

3. O feirante resolveu acrescentar a seguinte promoção:

"Uma dúzia e meia de laranjas mais três abacaxis por R$ 20,00."

a. Verifique se os valores unitários da laranja e do abacaxi obtidos com as duas primeiras promoções ainda valem.

b. É mais vantagem comprar uma dúzia e meia de laranjas e três abacaxis com a nova promoção ou comprando pelo preço obtido no item 2b? Por quê?

4. Vamos agora pensar por que a nova promoção não está de acordo com as duas promoções iniciais.

Observe que

$$18L + 3A = \underbrace{12L + A}_{1^a \textit{ promoção inicial}} + \underbrace{6L + 2A}_{2^a \textit{ promoção inicial}}$$

mas o feirante sugeriu R$ 20,00 e não R$ 22,50, que é a soma R$ 10,50 + RS 12,00. Por isso, os valores obtidos a partir do sistema inicial não valem nessa nova equação.

a. Escreva uma equação que corresponda ao dobro da primeira somado com o triplo da segunda.

b. Verifique se o par (0,50; 4,50) é solução da equação obtida no item anterior.

c. Crie uma outra equação a partir das duas equações iniciais e indique as operações que você realizou.

Terceira Etapa

Um novo olhar...

Atividade • Haja castanha, a solução!

Na dinâmica anterior, apresentamos o problema a seguir e o traduzimos para a linguagem matemática. Nessa etapa, você e seus colegas aprenderão como resolvê-lo!

Vamos lá?

Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que cada lata deve conter 1 quilo da mistura e custará R$ 12,00. Sabe-se também que o quilo de amendoim custa R$ 6,00, o quilo de castanha de caju custa R$ 20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Além disso, a soma das quantidades de amendoim e de castanha-do-pará deve ser o triplo da quantidade de castanha de caju.

Nesse problema temos três grandezas envolvidas: quantidade de amendoim, quantidade de castanha de caju e quantidade de castanha-do-pará. Observe a associação de cada grandeza a uma letra.

GRANDEZA	LETRA
Quantidade (em quilograma) de amendoim.	*a*
Quantidade (em quilograma) de castanha de caju.	*c*
Quantidade (em quilograma) de castanha-do-pará.	*p*

Com essa associação, podemos descrever em linguagem matemática esse problema por meio do sistema:

$$\begin{cases} a + c + p = 1 \\ 6a + 20c + 16p = 12 \\ a - 3c + p = 0 \end{cases}$$

Mas como podemos resolvê-lo?

Uma maneira de encontrar a solução desse sistema pode ser feita desenvolvendo os itens a seguir.

Mãos à obra!

Inicialmente, vamos manter a primeira equação e transformar as duas últimas equações em equações equivalentes de forma que a incógnita seja eliminada.

Para isso, podemos subtrair da 2ª equação seis vezes a primeira equação. Observe:

$$\begin{array}{rl} & 6a + 20c + 16p = 12 \quad \rightarrow \; 2^{a} \; \textit{equação} \\ - & \\ & 6a + 6c + 6p = 6 \quad \rightarrow \; 1^{a} \; \textit{equação multiplicada por } 6 \\ \hline & 0a + 14c + 10p = 6 \quad \rightarrow \; \textit{resultado} \end{array}$$

1. Complete o resultado no esquema a seguir para eliminar a incógnita *a* da 3ª equação.

$$\begin{array}{rl} & a - 3c + p = 0 \quad \rightarrow \; 3^{a} \; \textit{equação} \\ - & \\ & a + c + p = 1 \quad \rightarrow \; 1^{a} \; \textit{equação} \\ \hline & \qquad\qquad \rightarrow \; \textit{resultado} \end{array}$$

Aluno

2. Escreva um novo sistema mantendo a primeira equação e substituindo as outras duas pelas equações transformadas.

3. Você reparou que na terceira equação aparece apenas uma incógnita?

A partir dela, você pode encontrar a quantidade (em quilograma) de castanha de caju.

Qual é essa quantidade?

4. Use a segunda equação e a quantidade de castanha de caju que você descobriu na questão anterior e descubra agora a quantidade (em quilograma) de castanha-do-pará.

5. Falta ainda descobrir a quantidade de amendoim. Descubra esse valor usando a primeira equação e as quantidades de castanha de caju e castanha-do-pará que você descobriu nas duas questões anteriores.

6. Os valores que você encontrou nas questões 3, 4 e 5 solucionam o sistema obtido na questão 2.

a. Mas o sistema obtido na questão 2 corresponde ao problema apresentado?

Dica: Tente traduzir as equações desse sistema na linguagem corrente e compare com o problema.

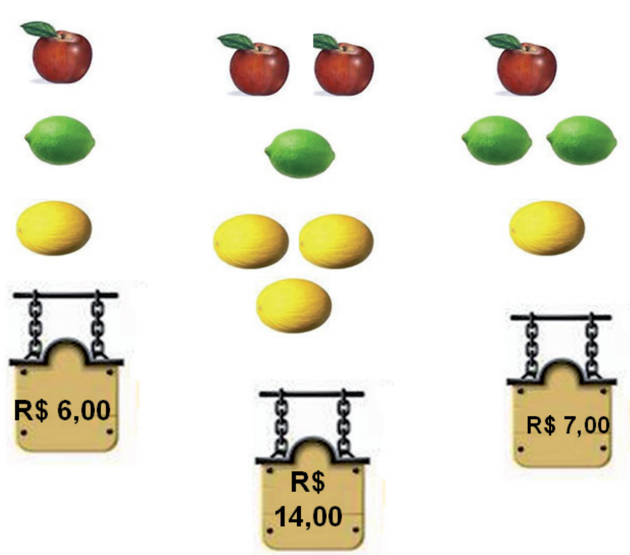
b. Verifique se as quantidades de castanha de caju, castanha-do-pará e amendoim encontradas são solução do problema proposto.

Dica: Substitua os valores das incógnitas de , e em cada uma das equações do sistema apresentado no enunciado e verifique se todas as igualdades são verdadeiras.

Quarta Etapa

Quiz

Antônio Carlos gosta muito de desafios e resolveu fazer uma brincadeira com seus fregueses. Em vez de colocar os preços de cada uma de suas frutas (maçã, limão e abil), colocou as tabuletas:



De acordo com as informações das tabuletas, uma dúzia de limões custa

a. R$ 1,00.

b. R$ 36,00.

c. R$ 12,00.

d. R$ 24,00.

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Etapa Flex

Para saber +

Sistemas escalonados: qual a utilidade?

Observe o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 7 \\ \quad 3y + 2z = 1 \\ \qquad\quad 4z = 8 \end{cases}$$

Repare que, se observarmos o sistema a partir da última equação, há uma redução da quantidade de incógnitas a cada linha. Ou seja, na terceira linha, temos apenas a incógnita z; na segunda, z e y; e na primeira z, y e x. Sistemas desse tipo são chamados de ***escalonados***.

Mas se na última equação só temos a incógnita z, então, é muito fácil determinar o seu valor (nesse caso, z=2). De posse desse valor, basta substituí-lo na segunda e determinar o valor de y (y=-1). E, finalmente, para determinar o valor de x, basta substituir os valores de y e z na primeira equação (x= -5).

Mas nem todo sistema é da forma escalonada. Então, não ajudou muito... Ajudou, sim! Pois podemos ***transformar*** qualquer sistema, em um sistema escalonado!

Vejamos como isso pode ser feito.

Etapas para escalonar um sistema linear:

1. Colocar como 1ª equação aquela que tem 1 como coeficiente da 1ª incógnita, caso ela exista, pois isso facilita as contas.
2. Nas demais equações, eliminar a primeira incógnita, ou seja, obter zero como seu coeficiente. Para isso, transforme cada equação a partir de operações entre ela e a primeira equação.
3. Obter zero como coeficiente da 2ª incógnita na 3ª equação. Para isso, transforme agora a 3ª equação a partir de operações entre ela e a segunda.

Lendo as etapas, parece difícil, certo? Então, acompanhe o processo para o sistema a seguir e veja como esse método de resolução é uma "mão na roda"!

Exemplo: Escalonar o sistema $\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \end{cases}$

1. Na 1ª equação, o coeficiente de já é 1.
2. Para eliminar a incógnita na 2ª e na 3ª equações, devemos:

- Multiplicar a 1ª equação por (–2) e somar com a 2ª para obter zero como coeficiente da 1ª incógnita na 2ª equação.

Aluno

- Multiplicar a 1ª equação por (-3) e somar com a 3ª equação para obter zero como coeficiente da 1ª incógnita na 3ª equação.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ -7y + 9z = 23 \end{cases}$$

3. Para obter zero como coeficiente de na 3ª equação, devemos multiplicar a 2ª equação por () e somar com a 3ª.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ -7y + 9z = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ 4z = 4 \end{cases}$$

Agora, para determinar a solução do sistema, começamos da última equação.

$4z = 4 \rightarrow z = 1$

Substituindo esse valor na 2ª equação, obtemos o valor de .

$$-7y + 5z = 19 \rightarrow -7y + 5 \cdot 1 = 19 \rightarrow -7y = 19 - 5 \rightarrow y = \frac{14}{-7} = -2$$

E agor, vamos para a 1ª equação, substituindo esses dois valores.

$$x + 2y - 2z = -5 \rightarrow x + 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -5 \rightarrow x = -5 + 4 + 2 = 1$$

Viu como é fácil resolver um sistema escalonado?

Agor, use e abuse do método do escalonamento para resolver sistemas!

Mas, antes de terminar, deixamos uma pergunta: será que esse método pode ser usado para sistemas "maiores", ou seja, para sistemas com 4 equações e 4 incógnitas, por exemplo?

Agora, é com você!

1. Resolva os sistemas:

a. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 5y = 11 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

2. Leia o problema.

Três escolas participam de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente, as 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

ESCOLAS	MEDALHAS			PONTUAÇÃO FINAL
	BRONZE	PRATA	OURO	
A	1	3	5	57
B	2	2	4	46
C	3	3	4	53

a. Escreva o sistema que traduza o problema usando as incógnitas , e para representar a pontuação ganha com uma medalha de bronze, prata ou ouro, respectivamente.

b. Resolva o sistema e encontre a pontuação referente a cada medalha.

Aluno