Reforço escolar • Matemática

Direto ao Ponto

Dinâmica 3

2º Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Algébrico-Simbólico	Sistemas lineares

DINÂMICA	Direto ao Ponto.
HABILIDADE BÁSICA	H38 – Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela. H61 – Associar o gráfico de uma função polinomial do 1o grau à sua representação algébrica ou vice-versa.
HABILIDADE PRINCIPAL	H114 – Resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas ou três equações e três incógnitas.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

Professor

Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Estado de Educação
Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Ciência e Tecnologia
Fundação CECIERJ – Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias.	Solução na interseção.	15 a 20 min.	Em dupla.	Individual
2	Um novo olhar...	De olho no ponto.	20 a 30 min.	Em dupla.	Individual
3	Fique por dentro!	Jogo da eliminação.	20 a 25 min.	Em dupla.	Individual
4	Quiz.	Quiz.	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz.	Análise das respostas ao Quiz.	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Professor, nesta dinâmica trabalhamos com a resolução de sistemas lineares por meio da escrita de sistemas equivalentes. Para isso, na primeira etapa, apresentamos um sistema e sua representação no plano cartesiano. Nessa etapa, os alunos devem experimentar pontos que pertençam ou não às retas que formam o sistema e identificar que a solução de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas é o ponto de interseção entre duas retas. Na etapa 2, os alunos devem representar graficamente outras equações obtidas por meio de uma combinação linear das duas equações anteriores. Essa ação possibilita que os alunos percebam que todas essas equações têm um ponto em comum, equivalente à solução do sistema. Por fim, na terceira etapa, trabalhamos com a ideia de que é possível fazer operações convenientes com as equações do sistema para resolvê-lo.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • Solução na interseção.

Objetivo

Identificar as coordenadas do ponto de interseção entre duas retas como a solução de um sistema de ordem 2.

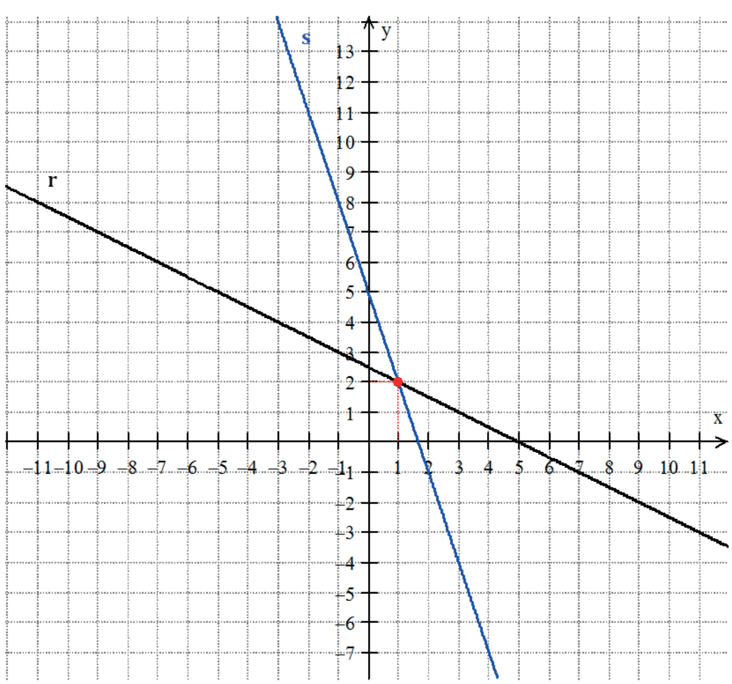
Descrição da atividade:

Professor, nesta atividade o aluno deverá ser capaz de identificar que a solução de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas é representada graficamente pelo ponto de interseção das duas retas que representam as equações. Observe a descrição da proposta.

Nessa etapa, observe inicialmente a representação no plano cartesiano de um sistema de duas equações e duas incógnitas para responder o que é pedido. Discuta com seu colega sempre que desejar e desenvolva a atividade no seu encarte.

Observe o sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 10 & (r) \\ 3x + y = 5 & (s) \end{cases}$

Cada uma das equações que compõe o sistema representa uma reta no plano cartesiano, como podemos observar na figura abaixo.



As retas possuem infinitos pontos e, portanto, as coordenadas de cada ponto satisfazem à equação da reta. Veja um exemplo:

Equação: $2x + 4y = 10$

Ponto: (3 , 1)

Substituindo x e y no primeiro membro da equação temos

$2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 6 + 4 = 10$

Como obtemos 10, que é o valor do segundo membro da equação, podemos dizer que o ponto (3 , 1), pertence à reta.

Chegou a sua vez!

1. Substitua o ponto (3 , 1) na equação da reta s.

   O que acontece?

Resposta

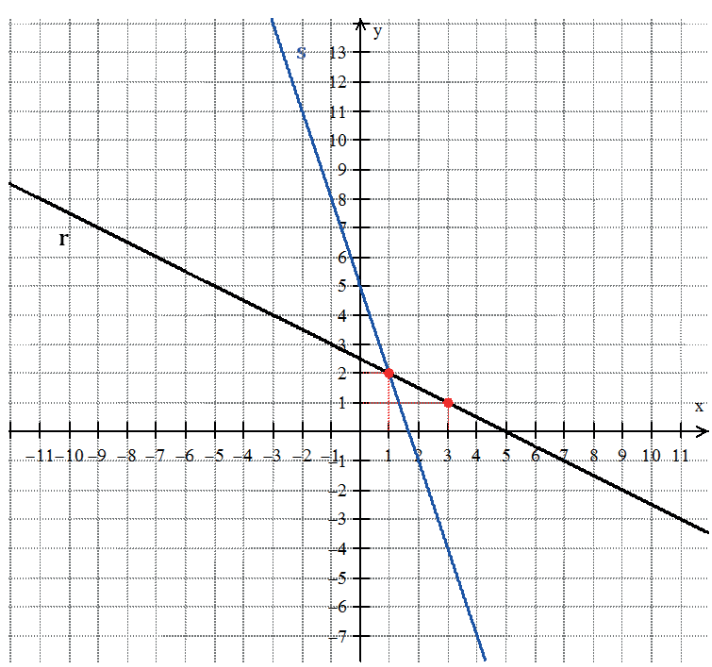
Reta $s: 3x + y = 5$*, substituindo o ponto (3 , 1) na equação s,* $3 \cdot 3 + 1 = 10 \neq 5$.

Logo, o ponto dado não pertence à reta s.

• • • • •

2. Marque o ponto (3,1) no plano cartesiano acima e observe o que acontece em relação às duas retas.

Resposta



O ponto pertence à reta r, mas não pertence à reta s.

3. Observe, agora, o ponto (1,2). O que ele representa no plano cartesiano?

Resposta

Ele é o ponto de interseção entre as duas retas que representam o sistema dado.

4. Substitua o ponto (1,2) nas duas equações e diga o que acontece.

   O que podemos concluir?

Resposta

Substituindo os valores de x e y na reta r temos: $2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 2 + 8 = 10$.

Já quando substituímos na reta s temos: $3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5$

Com isso, podemos concluir que o ponto (1,2) satisfaz às duas equações do sistema e, portanto, é a solução do sistema.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

Professor, organize a turma em duplas.

- *Professor, cada aluno deve realizar a sua própria atividade, a orientação para que a turma esteja divida em duplas é para que os alunos possam trocar ideias, entre si. Reforçamos que é fundamental que cada aluno efetivamente realize as orientações para que compreenda o significado, nesse caso, de um ponto pertencer à reta ou de suas coordenadas satisfazerem à equação.*
- *Como os alunos devem substituir as coordenadas dos pontos nas equações das retas, eles devem saber que essas coordenadas apresentam-se na forma (x,y).Se necessário, retome com os alunos que num par ordenado (x,y), x representa a projeção do ponto no eixo horizontal e , no eixo vertical.*
- *Um fechamento interessante para essa atividade é destacar que, com relação a esse sistema, um ponto admite três posições relativas. O ponto pode não pertencer nem à reta r, nem à reta s. Pode também pertencer a apenas uma dessas duas retas. E finalmente, pode pertencer às duas retas, nesse caso, esse ponto indica a solução do sistema.*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

30 MINUTOS

Atividade • De olho no ponto.

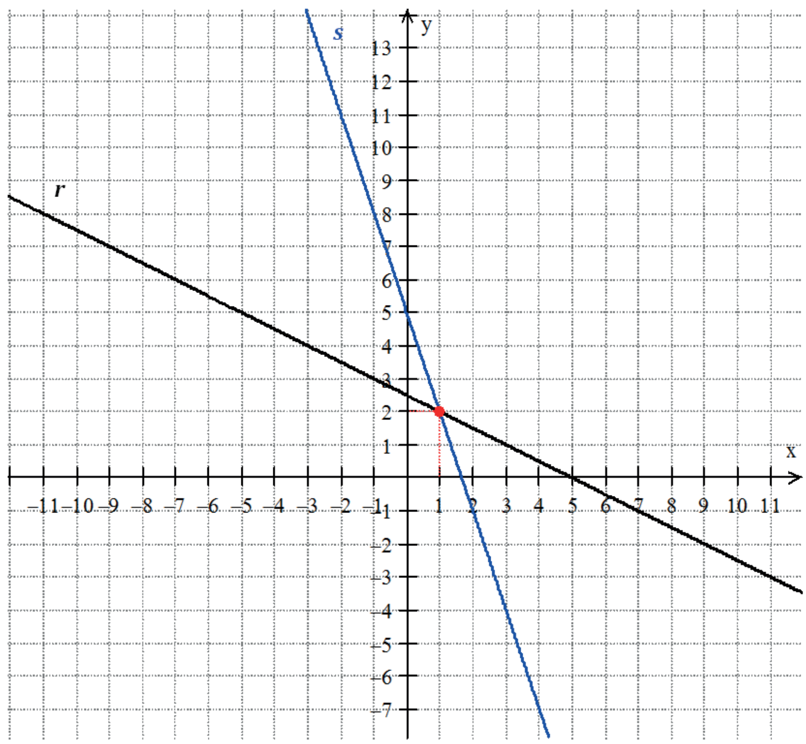
Objetivo

Observar que equações obtidas por uma combinação linear das equações que formam um sistema de ordem 2 passam pelo ponto cujas coordenadas são a solução do sistema.

Descrição da atividade:

Professor, nessa etapa os alunos devem construir algumas retas que representam equações obtidas por combinações lineares das equações que formam o sistema. Com isso, eles podem perceber que ao manipular as equações iniciais, encontram uma nova equação, também representada por uma reta, e que passa pelo ponto de interseção das retas que representam o sistema inicial. Veja a proposta.

Novamente vamos trabalhar com o sistema $\begin{cases} 2x+4y=10 & (r) \\ 3x+y=5 & (s) \end{cases}$ e sua representação no plano cartesiano.



1. Adicione as duas equações do sistema.

   Qual a equação encontrada?

Resposta

$5x + 5y = 15$, *que simplificada é* $x + y = 3$.

• • • • •

2. Encontre dois pontos da equação obtida no item anterior preenchendo a tabela a seguir.

	y	(x,y)
2		
-2		

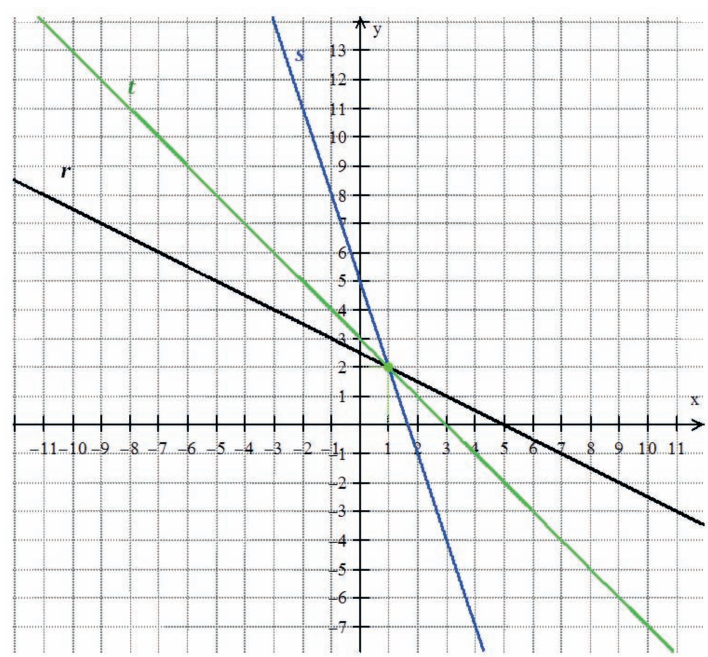
Resposta

x	y	(x,y)
2	$3-2=1$	*(2,1)*
-2	$3-(2)=5$	*(-2,5)*

• • • • •

Agora, usando uma caneta colorida, represente essa equação, no mesmo plano cartesiano que contém as retas *r* e *s*. Chame-a de *t*.

Resposta



• • • • •

3. Encontre a diferença entre a primeira equação e a segunda.

   Qual a equação encontrada?

   $-x+3y=5$

4. Encontre dois pontos da equação obtida no item anterior preenchendo a tabela a seguir.

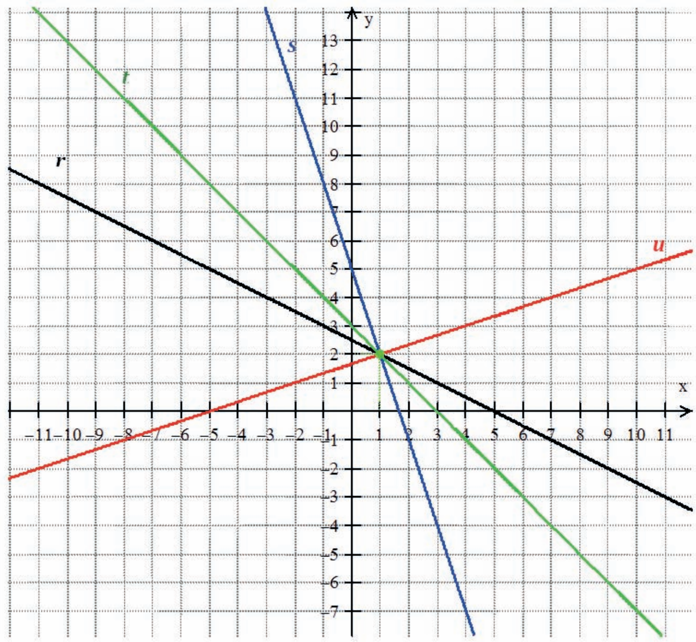
x	y	(x,y)
4		
-2		

Resposta

x	y	(x,y)
4	$\frac{5+4}{3}=3$	*(4,3)*
-2	$\frac{5-2}{3}=1$	*(-2,1)*

Agora, usando uma cor diferente, represente essa equação, no mesmo plano cartesiano que contém as retas *r* e *s*. Chame-a de *u*.

Resposta



5. Vamos encontrar mais uma equação. Dessa vez, multiplique a primeira equação por 2 e some o resultado com a primeira equação.

Qual a equação encontrada?

$7x + 9y = 25$

6. Encontre dois pontos da equação obtida no item anterior preenchendo a tabela a seguir.

x	y	(x,y)
-8		
10		

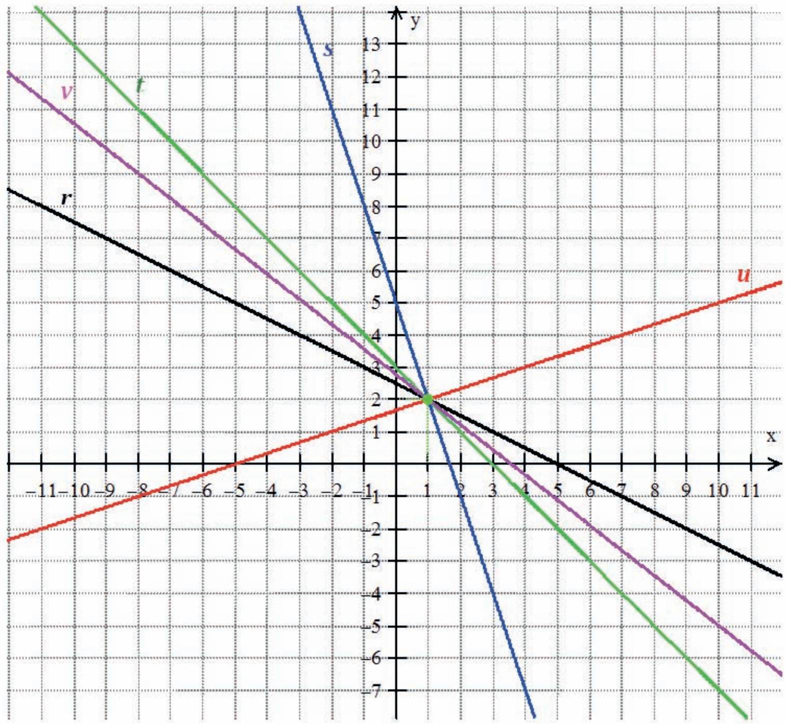
Resposta

x	y	(x,y)
-8	$\frac{25+56}{9} = 9$	*(-8,9)*
10	$\frac{25-70}{9} = -5$	*(10,-5)*

Agora, usando uma cor diferente, represente essa equação, no mesmo plano cartesiano que contém as retas *r* e *s*. Chame-a de *v*.

Professor

Resposta



7. Nessa atividade você realizou operações com as equações iniciais e depois as representou num mesmo plano cartesiano, no qual já estavam representadas as duas equações do sistema inicial. O que ocorreu com todas essas retas?

Resposta

As operações realizadas deram origem a novas equações, cujas representações gráficas são retas concorrentes com as retas r e s. Ou seja, todas as retas passam pelo mesmo ponto, o ponto que é a solução do sistema.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Régua.
- Lápis de cor ou canetas com cores diferentes.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, continue com a turma organizada em duplas, mas lembre--se: a ação da atividade deve ser individual.*
- *Oriente os alunos a usarem cores diferentes para cada reta traçada.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, nessa etapa o aluno deve desenvolver três ações para as três situações descritas: encontrar uma nova equação de acordo com as operações indicadas, encontrar dois pontos que satisfaçam às equações, e, por fim, representar graficamente as retas correspondentes a essas equações.*
- *Para encontrar as novas equações os alunos podem repetir alguns erros comuns aos procedimentos algébricos, ou seja, cometer erros nas operações e na redução de termos semelhantes. Já para obter os dois pontos que satisfazem* **à** *equação, os alunos devem calcular os valores numéricos, uma vez que são dados os valores de . Observe que as operações, a redução de termos semelhantes e o cálculo de valor numérico foram retomados em uma série de dinâmicas anteriores, com isso, acreditamos que os alunos tenham superado algumas dificuldades nesses assuntos, mas, mesmo assim, caso seja necessário, retome essas ações.*
- *Na construção das retas, talvez seja necessário que você retome que deve ser representado no eixo horizontal e o valor de é a projeção do eixo vertical. É interessante que você destaque que poderíamos ter calculado as coordenadas dos pontos para outros valores de , mas que nesse caso, eles já foram fornecidos. Você também pode reforçar que a tabela tem apenas dois pontos, pois estes são suficientes para determinar uma única reta.*
- *Procure, em cada representação construída no gráfico, chamar a atenção do aluno para o fato de que, apesar de a equação do sistema original ter sido modificada, o ponto de interseção não é alterado. Esta é a ideia central para que eles consigam fazer uma generalização no item 7.*

Professor

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • A meta é eliminar!

Objetivo

Usar convenientemente as operações com as equações de um sistema visando à sua resolução.

Descrição da atividade:

Professor, na Etapa 1 os alunos puderam perceber que a solução de um sistema possível e determinado é representada geometricamente pelas coordenadas do ponto de interseção entre as retas que representam cada uma das equações. Nesta etapa, nosso objetivo é que eles, a partir das experiências anteriores com as operações entre as equações que formam o sistema, manipulem-nas de forma conveniente, visando eliminar uma das incógnitas para obter a solução do sistema. Acompanhe a proposta a seguir.

Na Etapa 1, pudemos visualizar graficamente o ponto de interseção entre duas retas. Aprendemos, na Etapa 2, que podemos manipular as equações que as representam sem alterar o ponto de interseção entre elas. Nesta etapa, você deve encontrar esse ponto sem precisar desenhar as retas.

Veja a seguir como isso pode ser feito.

1. Vamos continuar com as duas equações das etapas anteriores. Para iniciar, arrume-as na forma de um sistema.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

2. Divida a primeira equação por 2. Coloque a equação resultante no lugar da primeira equação, obtendo um novo sistema.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

3. Substitua a segunda equação pela soma entre a segunda equação e a primeira multiplicada por (-3).

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - 5y = -10 \end{cases}$$

4. Observando a segunda equação, você consegue determinar o valor de y?

   Determine o valor de y, indicando o que você fez.

   $y = 2$.

Matemática

Resposta

Resposta pessoal.

• • • • •

5. Com o valor de determinado no item anterior, você consegue determinar o valor de ?

Troque ideias com seu colega e determine o valor de .

Em seguida, registre como você determinou.

Resposta

$x + 2 \cdot 2 = 5$, então $x = 5 - 4$, daí $x = 1$.

• • • • •

Professor

6. Com os valores de x e de y, você consegue determinar a solução do sistema?

Confira com seu colega e indique a solução.

Resposta

Solução (1,2).

• • • • •

7. Compare a solução do sistema com o ponto de interseção das retas indicado na Etapa 1.

O que você observa?

Resposta

A solução do sistema corresponde às coordenadas do ponto de interseção.

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, mantenha a turma organizada em duplas, mas lembre-se: a ação da atividade deve ser individual.*

Intervenção Pedagógica

- *Para que essa etapa seja realizada, é importante que os alunos tenham compreendido que podem operar com as equações de um sistema, e que isso não altera a solução do sistema.*
- *Nessa etapa, procure deixar claro que para resolver um sistema, as operações realizadas com as equações do sistema devem ser realizadas de forma conveniente. Ou seja, as operações realizadas visam facilitar a busca pela solução do sistema, por exemplo, eliminando uma das variáveis. Comente também que as operações sugeridas nessa etapa não são as únicas que levam à resolução do sistema proposto.*
- *Durante as operações com as equações nos itens 2 e 3, verifique se os alunos estão fazendo os cálculos nos dois membros da igualdade e em todas as parcelas.*
- *Nos itens 4 e 5, incentive os alunos a buscarem estratégias próprias para determinar os valores de x e de y.*
- *No item 6, o aluno deve perceber que basta que ele indique os valores de x e de y determinados anteriormente. Caso algum aluno tenha dificuldade, você pode mais uma vez reforçar que a realização de operações entre as equações não altera a solução do sistema e, portanto, determinar o valor de y, e, a partir desse valor, o valor de x, consiste na solução do sistema.*
- *Finalmente no item 7, esperamos que os alunos percebam a relação entre a representação algébrica e a representação gráfica. Se achar conveniente, você pode solicitar que os alunos façam a representação gráfica das equações obtidas ao longo da atividade.*

Quarta Etapa
Quiz

Carolina comprou 9 revistas: 8 tinham o mesmo preço e uma era mais cara. As 8 revistas custaram no total RS 52,00 a mais que a revista de maior preço. Se Carolina tivesse comprado 6 revistas das mais baratas, teria pago por elas R$ 36,00 a mais do que pagou pela mais cara.

Quanto Carolina gastou?

a. R$ 52,00

b. R$ 88,00

c. R$ 76,00

d. R$ 20,00

e. R$ 36,00

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Resposta

Indicando o preço da revista mais barata por x e o preço da mais cara por y, monta-se, com os dados do problema, o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 8x = 525 + 2y \\ 6x = 36 + y \end{cases}$$

Que pode ser reescrito como

$$\begin{cases} y - 8x = -52 \\ -y + 6x = 36 \end{cases}$$

A segunda equação é substituída pela soma das duas equações do sistema, obtendo

$$\begin{cases} y - 8x = -52 \\ 0y - 2x = -16 \end{cases}$$

Da segunda equação, x=8.

Substituindo o valor de x na primeira equação do sistema acima, encontra-se o valor de y

$$
\begin{aligned}
y - 8(8) &= -52 \\
y - 64 &= -52 \\
y &= 64 - 52 \\
y &= 12
\end{aligned}
$$

Logo, o total gasto foi $8 \cdot 8 + 12 = R\$76{,}00$.

Resposta: Letra (c).

Erros possíveis:

Os alunos que optaram pelas alternativas (a), (b) ou (e), certamente tiveram dificuldades na interpretação do enunciado proposto, não conseguindo criar o modelo para ser resolvido através de um sistema linear. Os alunos que optaram pela alternativa (d), provavelmente, fizeram a modelagem corretamente e resolveram o sistema linear encontrando como solução R$ 8,00 e R$ 12,00, daí somaram estes dois valores no lugar de observarem que, conforme enunciado, o correto seria fazer $8 \cdot 8 + 12 = R\$76{,}00$.

● ● ● ● ●

Etapa Flex

Para saber +

15 MINUTOS

Existência de soluções

Nessa dinâmica pudemos perceber a relação entre as equações e a sua representação gráfica. Vamos agora pensar de forma mais geral na classificação do sistema a partir da sua representação gráfica.

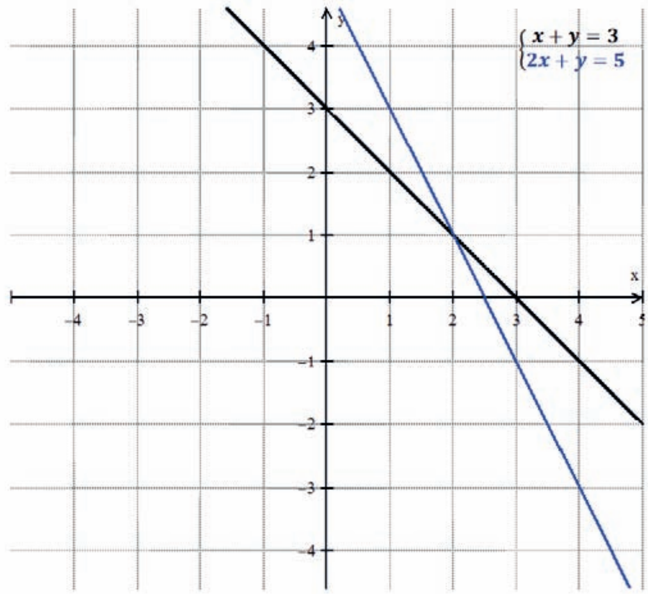
Como exemplo, vamos pensar em um sistema de ordem 2.

Em um sistema de ordem 2, temos duas equações e duas incógnitas, como no sistema

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

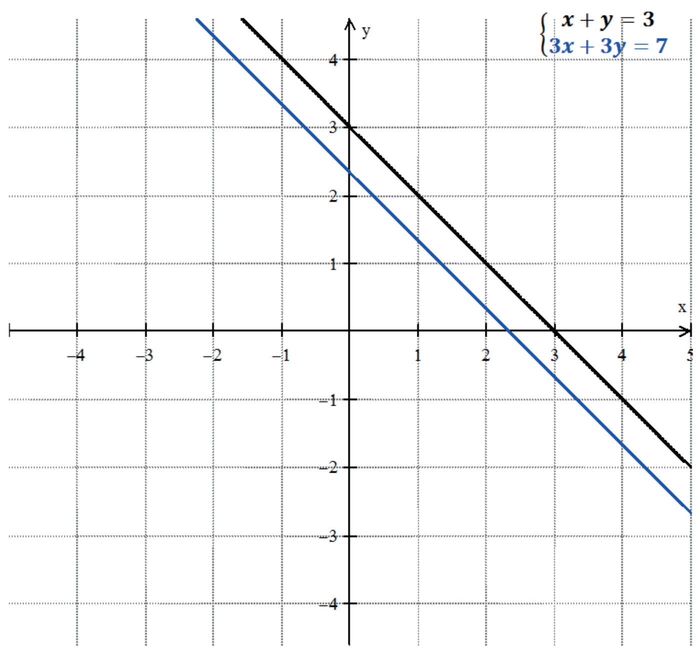
Cada uma das equações representa uma reta. Representadas no plano cartesiano, existem três possibilidades para duas retas. Em cada um dos exemplos a seguir estão representadas essas três possibilidades.

Exemplo 1: O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ é representado graficamente por duas retas concorrentes.



Nesse exemplo, as duas retas têm um ponto em comum, o ponto (2; 1). Resolva o sistema algebricamente e verifique a solução! Em termos matemáticos dizemos que ele é possível e determinado, sendo representado graficamente por duas retas concorrentes.

Exemplo 2: O sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=7 \end{cases}$ é representado graficamente por duas retas paralelas distintas.



Nesse caso, as retas não têm ponto em comum. Ao tentar resolver o problema, percebemos que o sistema não tem solução. Veja.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=7 \end{cases}$$

Professor

Substituindo a segunda equação pelo triplo da primeira menos a segunda,

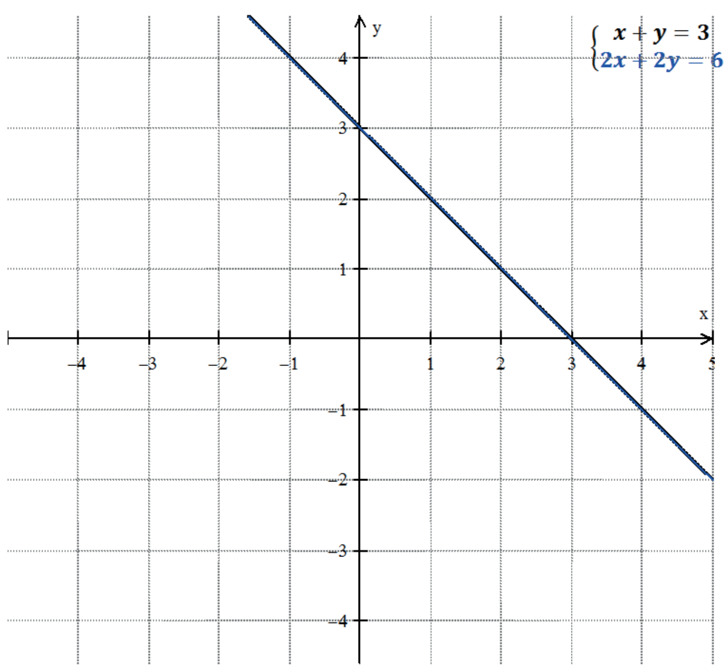
$$\begin{array}{l} 3x+3y=9 \rightarrow \textit{triplo da } 1^0 \text{ equação} \\ - \\ \underline{3x+3y=7 \rightarrow 2^0 \text{ equação}} \\ 0x+0y=2 \rightarrow \textit{resultado} \end{array}$$

chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 0=2 \end{cases}.$$

Mas sabemos que 0 não é igual a 2, com isso a igualdade encontrada é falsa. Por esse motivo, dizemos que o sistema é impossível e é representado graficamente por duas retas paralelas distintas.

Exemplo 3: O sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ é representado graficamente por duas retas paralelas coincidentes.



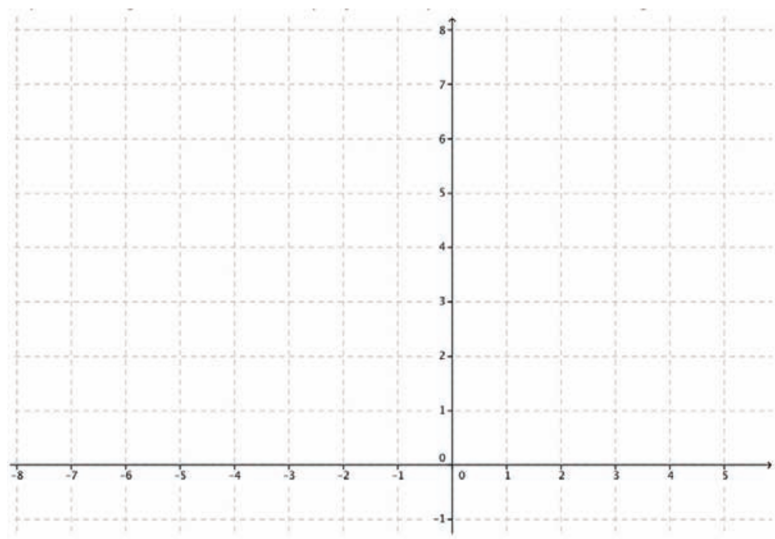
Nesse caso, todos os pontos das retas são comuns. Observe que a segunda equação corresponde a exatamente o dobro da primeira e, por isso, essas equações são equivalentes. Isso quer dizer que tanto faz "dizer" x+y=3 ou $2x+2y=6$. Então, tanto faz considerar uma ou outra e, nesse esse sentido, quaisquer valores de x e y que satisfaçam à equação $x+y=3$ representam uma solução do sistema. Mas existem infinitos pares que satisfaçam a essa equação: todos os pontos da reta! Logo, o sistema é chamado de possível e indeterminado e é representado graficamente por duas retas paralelas e coincidentes.

Agora, é com você!

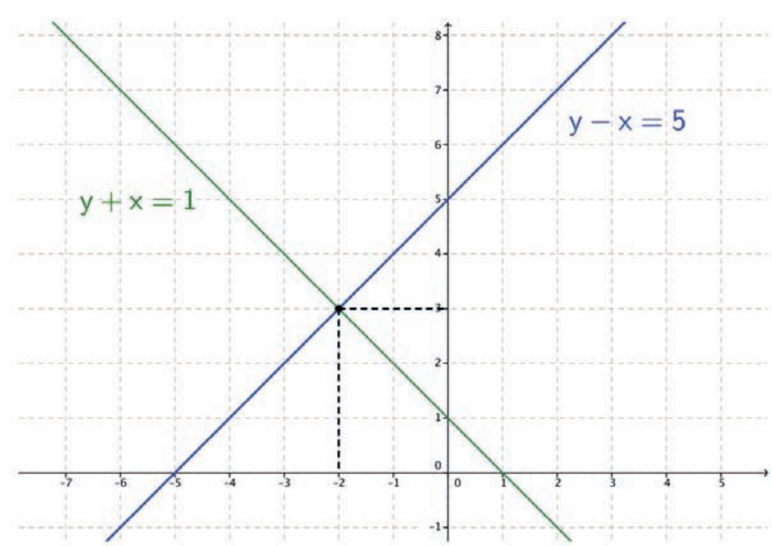
1. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 1 \end{cases}$$

a. Represente graficamente as equações no plano cartesiano a seguir.



Resposta



b. Substitua a segunda equação pela soma das duas equações.

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

c. Observando o novo sistema, indique a solução.

Resposta

A solução é $y = 3$ *e* $x = -2$

• • • • •

Compare a solução determinada com o ponto de interseção das retas. Resposta

A solução corresponde exatamente às coordenadas do ponto de interseção.

• • • • •

2. Resolva os problemas a seguir.

a. Num estacionamento há 37 veículos, entre motocicletas e automóveis. Esses veículos têm um total de 128 rodas. Quantas motocicletas há no estacionamento?

Resposta

Indicando por m a quantidade de motos e por a quantidade de automóveis, montamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} m + a = 37 \\ 2m + 4a = 128 \end{cases}$$

cuja solução indica que são 10 motos e 27 automóveis.

• • • • •

b. Duas canetas e três lapiseiras custam R$ 51,00. Três canetas e duas lapiseiras custam R$ 46,50. Qual é o preço de cada uma?

Resposta

Indicando por c o preço da caneta e por l o preço da lapiseira, formamos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} 2c + 3l = 51 \\ 3c + 2l = 46,5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, verificamos que a caneta custa RS 7,50 e a lapiseira, R$ 12,00.

● ● ● ● ●

c. Um comerciante compra, no exterior, vidros de vitaminas de dois tipos. Cada vidro do tipo I custa 10 dólares e, do tipo II, 15 dólares. Se ele fez uma compra de 35 vidros, gastando 400 dólares, quantos vidros de cada tipo comprou?

Resposta

Indicando por x a quantidade de vidros do tipo I e por y, a quantidade do tipo II, o problema nos diz que

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 10x + 15y = 400 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a 25 vidros de vitamina do tipo I e 10 vidros de vitamina do tipo II.

● ● ● ● ●

Professor