Reforço escolar · Matemática ·

Embrulhando uma Esfera!

Dinâmica 6

2ª Série | 4º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Geométrico.	Geometria Espacial: Esferas.

DINÂMICA	Embrulhando uma esfera!
HABILIDADE BÁSICA	H05 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
HABILIDADE PRINCIPAL	H24 – Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas utilizando o cálculo da área da superfície esférica e do volume de uma esfera.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Parece, mas não é!	15 a 25 min.	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
2	Um novo olhar ...	Embrulhando uma bola!	20 a 25 min.	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	De π em π!	20 a 25 min.	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

No cálculo de áreas de figuras espaciais, no Ensino Médio, quase sempre trabalhamos com a planificação das superfícies. No entanto, ao estudar a área da superfície esférica não é possível fazer uso de tal manipulação. Isto ocorre por se tratar de uma superfície que não pode ser planificada. Sugerimos, assim, na segunda etapa desta dinâmica, que os alunos realizem uma atividade que possibilite essa reflexão, através de uma atividade na qual os alunos devem embrulhar uma bola, tentando utilizar o mínimo de papel, para que, por fim, na terceira etapa, explorem a fórmula da medida da área. Para a primeira etapa, onde costumamos abordar um tópico de revisão, o tema escolhido é semelhança. Partimos da comparação entre garrafas de refrigerante e exploramos figuras semelhantes para que os alunos possam discutir e distinguir os termos “semelhantes” e “parecidos”.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

25 MINUTOS

Matemática

Atividade • Parece, mas não é!

Objetivo

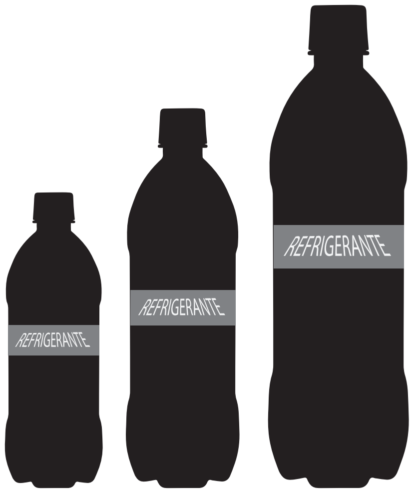
Explorar o conceito de semelhança.

Descrição da atividade:

Professor, esta atividade tem por objetivo trabalhar o conceito de semelhança através da observação de figuras "parecidas" entre si, destacando aquelas que são, de fato, semelhantes. Observe a proposta a seguir.

Parecido ou semelhante? O que você acha?

Considere três garrafas de refrigerante de tamanhos diferentes e da mesma marca.



Quando ouvimos a expressão "figuras semelhantes" podemos pensar em figuras que se assemelham, ou seja, figuras parecidas, de mesma aparência. No entanto, matematicamente figuras semelhantes são aquelas que têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. E é por isso que podemos associar a ideia de figuras semelhantes a ampliações ou reduções.

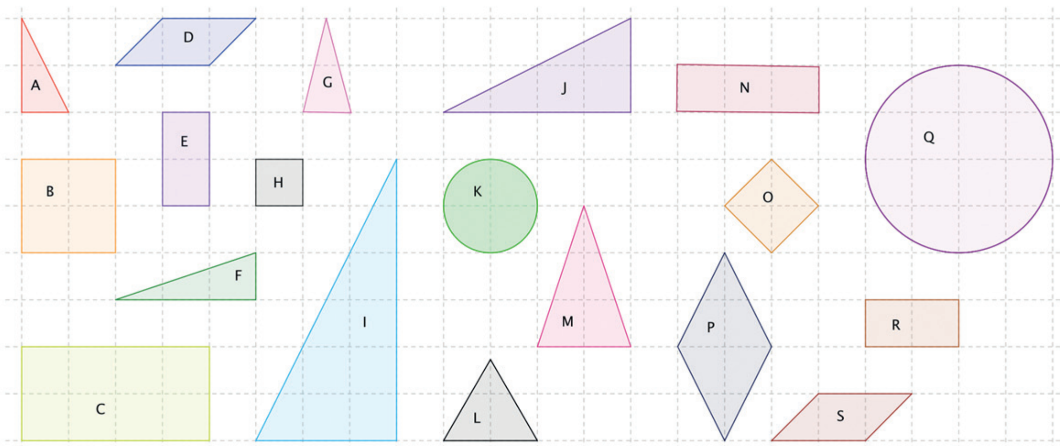
1. E aí? As três garrafas são semelhantes?

   Discuta com seus colegas e explique por que vocês fizeram tal afirmação.

Resposta

As garrafas não são semelhantes.

2. Seu grupo recebeu de seu professor uma folha com formas geométricas em uma malha retangular, como na figura a seguir. Vocês devem recortar cada uma dessas figuras.



3. Separe os círculos.

Eles são semelhantes?

Imagine um outro círculo com raio bem pequenino e outro com raio bem grande. Eles são semelhantes aos círculos que você recortou?

Resposta

Sim.

Sim.

4. Separe agora os quadriláteros.

a. Agrupe os semelhantes.

Indique os grupos formados.

Resposta

São três grupos:

D e S;

C, E e R;

B, H e O.

Professor

b. Algum quadrilátero ficou sem grupo?

Resposta

Sim, o quadrilátero P.

• • • • •

c. Pegue um quadrado e um retângulo e observe-os atentamente.

Levando em conta essa observação, podemos garantir que dois polígonos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes?

Resposta

Não é suficiente que os ângulos correspondentes sejam congruentes para que dois polígonos sejam semelhantes.

• • • • •

5. Agora separe os triângulos.

a. Agrupe os semelhantes.

Quais os grupos que você obteve?

Resposta

Há apenas um grupo: A, I e J.

• • • • •

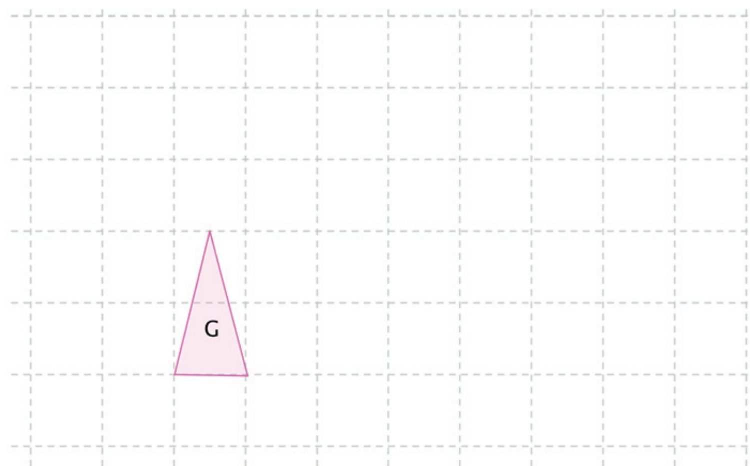
b. Quais triângulos não foram agrupados?

Resposta

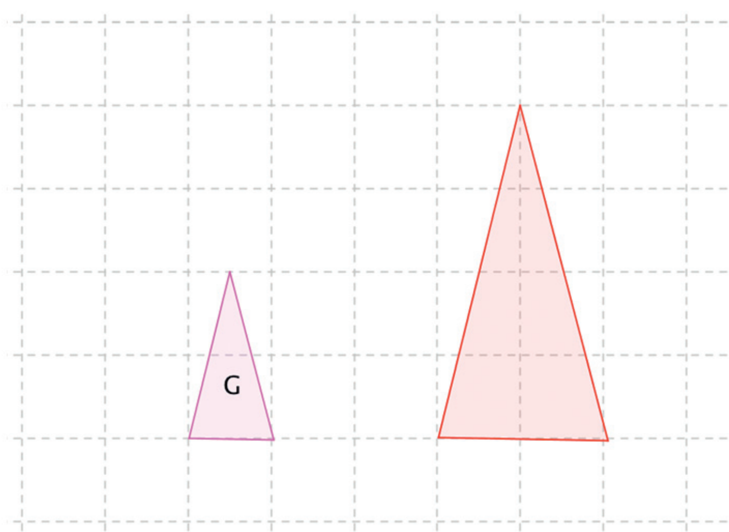
Os triângulos G, L e M.

• • • • •

c. Desenhe um triângulo semelhante ao triângulo G, cuja medida da base seja de duas unidades.



Resposta



Recursos necessários:

- Garrafas de refrigerante da mesma marca e de tamanhos diferentes.
- Encarte do aluno.
- Polígonos no anexo do encarte do professor.
- Tesoura.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, a turma deve ser organizada em grupos de três ou quatro alunos.*
- *Distribua uma malha quadrangular com os polígonos desenhados, disponível no anexo e uma tesoura para cada grupo.*
- *Oriente os alunos a recortarem os polígonos sobre seus lados com cuidado.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, no estudo de semelhança é interessante que não façamos uma abordagem restrita a polígonos, em particular, a triângulos, como é usual. Por esse motivo, iniciamos esta atividade com um objeto em três dimensões. É interessante que você leve garrafas de tamanhos diferentes de refrigerante para que os alunos vivenciem as formas da Questão 1. Caso eles pensem que as figuras são semelhantes, você pode pedir que observem a tampinha das garrafas. Com isso, eles podem perceber que apesar de o tamanho da garrafa ter diminuído, aparentemente de forma proporcional, a boca das garrafas e, consequentemente, as tampinhas, permanecem do mesmo tamanho.*
- *Na Questão 3, os alunos devem perceber que todos os círculos são sempre semelhantes. Você pode aproveitar para comentar que o mesmo ocorre com a esfera.*
- *Nas Questões 4 e 5, é importante que os alunos verifiquem a congruência de ângulos e a proporcionalidade dos lados. Caso tenham dificuldade para visualizar os ângulos congruentes nos polígonos semelhantes, oriente-os a sobrepor os polígonos para comparar os respectivos ângulos. Para verificar a proporcionalidade dos lados, eles podem utilizar o mesmo recurso ou as medidas da malha.*
- *Na Questão 4c, aproveite para relembrar a definição de semelhança de polígonos: lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. Para finalizar a atividade, aproveite para destacar que, no caso dos triângulos, ao contrário de outros polígonos, a forma depende unicamente dos seus ângulos, e que, assim, triângulos com ângulos correspondentes congruentes são semelhantes.*

Segunda Etapa
Um novo olhar

25 MINUTOS

Atividade • Embrulhando uma bola!

Objetivo

Perceber a inexistência de planificação da esfera.

Descrição da Atividade:

Professor, nesta atividade, convidamos os alunos a "embrulhar" uma bola para que eles percebam na prática que não dá para cobrir com papel a superfície da esfera. Veja a proposta a seguir.

Você já tentou embrulhar uma bola para presente?

Não é uma tarefa simples, certo?

O desafio aqui proposto é que você e seus colegas façam um "embrulho" de uma bola, cobrindo sua superfície toda e utilizando o mínimo de papel.

A única regra que deve ser seguida é que toda a superfície da bola seja coberta pelo papel.

Siga os passos indicados a seguir e use sua criatividade!

1. Seu professor entregou para o seu grupo uma bola e papel para que ela seja embrulhada. Faça o embrulho tentando utilizar o mínimo de papel.
2. E aí? Foi fácil? Seu grupo conseguiu cobrir a esfera perfeitamente?

Resposta

Resposta pessoal.

3. E se o objeto a ser "embrulhado" fosse uma caixa de sapato? Seria mais fácil? Ou melhor, seria possível?

   Lembre-se: esse "embrulho" não é como os de presente, ele é apenas para cobrir a caixa.

Resposta

Resposta pessoal.

Professor

4. Levando em consideração a experiência realizada, troque ideias com seus colegas e decidam se é ou não possível cortar um papel do tamanho exato de uma esfera.

Recursos necessários

- Bolas.
- Folhas de jornal ou diferentes papéis.
- Tesoura.
- Fita adesiva (de preferência a mais fina que conseguir).
- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, deixe a turma organizada como na etapa anterior e providencie bolas suficientes para cada grupo.*
- *Repare que a atividade pode ser realizada com qualquer bola, como, por exemplo, bola de futebol, vôlei, baquete, tênis, dente de leite. Evite bolas muito pequenas, por exemplo, as bolinhas de gude. Não há problema se as bolas dos grupos forem de tamanhos diferentes.*
- *Sugerimos a utilização do jornal por ser um papel reaproveitável e pelo seu tamanho, caso a bola utilizada seja grande. Dessa maneira, a distribuição do papel para os grupos deve ser de acordo com o tamanho da bola.*
- *É provável que a estratégia dos alunos envolva a utilização de fita adesiva, para juntar os pedaços de papel, por isso, é importante que você disponibilize esse material para cada grupo.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, no primeiro item, os alunos podem ter a necessidade de fazer um novo "embrulho", então, reserve material para isso.*
- *É importante que os alunos não fiquem restritos ao uso de uma folha no formato retangular, geralmente usadas para embrulhos. A princípio, eles devem observar que formas "estranhas" podem se aproximar melhor da superfície da bola. Você deve incentivá-los nesse sentido.*

- *Incentive seus alunos a buscarem estratégias, mesmo que sua realização não seja tão simples. Caso os alunos tenham dificuldade para encontrar uma estratégia, você pode sugerir que experimentem uma cobertura a partir de pedaços pequenos de papel, por exemplo.*

- *É interessante que os alunos observem que pedaços pequenos justapostos, aproximam melhor a superfície da bola. Para ajudá-los a perceber isso, você pode levar uma "bola" de isopor, pois estas são formadas por pequenas superfícies justapostas. Você pode também levar uma bola coberta por pedaços de papel bem pequenos, ou ainda por pedacinhos de fita adesiva. Inclusive, cobrir a bola utilizando pedacinhos de fita adesiva pode ser uma das estratégias utilizadas pelos alunos.*

- *É importante que os alunos cubram toda a superfície e que não haja sobreposição de papel. Para isso, você pode sugerir também que usem tesoura para cortar os excessos de papel.*

- *No item 3, esperamos que os alunos percebam que existe uma planificação para o paralelepípedo. Você pode usar essa nomenclatura com os alunos, mas não deve se esquecer de que isso não é o mais importante: os alunos devem entender o que significa cobrir completamente e sem excesso a superfície de um sólido.*

- *No item 4, esperamos que os alunos percebam que não é possível. Apesar de a Terra não ser uma esfera perfeita, você pode citar o mapa mundi para exemplificar que não existe planificação da Terra, chamando a atenção, por exemplo, de que a Groelândia é menor do que parece no mapa.*

- *A impossibilidade de planificar a esfera é uma sofisticação matemática que não está ao alcance de alunos da 2ª série do Ensino Médio. Contudo, experiências práticas como a de embrulhar uma bola estão ao alcance desses alunos e é, portanto, uma boa oportunidade de abordar esse tema. Caso os alunos não consigam perceber que não há planificação para a esfera a partir das tentativas de cobri-la, você pode propor aos seus alunos que "desmontem" uma bola. Utilizando uma bola do tipo dente de leite, recorte por uma circunferência máxima e estique-a sobre uma mesa. Nesse momento, os alunos devem notar que não fica sobre o plano, que é preciso fazer cortes para isso (aqui cabe o paralelo com a distorção do mapa).*

Terceira Etapa
Fique por dentro!

Atividade • De π em π!

Objetivo

Utilizar a fórmula da medida da área de uma superfície esférica.

Descrição da Atividade:

Nesta etapa, pretendemos que o aluno explore a fórmula da medida da *área de uma superfície esférica* dada em função de seu raio. O inverso também será explorado, uma vez dada a medida da área, os alunos devem encontrar a medida do raio da esfera em questão. Veja a proposta.

Na etapa anterior, você e seus colegas buscaram uma aproximação para a superfície de uma bola. Poderíamos considerar, então, que a medida da área de uma superfície esférica é dada pela área do papel utilizado para "embrulhá-la", desde que esse fosse o mínimo possível. Como vimos, na prática, isso *é* difícil. Na verdade, é impossível!

A partir de cálculos matemáticos mais avançados, é possível determinar que a medida da área de uma superfície esférica é dada por

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

onde *r* é seu raio.

Nesta etapa, você e seus colegas devem preencher uma tabela e responder a algumas perguntas. Vamos lá?

1. Preencha a tabela a seguir com as medidas das áreas das superfícies esféricas, considerando a fórmula $A = 4\pi r^2$.

Raio (em cm)	Área da superfície esférica (em cm²)
$\frac{1}{2}$	$4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$
1	
2	
$\frac{5}{2}$	
3	
4	

Matemática

Raio (em cm)	Área da superfície esférica (em cm²)
	$4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$
1	4π
2	16π
	25π
3	36π
4	64π

2. Observando os valores obtidos anteriormente, você e seus colegas devem chegar a uma importante relação. Para isso, observem a tabela a seguir.

Relação entre os raios			**Relação entre as áreas**	
$r = 1$	$r = 2$		$S = 4\pi$	$S = 16\pi$
2 vezes			4 vezes	
$r = 1$	$r = 3$		$S = 4\pi$	$S = 36\pi$
3 vezes			9 vezes	
$r = 2$	$r = 4$		$S = 16\pi$	$S = 64\pi$
2 vezes			4 vezes	
$r = 1$	$r = {}^1/_2$		$S = 4\pi$	$S = \pi$
metade			quarta parte	
$r = 1$	$r = 4$		$S = 4\pi$	$S = 64\pi$
4 vezes			16 vezes	

a. Você percebe alguma relação? Qual?

Resposta

A razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre os raios.

• • • • •

b. E se a razão entre os raios for igual a 10, qual é a razão entre as superfícies esféricas?

Resposta

A razão entre as superfícies é igual a 100.

• • • • •

3. Agora, você e seus colegas devem determinar o raio da esfera conhecendo a medida da área da sua superfície.

a. Qual *é* o raio da esfera cuja superfície tem a área igual a 256π cm^2?

Resposta

$$4\pi r^2 = 256\pi \rightarrow 4r^2 = 256 \rightarrow r^2 = 64 \rightarrow r = 8$$

• • • • •

b. Qual *é* o raio da esfera cuja superfície tem a área igual a 169π cm^2?

Resposta

$$4\pi r^2 = 196\pi \rightarrow 4r^2 = 196 \rightarrow r^2 = \frac{196}{4} \rightarrow r = \frac{13}{2}$$

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Matemática

Procedimentos Operacionais

- *Professor, mantenha a turma organizada como nas etapas seguintes.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, na Questão 1, mais uma vez retomamos o cálculo do valor numérico, para que o aluno se familiarize com o cálculo da área da superfície esférica. Os alunos podem ter dificuldade em calcular o quadrado das frações. Caso seja necessário, retome esse assunto com a turma, mostrando que se deve elevar ao quadrado numerador e denominador.*
- *Na Questão 2, esperamos que os alunos percebam que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre os raios, mas, caso eles percebam outras relações, encoraje-os a apresentá-las. Esteja atento, pois os alunos podem ter dificuldade em expressar em palavras a relação. Caso eles tenham dificuldade em responder ao item (b), explique a eles que dizer que "a razão entre os raios é igual a 10" é o mesmo que dizer que "um raio é 10 vezes o outro".*
- *Na Questão 3, os alunos devem igualar a expressão da área a valor dado, resolvendo uma equação. Caso os alunos tenham dificuldade, faça um exemplo na lousa, enfatizando que é preciso ter atenção para substituir corretamente na fórmula o dado do problema. Nesse caso, os alunos devem resolver equações do segundo grau, cuja solução pode ser obtida apenas calculando a raiz quadrada. Contudo, os alunos podem usar estratégias próprias para resolvê-las e é importante que você os encoraje.*

Quarta Etapa
QUIZ

Considerando o Planeta Terra como uma esfera de raio 6 371 km, qual é a área superficial da Terra?

a. $50\,968\pi$ Km^2

b. $25\,484\pi$ Km^2

c. $40\,589\,641\pi$ Km^2

d. $162\,358\,564\pi$ Km^2

e. $649\,434\,256\pi$ Km^2

Quinta Etapa
Análise das Respostas do Quiz

15 MINUTOS

Resposta

A área da superfície esférica é dada por $A = 4\pi r^2$. Fazendo $r = 6\ 371$, temos:

$$A = 4\pi \cdot (6.371) = 4\pi (40.598.641)^2 = 162.358.564$$

Resposta correta: alternativa (d).

Erros possíveis

É possível que os alunos que marcaram a letra (a) tenham confundido a operação que deveriam realizar, no lugar de elevar ao quadrado, multiplicaram o raio por 2. Já os alunos que marcaram a alternativa (b), provavelmente, não elevaram o raio ao quadrado. Possivelmente, o erro cometido pelo aluno que escolheu a alternativa (c) foi o de se esquecer de multiplicar por 4 para encontrar o valor da área. O aluno que escolheu a letra (e) pode ter feito a multiplicação por 4 antes de elevar ao quadrado.

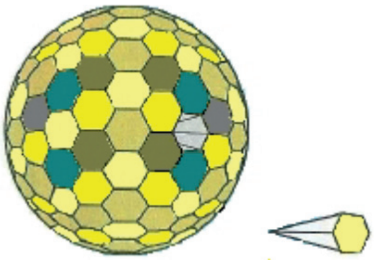
• • • • •

Etapa Flex
Para saber +

Área da superfície esférica

Na etapa 2 dessa dinâmica, discutimos um pouco sobre aproximações da superfície de uma bola. Fazendo o mesmo para uma superfície esférica, podemos imaginar vários pedacinhos de papel justapostos, cobrindo toda a superfície. Quanto menores esses pedaços de papel, melhor a aproximação obtida.

De forma análoga, podemos imaginar uma aproximação da esfera por várias pirâmides, cujos vértices são o centro da esfera e cujas alturas têm a medida do raio, e de maneira que as bases de todas as pirâmides juntas cubram a superfície esférica, conforme indica a figura a seguir.



Matemática

Deste modo, o volume da esfera se aproxima da soma dos volumes de todas as pirâmides utilizadas, enquanto a medida da superfície da esfera é aproximadamente igual à soma das áreas de todas as bases das pirâmides. Como o volume de uma pirâmide é dado por $V = \frac{1}{3}Bh$, onde B é a área da base e h é a altura da pirâmide, podemos escrever uma aproximação para o volume da esfera como

$$\frac{1}{3}B_1 \cdot r + \frac{1}{3}B_2 \cdot r + \frac{1}{3}B_3 \cdot r + ... + \frac{1}{3}B_n \cdot r \qquad (1)$$

Onde $B_1, B_2, B_3, ...B_n$, são as medidas das áreas das bases das pirâmides.

Colocando o termo $\frac{1}{3} \cdot r$ em evidência, temos:

$$\frac{1}{3} \cdot r(B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n) \qquad (2)$$

Por outro lado, sabemos que o volume da esfera é dado por

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad (3)$$

De (2) e (3) temos:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cong \frac{1}{3} \cdot r\left(B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n\right) \qquad (4)$$

Observando que a área da superfície esférica, A_{esfera}, é aproximada pela soma das áreas de todas as bases das pirâmides, isto é, $B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n \cong A_{esfera}$, concluímos que $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot A_{esfera}$ (5)

Deste modo, simplificando a equação acima, é possível escrever:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2 \qquad (6)$$

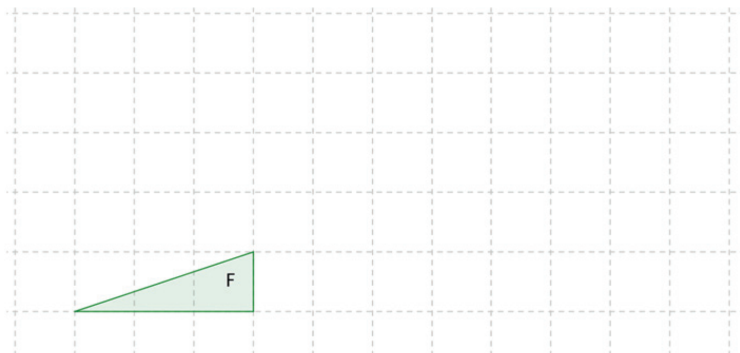
Sendo $4\pi r^2$ a fórmula que nos permite calcular a medida da área da superfície esférica de raio r.

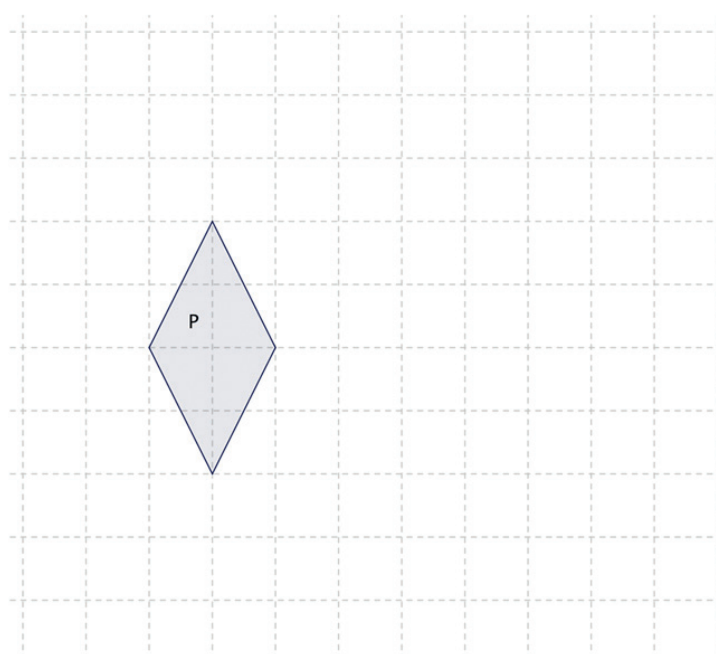
Professor

Agora é com você!

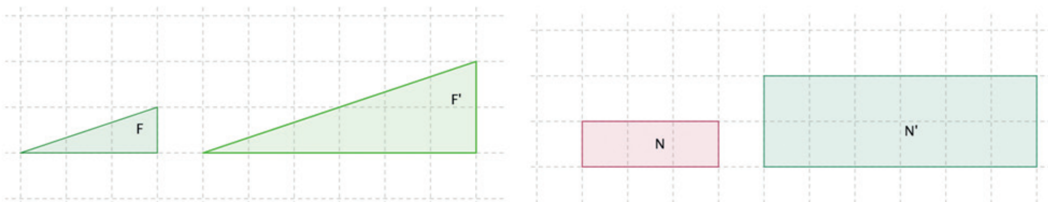
1. Na malha quadriculada a seguir, desenhe polígonos F’, N’ e P’, semelhantes aos representados pelas letras F, N e P, respectivamente, com razão de semelhança igual a 2.

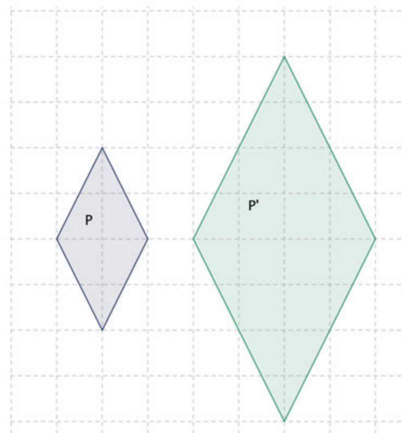
   Dica: Se o lado de uma figura mede 6 e o lado correspondente da figura semelhante mede 12, então a razão de semelhança é 2.





Resposta





2. Uma laranja tem a forma de uma esfera, cujo diâmetro mede 8 cm. Então, a área aproximada da casca dessa laranja é: (Faça $\pi \cong 3,14$.)

Resposta

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 4^2 = 64\pi \cong 201 cm^2.$$

3. Determine a área da superfície esférica de uma esfera de raio 10 cm.

Resposta

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi cm^2$$

Matemática

PARA RECORTAR