



Matemática e brigadeiro combinam?

Dinâmica 5

2ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Geométrico	Geometria Espacial: Esfera

DINÂMICA	Matemática e brigadeiro combinam?
HABILIDADE BÁSICA	Reconhecer que existe proporcionalidade direta entre as áreas de um setor circular e de um círculo.
HABILIDADE PRINCIPAL	H25 – Resolver problemas envolvendo noções de volume.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas, utilizando o cálculo da área da superfície esférica e do volume de uma esfera.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias.	Que setor é este?	20 a 25 min.	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual.
2	Um novo olhar...	Bolinha de brigadeiro.	15 a 20 min.	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual.
3	Fique por dentro!	Quanto mais melhor?	20 a 30 min.	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual.
4	Quiz	Quiz	10 min.	Individual.	Individual.
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quis	15 min.	Coletiva	Individual.
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

APRESENTAÇÃO

Professor, na primeira etapa, fazemos uma breve revisão de setores circulares, focando na proporcionalidade direta entre a medida do ângulo central do setor e 360° e entre a área do setor e a área do círculo. No restante da dinâmica, trabalhamos com o cálculo de volume de esferas. Na segunda etapa, aproveitamos uma deliciosa receita de brigadeiro para abordar o volume de uma esfera e, na terceira etapa, os alunos devem observar como alterações no raio modificam o volume da esfera.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

PRIMEIRA ETAPA

COMPARTILHAR IDEIAS



ATIVIDADE • QUE SETOR É ESTE?

Objetivo

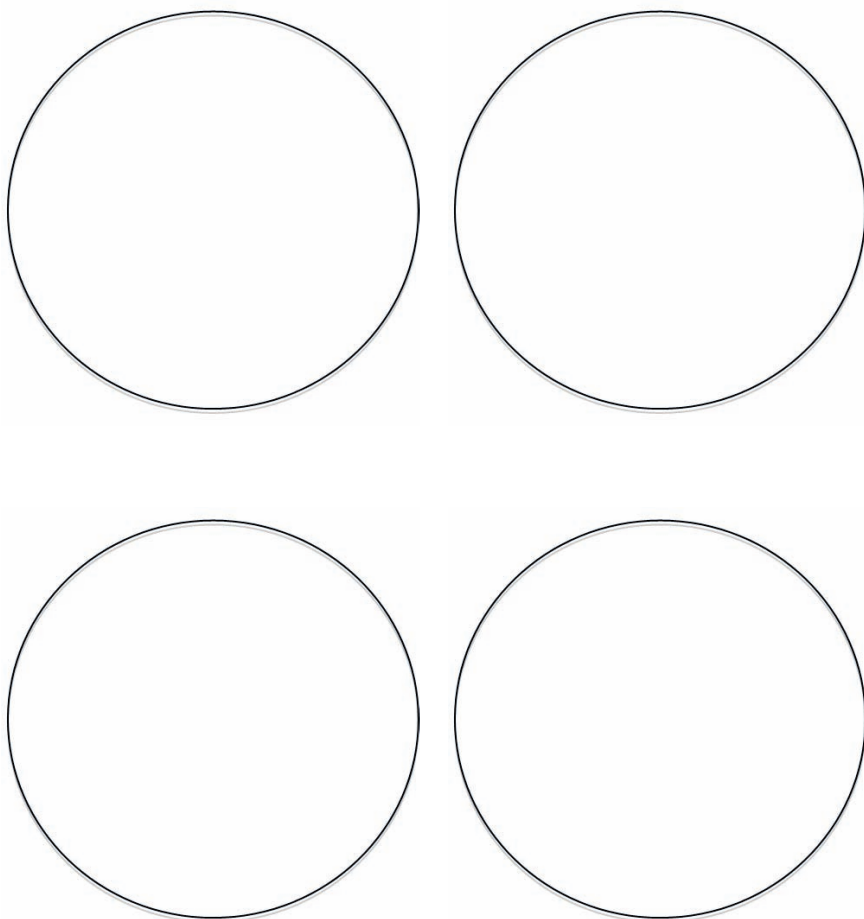
Relacionar a área de um setor circular com a área de um círculo.

Descrição da Atividade

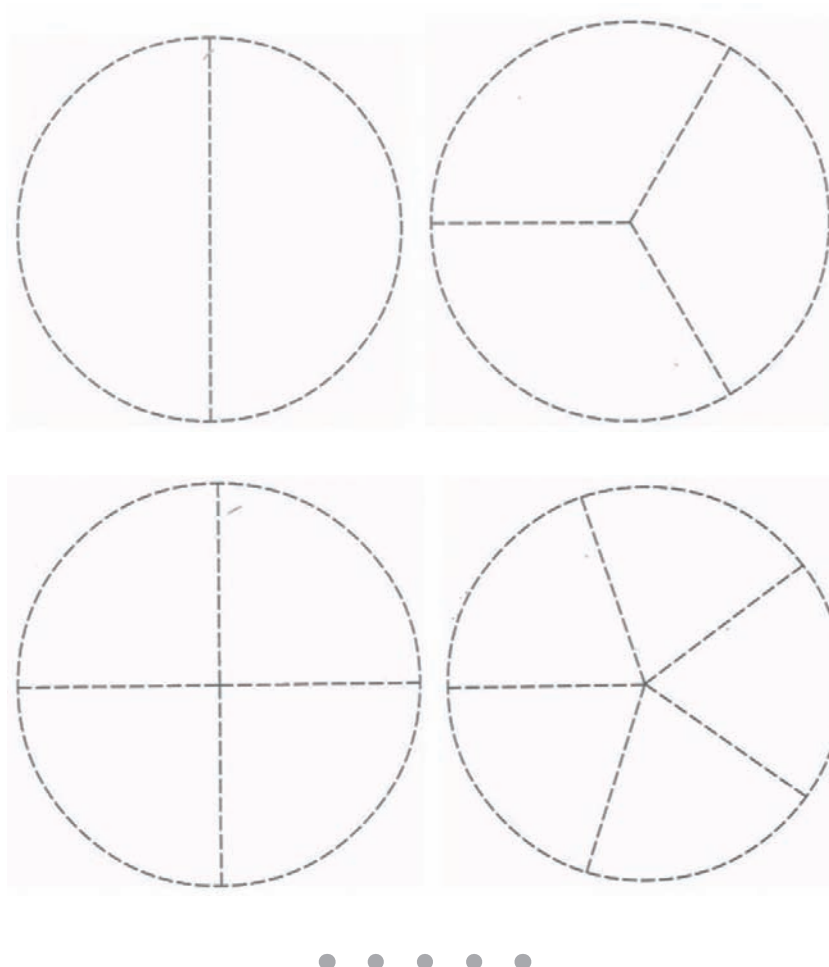
Professor, pretendemos, nesta etapa, que os alunos compreendam que a área de um setor circular é proporcional a área do círculo. Veja a proposta.

Seu professor entregou a seu grupo partes de círculos, que se assemelham a pedaços de pizza, chamadas de setores circulares.

1. Separe os setores em quatro grupos, de tal maneira que setores de mesmo tamanho fiquem no mesmo grupo.
2. Com os setores de cada grupo, você e seus colegas devem montar os círculos. Nos círculos indicados a seguir, represente como cada grupo de setores compõe o círculo.

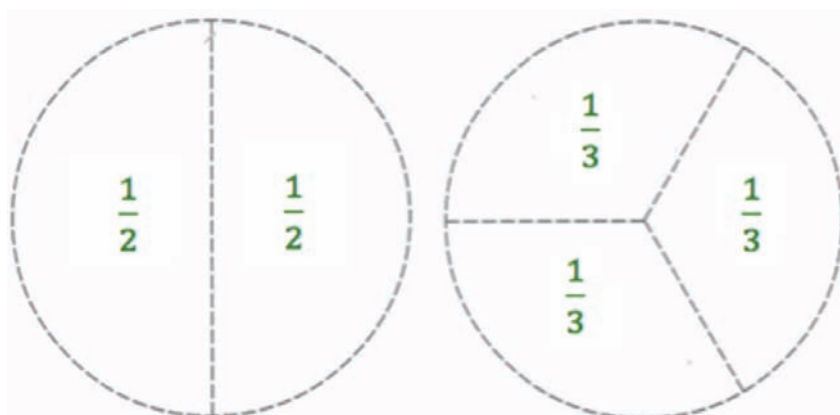


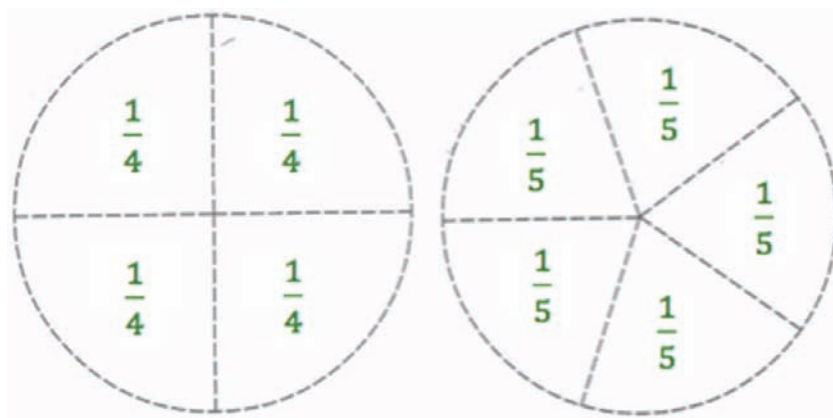
Resposta



3. Escreva sobre a representação de cada setor, a fração do círculo a que ele corresponde.

Resposta





4. Na tabela a seguir, indique a medida do ângulo central de cada setor circular.

Divisão do círculo	Ângulo central
2 partes iguais	
3 partes iguais	$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$
4 partes iguais	
5 partes iguais	

Resposta

Divisão do círculo	Ângulo central
2 partes iguais	$\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$
3 partes iguais	$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$
4 partes iguais	$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
5 partes iguais	$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$



5. Lembrando que a área do círculo é dada por πr^2 , indique, na tabela a seguir, a área de cada setor circular.

<i>Divisão do círculo</i>	<i>Área do setor</i>
2 partes iguais	
3 partes iguais	$\frac{\pi r^2}{4}$
4 partes iguais	
5 partes iguais	

Resposta

<i>Divisão do círculo</i>	<i>Área do setor</i>
2 partes iguais	$\frac{\pi r^2}{2}$
3 partes iguais	$\frac{\pi r^2}{3}$
4 partes iguais	$\frac{\pi r^2}{4}$
5 partes iguais	$\frac{\pi r^2}{5}$



6. Considere um setor cuja medida do ângulo central é 300° e do raio é 1 cm. Discuta com seus colegas e encontre a área desse setor.

Explique como vocês pensaram.

Resposta

A área do círculo cuja medida do raio é 1 cm é $\pi \text{ cm}^2$.

O setor corresponde a $\frac{300}{360} = \frac{5}{6}$ do círculo. Logo a área do setor mede $\frac{5\pi}{6} \text{ cm}^2$.



Recursos necessários

- Encarte do aluno.
- Setores circulares disponíveis no anexo, um para cada grupo.

Procedimentos operacionais

- Professor, a turma deve ser organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.
- Cada grupo deve receber os 4 conjuntos de setores circulares recortados previamente.



Intervenção pedagógica

- Professor, na questão 2, oriente os alunos a usarem setores do mesmo tamanho para formar os círculos. Acreditamos que essa ação de unir os setores já os auxiliará a escrever a fração correspondente na questão 3.
- Nas questões 4 e 5, é importante que os alunos percebam que, para encontrar as medidas, tanto ângulo central, quanto a da área do setor, devem encontrar uma mesma fração que corresponde às medidas do ângulo central e da área do círculo, respectivamente. Com isso, eles podem compreender que existe uma proporcionalidade entre essas medidas.
- Na questão 6, os alunos devem usar a ideia de proporcionalidade entre as medidas dos ângulos e da área. Caso eles não percebam que a medida da área corresponde a $\frac{5}{6}$ da área do círculo, você pode pedir que unam dois setores cujas medidas dos ângulos são 180° e 120° . Oriente-os a perceber que, juntos, esses setores formam um ângulo central cuja medida é 300° e, conseqüentemente, a medida da área desse setor corresponde a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ da do círculo.



SEGUNDA ETAPA

Um novo olhar



ATIVIDADE • BOLINHA DE BRIGADEIRO.

Objetivo

Utilizar a fórmula da medida do volume de uma esfera.

Descrição da atividade:

Professor, nesta atividade, trabalharemos com o cálculo de volume de esferas. Partimos de uma receita de brigadeiro para que os alunos calculem o volume de cada brigadeiro feito a partir da receita, considerando-os esferas. Acompanhe a proposta.

Brigadeiro... que delícia!

Acompanhe os dados descritos na receita a seguir e, em seguida, responda às perguntas.

Brigadeiro

Ingredientes:

- 1 colher (sopa) de manteiga;
- 1 lata de leite condensado;
- 1 xícara (chá) de chocolate granulado;
- 4 colheres (sopa) de chocolate em pó.

Modo de Preparo:

Numa panela, junte o leite condensado, a manteiga e o chocolate em pó. Misture bem até incorporar tudo. Leve ao fogo brando, mexendo sempre. Utilize panela de fundo grosso. Quando a massa começar a se desprender do fundo da panela (o tempo varia de acordo com a panela), passe a massa para um prato untado com manteiga e deixe esfriar.

Unte as mãos com manteiga e enrole os brigadeiros, passando-os no granulado. Coloque em forminhas de papel.

Rendimento:

30 brigadeiros com cerca de 20 mm de diâmetro.

E aí? O que isso tem a ver com Matemática?

1. Os deliciosos brigadeiros que estamos acostumados a encontrar nas festas de aniversário, possuem formato que se aproxima de um sólido geométrico.

Que sólido é esse?

Resposta

Uma esfera.



2. No Para Saber +, apresentamos como é possível determinar a fórmula para a medida do volume de uma esfera. Não deixe de ler!

Por enquanto, você precisa saber que a medida do volume de uma esfera é dada por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

onde r é a medida de seu raio.

A partir das informações descritas na receita, podemos determinar o volume de cada um dos brigadeiros.

Qual é esse volume?

Dica: Considere 3 como aproximação para π .

Resposta

Considerando $\pi \cong 3$, o volume aproximado de uma esfera de raio 10 mm é

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \cong \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{3} = 4 \cdot 1000 = 4.000 \text{ mm}^3$$



3. Alterando o diâmetro do brigadeiro para 40mm, qual é o volume de cada um dos brigadeiros?

Dica: Continue considerando 3 como aproximação para π .

Resposta

Nesse caso, cada brigadeiro possui a forma de uma esfera de 20mm de raio, cujo volume aproximado é

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \cong \frac{4 \cdot 3 \cdot 20^3}{3} = 32.000 \text{ mm}^3$$



4. E se o brigadeiro tivesse 10mm de diâmetro? Qual seria o seu volume?

Resposta

Nesse caso, cada brigadeiro possui a forma de uma esfera de 5mm de raio, cujo volume aproximado é

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \cong \frac{4 \cdot 3 \cdot 5^3}{3} = 500 \text{ mm}^3$$



Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

- Mantenha a turma organizada como na etapa anterior.



Intervenção pedagógica

- Professor, apesar de os brigadeiros não serem esferas perfeitas, podemos considerá-los como tal para fazermos cálculos relacionados ao seu volume. Se for conveniente, você pode explicar aos alunos que os sólidos geométricos, em particular a esfera, são modelos matemáticos ideais e que não têm representantes físicos, mas que alguns objetos se aproximam do formato, como o brigadeiro e, por isso, acabamos considerando-os como tal.
- A atividade foi elaborada para que os alunos utilizem a fórmula que expressa a medida do volume de uma esfera. A proposta prevê a va-

riação do raio e apesar de ser interessante observar como os volumes se relacionam quando os raios se alteram, deixamos isso para ser feito na outra etapa. Esse momento está reservado para os alunos trabalharem com a fórmula. Certifique-se de que os alunos percebam que o diâmetro é o dobro do raio quando forem usar a fórmula.

- Indicamos a utilização de 3 como aproximação para π , para facilitar os cálculos e, por isso, acreditamos que os alunos não terão dificuldade nos cálculos. Contudo, é importante que você se certifique de que os alunos estão fazendo o cálculo do valor numérico corretamente.



TERCEIRA ETAPA

FIQUE POR DENTRO!



ATIVIDADE • QUANTO MAIS MELHOR?

Objetivo

Relacionar a variação da medida dos raios com a variação da medida dos volumes de esferas.

Descrição da atividade

Nesta etapa, os grupos devem observar como a variação no raio da esfera influencia o seu volume. Veja a proposta a seguir.

Nesta etapa, vamos buscar entender como a variação do raio influencia o volume de uma esfera. Continue considerando $\pi \cong 3$.

1. Complete a tabela abaixo.

Raio R (em cm)	Volume (em cm ³)
1	$V_1 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 1^3 =$
2	$V_2 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 2^3 =$
3	
4	
6	$V_6 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 6^3 = 864$
8	

Raio R (em cm)	Volume (em cm^3)
1	$V_1 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 1^3 = 4$
2	$V_2 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 2^3 = 32$
3	$V_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 3^3 = 108$
4	$V_4 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 4^3 = 256$
6	$V_6 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 6^3 = 864$
8	$V_8 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 8^3 = 2048$

• • • • •

2. Você e seus colegas devem selecionar dois pares de raios de tal maneira que um seja o dobro do outro.

Em seguida, devem observar a relação entre os seus volumes, indicando quantas vezes um é maior do que o outro.

Pares possíveis: 1 e 2; 2 e 4; 3 e 6; 4 e 8.

A relação entre os volumes é de 8 vezes.

• • • • •

3. Agora, você deve selecionar dois pares de raios, de tal maneira que um seja o triplo do outro.

E agora? Qual é a relação entre os volumes?

Resposta

Os pares são 1 e 3; 2 e 6.

Em ambos os casos, a relação entre os volumes é de 27 vezes.

• • • • •

4. E se um raio for o quádruplo do outro? Qual é a relação entre os volumes?

Se necessário, selecione um par de raios tal que um seja o quádruplo do outro e verifique o que acontece com os volumes.

Resposta

A relação entre os volumes deve ser de 64 vezes.

• • • • •

5. E se um raio for 10 vezes o outro? Como os volumes se relacionam?

Resposta

O volume de uma das esferas é 1.000 vezes o outro.

• • • • •

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

- *Professor, mantenha a turma organizada como anteriormente.*

• • • • •

- Como exemplo, deixamos o cálculo de dois volumes indicados e um feito até o fim. Esteja atento se os alunos apresentam dificuldade no cálculo numérico ainda. Se esse for o caso, explore os três exemplos apresentados com os alunos. Nesse momento, você também pode sanar algumas dúvidas dos alunos em relação ao cálculo com frações e potências.
- Nos itens 2 e 3, orientamos os alunos a perceberem que, ao multiplicar a medida do raio por um número real positivo, a medida do volume fica multiplicada pela medida do volume ao cubo. Repare que deixamos os alunos livres no item 2 para a escolha dos pares; você pode e deve explorar essa diversidade no momento da discussão coletiva: aproveite para mostrar que em todos os casos um volume é oito vezes o outro.
- No item 4, caminhamos para a generalização, mas, nesse momento, o aluno ainda tem a tabela para se apoiar, caso ainda não tenha percebido a “relação cúbica” existente. Já no item 5, o aluno não tem mais como recorrer à tabela, então, caso algum aluno não consiga perceber, volte aos outros exemplos e peça que ele verifique como a relação entre as medidas dos volumes pode ser escrita em função da relação entre as medidas dos raios. Se necessário, escreva na lousa essas relações evidenciando a “relação cúbica”.



QUARTA ETAPA

QUIZ

(UFPE - ADAPTADO)



Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, de 9 cm de raio, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante todo o processo.

- 3
- 9
- 18
- 21
- 27

QUINTA ETAPA

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ

Resposta

O volume da peça maciça de ouro de forma esférica de raio 9 cm é igual a

$$V_{peça} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = 972\pi \text{ cm}^3.$$

A nova peça maciça de ouro de forma esférica deve ter raio igual a $r = \frac{9}{3} = 3$.

Assim, o volume da nova peça será $V_{nova\ peça} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 36\pi \text{ cm}^3$.

Sendo assim, fazendo $\frac{972}{36}$ chegamos a 27 novas peças.

Logo, teremos 27 peças novas com raio igual à terça parte do raio da peça maciça.

A alternativa correta é (e).

Erros possíveis:

Ao optar pela alternativa (a) o aluno pode ter apenas associado a terça parte do raio como sendo a terça parte do volume e achado que conseguiria fazer três novas peças.

Na alternativa (b), o aluno pode ter confundido a fórmula do volume com a da superfície esférica, fazendo com que o novo raio fosse elevado ao quadrado proporcionando nove esferas novas.

Nas alternativas (c) e (d) não foram encontrados distratores, os alunos que as escolheram provavelmente não se apropriaram do conceito trabalhado, marcando-as de forma aleatória.



ETAPA FLEX

PARA SABER +

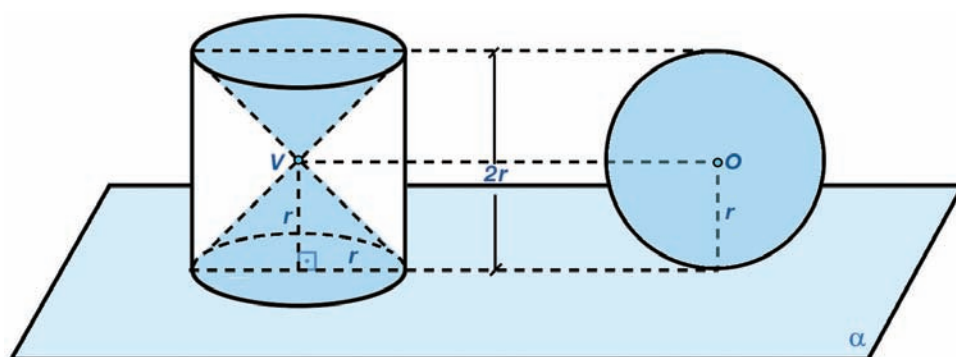
O VOLUME DA ESFERA

Arquimedes foi um importante matemático que viveu no século III a.C. e que demonstrou a fórmula do volume da esfera.

Ele é muito conhecido por ter resolvido o problema de Hierão, rei de Siracusa, que encomendou uma coroa de ouro puro, mas suspeitou que o ourives tinha usado um metal menos nobre no interior da coroa. Arquimedes resolveu o problema determinando o volume da coroa, submergindo-a num recipiente completamente cheio de

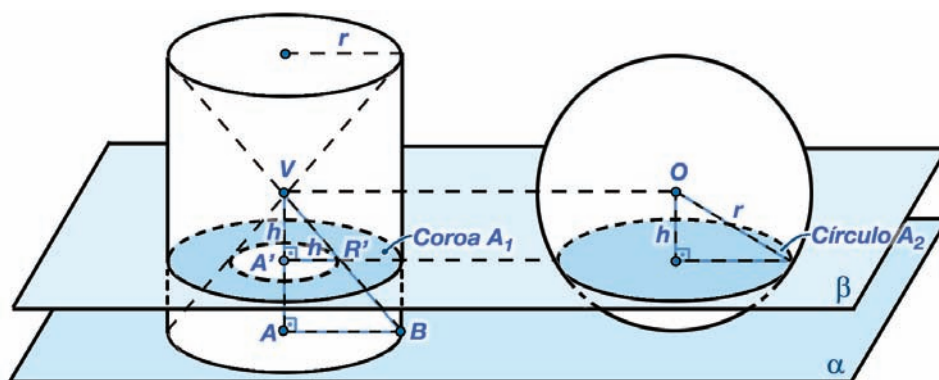
água, medindo o volume de líquido derramado e comparando o resultado com o volume de uma barra de ouro do mesmo peso da coroa. O ourives foi condenado à morte, pois os resultados não foram iguais. Conta-se que Arquimedes imaginou este procedimento quando, ao entrar numa banheira completamente cheia de água para se lavar, parte dela transbordou. No entusiasmo da descoberta, Arquimedes saiu pelas ruas, gritando: *Eureka! Eureka!* ("Achei! Achei!")

Para encontrar o volume da esfera, Arquimedes usou um método conhecido como método do equilíbrio. Ele considerou uma esfera de raio r apoiada num plano α e um sólido formado por um cilindro de raio r e altura $2r$, do qual retiramos dois cones com raio r e centro no ponto médio da altura do cilindro, como indicado na figura a seguir.

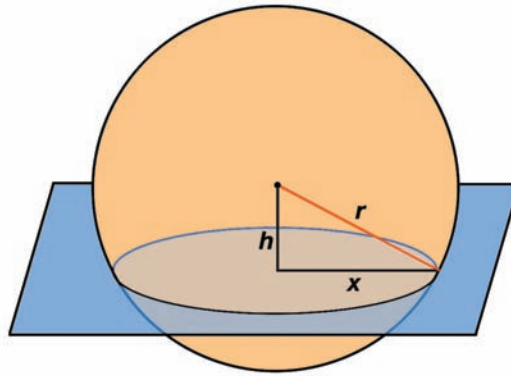


Observou, então, a área delimitada, em cada um dos sólidos, por uma secção paralela ao plano α .

No esquema a seguir, é possível observar essas áreas.

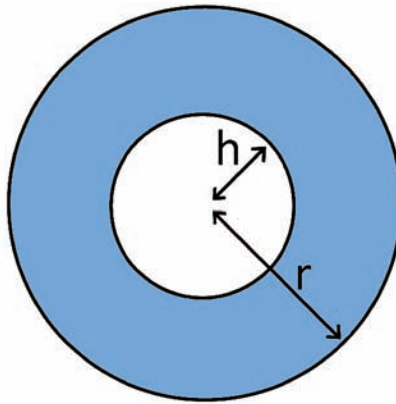


Na secção plana da esfera, a figura formada é um círculo de raio x , cuja área é expressa por $A_{\text{círculo}} = \pi x^2$. Observando o triângulo retângulo formado no interior da esfera, é possível escrever a área em função do raio da esfera e distância entre o centro da esfera e o plano.



Como $x^2 = r^2 - h^2$, podemos escrever que $A_{\text{círculo}} = \pi(r^2 - h^2)$.

Para o sólido da esquerda, a secção está indicada na figura a seguir.



Repare que como a altura de cada cone é igual ao raio da base, o ângulo entre o eixo e a geratriz do cone é de 45° . E é isso que justifica o fato de o raio do círculo menor ser exatamente a distância entre o plano que passa pelo centro da esfera e a secção plana.

A área dessa secção é a área de uma coroa circular, ou seja, a diferença entre as áreas de um círculo de raio r e um círculo de raio h . Assim, $A_{\text{coroa}} = \pi(r^2 - h^2)$.

Para concluir, Arquimedes usou um raciocínio que originou o cálculo integral. Contudo, podemos concluir a determinação da medida do volume da esfera, lançando mão do Princípio de Cavalieri, século XVII.

Como as áreas das secções obtidas são congruentes e os dois sólidos têm a mesma altura, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume. Com isso, podemos obter o volume da esfera através do cálculo do volume do outro sólido. Esse volume é igual ao volume do cilindro menos duas vezes o volume do cone:

$$V_{\text{esfera}} = \pi r^2 \cdot (2r) - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = 4\pi r^3$$

ETAPA FLEX

AGORA, É COM VOCÊ!

1. Calcule a medida da área de um setor circular de 30° e raio 2cm.

Resposta

$$\text{Razão de proporcionalidade } \frac{30}{360} = \frac{1}{12}.$$

$$A_{\text{setor}} = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \text{ cm}^2.$$

• • • • •

2. Resolva as questões a seguir.

- a. Determine o volume de uma esfera que possui raio de 30cm?

Resposta

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 30^3 = 36.000\pi \text{ cm}^3$$

• • • • •

- b. Qual é o raio de uma esfera que possui volume igual a $972\pi \text{ cm}^3$?

Resposta

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 972\pi \Rightarrow 4\pi r^3 = 2916\pi \Rightarrow r^3 = 729 \Rightarrow r^3 = 9^3 \Rightarrow r = 9 \text{ cm}$$

• • • • •

- c. Se Rosi possui 200cm^3 de massinha de modelar e deseja fazer 4 esferas iguais, qual deve ser, aproximadamente, a medida do raio de cada esfera?

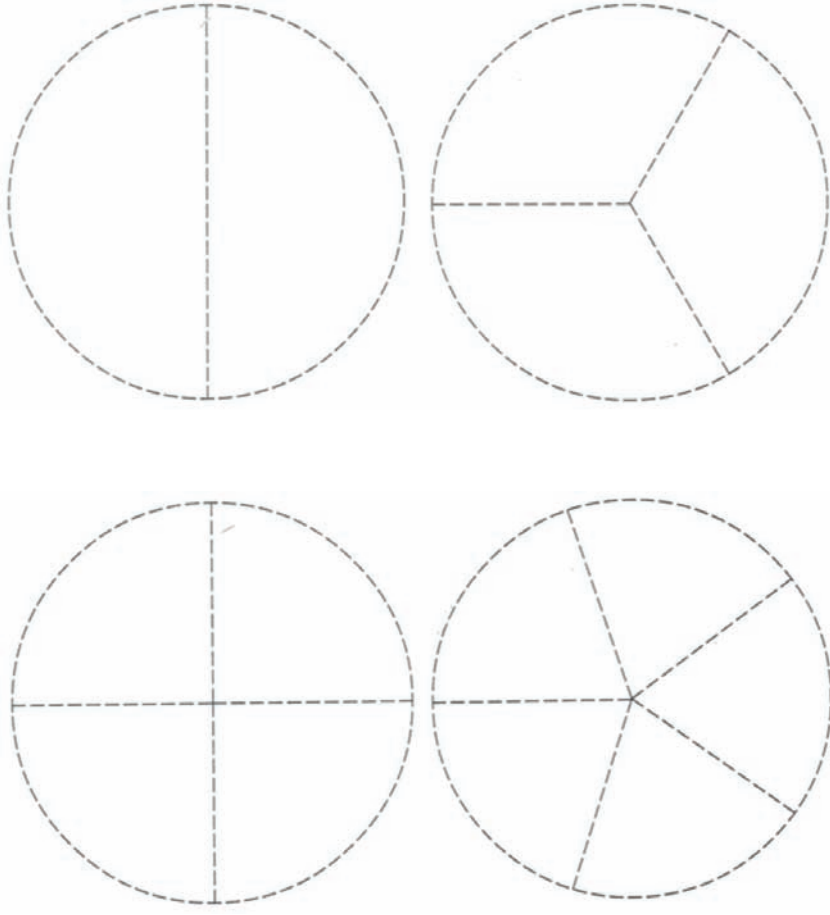
(Use $\pi \cong 3$).

Resposta

$$V_{\text{esfera}} = \frac{200}{4} = 50 \text{ cm}^3. \text{ Por outro lado, } V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

$$\text{Assim, } \frac{4\pi r^3}{3} = 50 \Rightarrow 4r^3 = 50 \Rightarrow r^3 = 12,5 \Rightarrow r \cong 2,32 \text{ cm}.$$

• • • • •



Anexo I



