Reforço escolar · Matemática ·

Fácil e Poderoso

Dinâmica 1

3ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Algébrico-Simbólico	Polinômios e Equações Algébricas.

DINÂMICA	Fácil e poderoso.
HABILIDADE BÁSICA	Efetuar cálculos com polinômios.
HABILIDADE PRINCIPAL	H16 - Resolver problemas envolvendo operações com polinômios.
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.

Professor

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar ideias.	Uma divisão diferente.	20 a 25 min.	Em trios.	Individual.
2	Um novo olhar...	É fácil provar...	15 a 20 min.	Nos mesmos grupos.	Individual.
3	Fique por dentro!	Esse teorema é poderoso.	20 a 30 min.	Nos mesmos grupos, com encerramento coletivo.	Individual.
4	Quiz.	Quiz.	10 min.	Individual.	Individual.
5	Análise das respostas ao Quiz.	Análise das respostas ao Quiz.	15 min.	Coletiva.	Individual.
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Fácil e poderoso é o Teorema do Resto, que se refere ao resto da divisão de um polinômio por um binômio da forma x – a e tem consequências importantes para a resolução de equações algébricas. É um assunto didaticamente interessante, pois se trata de um resultado de verificação simples e com aplicações imediatas.

Embora o teorema se refira à divisão, a revisão aqui focalizada restringiu-se à multiplicação. O tempo de uma dinâmica não seria suficiente para incluir também a revisão da divisão. As atividades foram, então, propostas de forma a não exigir que o estudante faça divisões. Também os exemplos estudados se restringem a polinômios de uma só variável. Isso porque as aplicações serão feitas sobre as equações algébricas de uma variável.

Como tem ocorrido nas dinâmicas anteriores, você tem margem para administrar a duração de cada etapa de acordo com a reação da sua turma.

Primeira Etapa

Compartilhar ideias

Atividade • Uma divisão diferente.

Objetivo

Rever o produto de polinômios.

Descrição da atividade:

Explorando a analogia com a divisão de números naturais, é introduzida a expressão que une dois polinômios, o quociente e o resto da divisão do polinômio de grau mais alto pelo de grau mais baixo.

Questão 1

Quando você divide um número natural por outro, pode obter resto nulo ou não. No primeiro caso, a divisão é exata e garante que o dividendo é múltiplo do divisor. No segundo, a relação entre os quatro números envolvidos, dividendo (D), divisor(d), quociente(q) e resto(r),

D	d
r	q

pode ser resumida num produto seguido de uma soma, observando que o resto é sempre menor que o divisor.

Como você indica, numa única expressão numérica, que a divisão de 20 por 3 tem quociente 6 e resto 2?

Resposta

Espera-se que o aluno chegue à expressão $20 = 3 \times 6 + 2$.

• • • • •

Operações análogas podem ser feitas com polinômios. Você se lembra de como operar com polinômios? Vamos relembrar? Calcule os valores de a e de b a fim de que a igualdade a seguir seja verdadeira:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 = (x^2 - 5)(x^2 - 3x + 9) + (ax + b)$$

A adição e a multiplicação de polinômios satisfazem às propriedades distributiva e associativa e, então, podem ser realizadas em esquemas análogos aos dos números:

x^2	$-3x$	$+9$		
	x^2	-5		
x^4	$-3x^3$	$+9x^2$		
		$-5x^2$	$+15x$	-45
x^4	$-3x^3$	$+4x^2$	$+15x$	-45

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 = (x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 15x - 45) + (ax + b) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 15x + ax - 45 + b =$$

$$= x^4 - 3x^3 + 4x^2 + (15 + a)x + (b - 45).$$

Igualando os coeficientes dos polinômios em ambos os lados da igualdade:

*$15 + a = 0$ e $b - 45 = 0$. Logo, $a =$ **-15 e $b = 45$**.*

Nesse caso, do mesmo modo como se trata a divisão de números naturais com resto, pode-se dizer que a **divisão de $x^4 - 3x^3 + 4x^2$ por $x^2 - 5$ tem quociente $x^2 - 3x + 9$, com resto $(-15x + 45)$**, ou seja:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 = (x^2 - 5)(x^2 - 3x + 9) + (-15x + 45)$$

Isso pode ser feito entre dois polinômios P(x) e S(x), desde que o grau de P(x) (dividendo) seja maior do que ou igual ao grau de S(x) (divisor). O resto R(x) deverá ter grau menor do que o de S(x).

Isto é, se o grau de P(x) é maior que ou igual ao grau de S(x), é possível determinar polinômios Q(x) e R(x) tais que:

$P(x) = S(x) \times Q(x) + R(x)$, sendo o grau de R menor que o grau de S.

Como na divisão entre números inteiros, Q(x) diz-se o quociente de P(x) por S(x) e R(x) será resto da divisão.

Questão 2

Seja $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 8$ e $S(x) = x - 2$. Sabendo que o quociente de P por S é $Q(x) = x^2 - x - 1$, encontre o resto dessa divisão. Antes de fazer o cálculo, analise qual deve ser o seu grau.

Resposta

P1(x) = S(x). Q(x) + R(x).

Comparando os graus dos polinômios, como S tem grau 1 e o resto deve ter grau menor, espera-se que o estudante perceba que esse resto terá grau 0, ou seja, será uma constante (R = k). Temos então P1(x) = S(x). Q(x) + k, isto é:

x3 – 3x2 + x + 8 = (x – 2). (x2 – x – 1) + k

x2	– x	– 1	
	x	– 2	
x3	– x2	– x	
	– 2x2	+ 2x	+ 2
x3	– 3x2	+ x	+ 2

Então:

P(x) = x3 – 3x2 + x + 8 = (x3 – 3x2 + x + 2) + k = x3 – 3x2 + x + (k+2)

Daí:

k + 2 = 8, isto é, k = 6.

● ● ● ● ●

Questão 3

Seja P(x) = $x^3 - 3x^2 + x + 2$ e S(x) = x – 2, sabendo que o quociente de P_2 por S é Q(x) = $x^2 - x - 1$, encontre o resto dessa divisão.

Resposta

Pelos cálculos acima, tem-se:

P2(x) = x3 – 3x2 + x + 2 = (x – 2). (x2 – x – 1) = S(x). Q(x) + 0.

Logo, R = 0 e a divisão é exata.

● ● ● ● ●

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Foi indicado o trabalho em trios para que haja discussão entre os estudantes. Os cálculos são feitos pelos grupos, mas o registro precisa ser individual para consulta posterior.*

Intervenção Pedagógica

Professor/a:

- *Nosso interesse no momento são as equações algébricas a uma variável. Por esse motivo, vamos nos restringir a polinômios em uma variável, de grau n*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

sendo os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ *números reais, com* $a_n \neq 0$ *e n, um número natural qualquer.*

- *No caso dos polinômios de uma variável, o papel das ordens nos números é análogo ao papel das potências dessa variável. Mesmo porque as ordens dos números correspondem a potências de 10. A escrita de um número no nosso sistema decimal corresponde a um polinômio com x = 10. Daí, a razão pela qual o cálculo do produto poder ser feito em um algoritmo análogo ao da multiplicação entre números com 1, 2 ou mais algarismos. O mesmo pode ser feito com as demais operações, como a adição de polinômios, alinhando potências de mesmo expoente e a divisão com um algoritmo similar ao da divisão entre naturais.*

- *No estudo das equações algébricas, a divisão de polinômios tem um papel importante. A atividade com a multiplicação é proposta aqui como um preâmbulo à divisão. Além disso, é importante mostrar ao aluno que na divisão do polinômio P(x) pelo polinômio S(x) a relação P(x) = S(x). Q(x) + R(x) permite mostrar que o grau do quociente Q(x) é igual à diferença entre o grau de P(x) e o grau de S(x).*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

20 MINUTOS

Atividade • É fácil provar...

Objetivo

Enunciar e provar o Teorema do Resto.

Descrição da atividade:

Esta atividade utilizará os cálculos feitos anteriormente para ilustrar o Teorema do Resto e sua demonstração, que é muito simples. Irá também evidenciar para o aluno como um resultado tão simples pode ser tão poderoso!

Questão

1. Calcule os valores de $P_1(2)$ e $P_2(2)$ diretamente por substituição nos polinômios

   $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + x + 8$ e $P_2(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

Resposta

$P_1(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 8 = 8 - 12 + 2 + 8 = 18 - 12 = 6$

e

$P_2(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 2 = 8 - 12 + 2 + 2 = 12 - 12 = 0.$

• • • • •

2. Compare esses resultados com os restos da divisão de P_1 e de P_2 por $(x - 2)$ e veja como justificar esse resultado a partir das identidades:

   $P_1(x) = Q(x) \times (x - 2) + 6$ e $P_2(x) = Q(x) \times (x - 2)$.

Resposta

Dividindo $P_1(x)$ por $S(x) = x - 2$, obtém-se:

$P_1(x) = Q_1(x). (x - 2) + R(x).$

Como

$P_1(2) = 6,$

e tem-se também

$P_1(2) = Q_1(2) \times (2 - 2) + R(x) = Q_1(2) \times 0 + R(x) = R(x)$,

o resto da divisão de $P_1(x)$ por $(x - 2)$ é $P(2)$.

De forma análoga, o resto da divisão de $P_2(x)$ por $x - 2$ será $P_2(2) = 0$.

• • • • •

3. Numa situação geral, em que você divida um polinômio de qualquer grau n ≥ 1 pelo binômio do 1º grau, (x – a), analise as seguintes situações:

a. Se a divisão de P por (x – a) tem quociente Q(x) e resto R(x), qual é o grau de R(x)?

Resposta

Analogamente aos casos numéricos vistos anteriormente, como o grau do divisor (x – a) é 1, o grau do resto, que deve ser menor, será 0, ou seja, R(x) será uma constante.

• • • • •

b. Sabendo, então, que P(x) = Q(x) (x – a) + R, qual será o valor de P para x = a, isto é, quanto vale P(a)?

Resposta

Espera-se que o estudante perceba que, analogamente aos casos vistos anteriormente, como x – a vale 0 quando x = a, não será preciso calcular o valor de Q(a) porque $P(a) = Q(a) \times 0 + R = 0 + R = R$.

• • • • •

Parabéns! Você acaba de provar o Teorema do Resto, que diz:

> Dado um polinômio P(x), de grau n ≥ 1 que dividido por (x – a) tem quociente Q(x) e resto R, tem-se que R é constante e
>
> P(a) = R.

Parece um resultado simples e ingênuo, certo?

Errado: ele é um resultado bem poderoso, como você vai ver na próxima etapa.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *O planejamento é para que as questões continuem sendo resolvidas em grupos e que os registros sejam feitos individualmente.*
- *Provavelmente, será necessária uma discussão final, principalmente para enunciar o teorema.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Professor/a:

- *É comum que a simples alusão a um teorema e, principalmente, à sua demonstração cause uma certa rejeição da parte do estudante como sendo algo difícil que ele não será capaz de entender. Esta colocação do Teorema do Resto, partindo de casos particulares e sugerindo a prova antes do seu enunciado, tem o objetivo de superar tal sentimento de rejeição e impotência.*
- *Outra vantagem do estudo deste teorema partindo da sua prova é mostrar como um resultado de simples verificação pode ter consequências importantes, como, por exemplo, na resolução de equações algébricas de qualquer grau, o que será visto na próxima etapa.*
- *Este resultado será mais bem explorado com o uso da divisão de polinômios. Nesta dinâmica, porém, foi feita a opção por rever somente a multiplicação, a fim de graduar as dificuldades e manter-se dentro do tempo disponível.*

• • • • •

Terceira Etapa
Fique por dentro!

30 MINUTOS

Atividade • Esse teorema é poderoso.

Objetivo

Aplicar o Teorema do Resto.

Descrição da atividade:

A partir de alguns exemplos, o aluno vai entrar em contato com resultados importantes, consequências do Teorema do Resto, ligados a fatoração e zeros de polinômios. Tais resultados são importantes na resolução de equações algébricas de grau maior que 2.

E, então: Qual o poder deste teorema?

Questão 1

Na etapa anterior, você viu que o resto na divisão de $P_2(x)$ por $(x – 2)$ foi 0. Você concluiu, então, que $P_2(2) = 0$, mas concluiu também que $P_2(x)$ era o produto do quociente $Q(x)$ por $(x – 2)$. Isto é, você viu também que $(x – 2)$ é um <u>fator</u> de $P_2(x)$. Você se lembra do que é "<u>fatorar</u>"?

Fatorar é escrever como um produto. Como o resto da divisão era 0, você pôde escrever: $P_2(x) = (x^2 – x – 1) (x – 2)$.

Da mesma forma, será que $(x – 5)$ é um fator de $P(x) = x^4 – 5x^2 – 500$?

Resposta

Um modo de saber se (x – 5) é um fator de P(x) é procurar o resto da divisão de P(x) por x – 5.

P(5) = 54 – 5 × 52 – 500 = 625 – 125 – 500 = 625 – 625 = 0 = R.

Assim, a divisão é exata e (x – 5) é um fator de P(x).

• • • • •

Questão 2

E qual será o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^4 – 5x^2 – 500$ por $(x + 5)$?

Resposta

Ora, x + 5 = x – (– 5). Então, pelo Teorema do Resto, o resto da divisão de P(x) por (x + 5) será igual a P(– 5):

P(–5) = (– 5)4 – 5 × (–5)2 – 500 = 625 – 125 – 500 = 625 – 625 = 0.

Como no caso anterior, a divisão é exata e, então:

(x + 5) é também fator de P(x)= x4 – 5x2 – 500.

• • • • •

Professor

Como ocorre com a adição e a multiplicação de polinômios, a divisão de polinômios também pode ser feita de modo análogo à divisão de números naturais. O algoritmo que melhor se adapta à divisão de polinômios é aquele chamado “algoritmo longo”, porque separa a multiplicação da subtração. Por enquanto, você não precisa fazer essa divisão, mas vai analisar a operação já pronta.

Questão 3

Nas questões anteriores, você viu que o polinômio $P(x) = x^4 - 5x^2 - 500$ é divisível por $(x + 5)$ e por $(x - 5)$. Então, como acontece com os números naturais, $P(x)$ será divisível pelo produto $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5$.

A equação $P(x) = 0$ é $x^4 - 5x^2 - 500 = 0$. Como $P(5) = P(-5) = 0$, então 5 e – 5 são suas raízes. Será que existem outras raízes dessa equação?

Observe a divisão a seguir e dê a resposta.

x^4	$-5x^2$	-500	$x^2 - 25$
$-x^4$	$+25x^2$		$x^2 + 20$
0	$+20x^2$	-500	
	$-20x^2$	$+500$	
	0	$+0$	

Resposta

Espera-se que o estudante perceba que a equação P(x) = 0 se escreve como

(x2 + 20).(x2 – 25) = 0 que é o mesmo que (x2 + 20).(x + 5).(x – 5) = 0.

Este produto de polinômios é nulo quando pelo menos um dos fatores é nulo, ou seja:

(x + 5)=0 ou (x – 5) = 0 ou (x2 + 20) = 0.

As duas primeiras igualdades nos fornecem as raízes 5 e – 5. A terceira, x2 + 20 = 0, equivale a x2 = – 20. Suas raízes são

$x = \pm \sqrt{-20} = \pm 2i\sqrt{5}$.

Assim, a equação x4 – 5x2 – 500 = 0 tem as raízes reais 5 e – 5 e as raízes imaginárias $2i\sqrt{5}$ *e* $-2i\sqrt{5}$.

Questão 4

a. Observe a divisão de $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ por $(x - 1)$ e responda se 1 é, ou não, raiz da equação $P(x) = 0$.

x^3	$-3x^2$	$-x$	$+3$	$x - 1$
$-x^3$	$+x^2$			$x^2 - 2x - 3$
0	$-2x^2$	$-x$	$+3$	
	$2x^2$	$-2x$		
	0	$-3x$	$+3$	
		$+3x$	-3	
		0	$+0$	

Resposta

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$ é 0, conclui-se que $P(1) = R = 0$ e 1 é raiz da equação $P(x) = 0$.

• • • • •

b. Observe a divisão de $x^2 - 2x - 3$ por $(x + 1)$ e dê uma fatoração de

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

em binômios do 1º grau.

x^2	$-2x$	-3	$x + 1$
$-x^2$	$-x$		$x - 3$
0	$-3x$	-3	
	$+3x$	$+3$	
	0	$+0$	

Professor

Resposta

Como o resto da divisão de x2 – 2x – 3 por (x + 1) é 0, com quociente x – 3, conclui-se que: x2 – 2x – 3 = (x – 3) (x + 1). Do item anterior, podemos concluir que P(x) = x3 – 3x2 – x + 3 = (x2 – 2x – 3) (x – 1). Substituindo (x2 – 2x – 3) pelo produto de dois binômios, tem-se, afinal: P(x) = (x – 3) (x + 1) (x – 1).

• • • • •

c. Quais são, então, as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$?

Resposta

P(x) = x3 – 3x2 – x + 3 = (x – 3) (x + 1) (x – 1).

Então, P(1) = P(– 1) = P(3) = 0. Logo, as raízes são 1, – 1 e 3.

• • • • •

Deu para perceber o poder do Teorema do Resto?

Ele pode fatorar polinômios e resolver equações algébricas!

Estes exemplos são exemplos particulares, mas você pode verificar que esses fatos são gerais:

Se o quociente da divisão de P(x) por (x – a) é Q(x) com resto 0, então

$$P(x) = Q(x)\,(x - a) \qquad \text{e} \qquad P(a) = 0.$$

Isto é, (x – a) é um fator de P e a é uma raiz da equação algébrica P(x) = 0.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Espera-se que os alunos trabalhem as questões em grupo, mas as conclusões discutidas coletivamente serão reforçadas como convém.*

• • • • •

Professor/a:

- *A revisão da divisão de polinômios não foi feita nesta dinâmica para não pesar demais. As questões estão propostas de modo a evitar que o estudante tenha que fazer as divisões. Se, porém, os alunos se lembrarem de como efetuá-la, eles poderão enriquecer as resoluções usando essa operação.*
- *Por exemplo, na questão 1, outro modo de verificar se $x - 5$ é um fator de $P(x)$ seria efetuando a divisão:*

x^4		$-5x^2$		-500	$x-5$
$-x^4$	$+5x^3$				$x^3+5x^2+20x+100$
0	$+5x^3$	$-5x^2$		-500	
	$-5x^3$	$+25x^2$			
	0	$+20x^2$		-500	
		$-20x^2$	$+100x$		
		0	$+100x$	-500	
			$-100x$	$+500$	
			0	$+0$	

Esse procedimento mostra a vantagem do uso do Teorema do Resto, pois o cálculo de $P(5)$ pode ser mais rápido do que fazer a divisão.

Quarta Etapa
Quiz

Questão

(*FUVEST – Vestibular da USP, 2009*)

O polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$, em que a e b são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por $x - 2$ e por $x - 1$, respectivamente. Assim, o valor de a é:

a. -6

b. -7

c. -8

d. -9

e. -10

QUINTA ETAPA

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ

15 MINUTOS

Matemática

Resposta

Pelo Teorema do Resto, se o resto da divisão de P(x) por x – 2 é 2, tem-se P(2) = 2 e, se o resto da divisão de P(x) por x – 1 é 4, tem-se P(1) = 4. Fazendo estas substituições na expressão de P(x), tem-se o sistema em a e b:

$$\begin{cases} 2^3 + 2^2a + 2b = 2 \\ 1^3 + 1^2a + 1b = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4a + 2b = 2 - 8 \\ a + b = 4 - 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

Fazendo a 1ª equação menos a 2ª, obtém-se: a = – 6 e a **opção correta é a opção (a)**.

Possíveis erros:

- *Aparentemente as opções alternativas nesta questão não são distratores, o que já foi uma política adotada nas questões da FUVEST e que talvez tenha sido adotada nessa ocasião.*
- *Alguns erros possíveis levariam a opções não citadas na questão, como os que seguem.*
- *Por exemplo, um erro bastante provável seria a troca dos valores de P(2) e P(1), entre si, o que levaria ao sistema:*

$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 - 8 \\ a + b = 2 - 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

e, fazendo a 1ª equação menos a 2ª equação, o resultado seria a = – 3, que não consta das opções.

- *Outro erro possível seria o estudante calcular P(– 2) e P(– 1) ao invés de P(2) e P(1), o que o levaria ao sistema:*

$$\begin{cases} (-2)^3 + (-2)^2a + (-2)b = 2 \\ (-1)^3 + (-1)^2a + (-1)b = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4a - 2b = 2 + 8 \\ a - b = 4 + 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a - b = 5 \\ a - b = 5 \end{cases}$$

que poderia ser resolvido fazendo a 1ª equação menos a 2ª. Neste caso, a = 0, que também é uma opção não disponível.

- *Pode ainda acontecer que o estudante se engane na manipulação dos sinais envolvidos no cálculo de P(2) e P(4) e encontre algum outro resultado proposto nas opções da questão.*

● ● ● ● ●

Etapa Flex

Para saber +

1. Se houver tempo, vale a pena contar ao seu aluno sobre a ocorrência de equações algébricas de grau mais alto. Tais equações podem surgir em problemas sofisticados, mas podem também ocorrer em problemas bastante corriqueiros, como, por exemplo, em compras a prazo. Lembrando que no cálculo de juros compostos a uma taxa de 2% mensais, por exemplo, a cada mês que se passa, o capital é multiplicado por 1,02, os expoentes dessas potências podem crescer conforme os prazos de financiamentos.

Vejamos um exemplo: supondo que você queira escolher entre pagar uma conta à vista por 500 reais ou em 6 prestações de 100 reais e queira saber qual a taxa de juro que está embutida nesse parcelamento, o mais comum é que se pense da seguinte maneira: ou pago 500 reais hoje ou 6 × 100 = 600 reais em 6 meses, isto é, pago 100 reais a mais em 6 meses, o que dá uma taxa de 20% em 6 meses, ou aproximadamente 3,33% ao mês. Não, este cálculo não está certo, mesmo porque você já vai pagar 100 reais no ato da compra, então o financiamento será só sobre 500 – 100 = 400 reais.

Para calcular a taxa que você estaria pagando nesse financiamento, vamos chamar de i o índice de correção e fazer x = 1 + i. Como você deve 400 reais no 1º mês, no final deste mês você estará devendo 400x e vai pagar 100 reais. Então, no 2º mês você estará devendo (400x – 100)x. Colocando esses dados numa tabela:

MÊS	DÍVIDA	PARCELA PAGA	SALDO DEVEDOR
1	500	100	400
2	$400x$	100	$400x - 100$
3	$(400x - 100)x$	100	$[(400x - 100)x] - 100 =$ $= 400x^2 - 100x - 100$
4	$(400x^2 - 100x - 100)x$	100	$[(400x^2 - 100x - 100)x] - 100 =$ $= 400x^3 - 100x^2 - 100x - 100$
5	$(400x^3 - 100x^2 - 100x - 100)x$	100	$[(400x^3 - 100x^2 - 100x - 100)x] - 100 =$ $= 400x^4 - 100x^3 - 100x^2 - 100x - 100$
6	$(400x^4 - 100x^3 - 100x^2 - 100x - 100)x$	100	$[(400x^4 - 100x^3 - 100x^2 - 100x - 100)x] - 100 =$ $= 400x^5 - 100x^4 - 100x^3 - 100x^2 - 100x - 100$

Professor

E este saldo deve ser 0, pois você já terá pago as 6 prestações. Para saber qual foi a taxa que você pagou, terá, então, que resolver a seguinte equação do 5º grau:

$$400x^5 - 100x^4 - 100x^3 - 100x^2 - 100x - 100 = 0.$$

Veja que se for um financiamento mensal por 1 ano, você chegará a uma equação de grau 11.

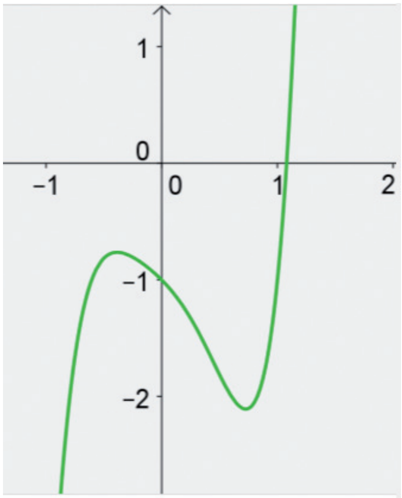
Só por curiosidade, vamos procurar a solução desta equação.

O quão próxima de 1 + 0,0333 ela será? (O que corresponderia a uma taxa de 3,33 % a.m.)

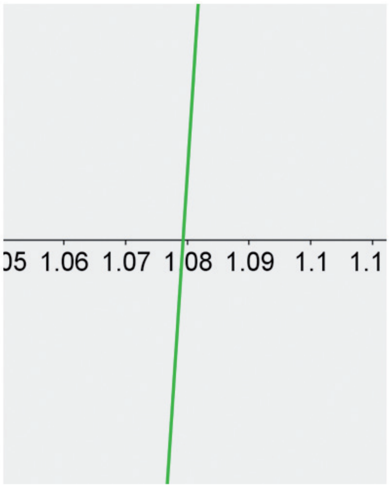
Simplificada por 100, a equação se reduz a:

$$4x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Na falta de um procedimento algébrico, podemos usar um procedimento gráfico. Neste caso, usando o software Geogebra, observa-se uma raiz pouco adiante do 1.



Usando o *zoom* para aumentar bastante a unidade no eixo x, é possível aproximar um pouco melhor o valor da raiz procurada.



E verifica-se que uma aproximação da raiz é 1,08, isto é, $i \cong 0{,}08$ e o juro pago é de quase 8% ao mês!

2. Os resultados analisados aqui nesta dinâmica são válidos também para polinômios com coeficientes e variável complexos. Nesse caso, é possível verificar que todo polinômio de grau $n \geq 1$ é o produto de n binômios do 1º grau. No caso de coeficientes e variável reais, todo polinômio de grau $n \geq 1$ é o produto de binômios do 1º grau e binômios do 2º grau, podendo ser de um só desses tipos. No caso real, se forem considerados todos os binômios do 1º grau possíveis na fatoração de um polinômio, os binômios do 2º grau serão aqueles com raízes complexas conjugadas, ou seja, com discriminante negativo.

3. Você encontra alguns exercícios, com resolução, em:

http://www.profcardy.com/cardicas/dalembert.php

e

http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-dalembert.htm

Professor

E agora é com você!

1. Quais são as raízes da equação do 4º grau: $x (x - 2) (2x + 3) (x + 1) = 0$?

Resposta

São os zeros de cada um dos fatores do 1º grau, logo são:

$$x1 = 0; \quad x2 = 2; \quad x3 = -\frac{3}{2} \text{ e } \quad x4 = -1.$$

• • • • •

2. Qual é o resto da divisão de $P(x) = x^5 - x^3 - x + 1$ por $(x - 2)$? E 2 é solução da equação $P(x) = 0$?

Resposta

Pelo Teorema do Resto, o resto deve ser P(2), logo é:

$P(2) = 25 - 23 - 2 + 1 = 32 - 8 - 2 + 1 = 33 - 10 = 23 \neq 0$,

logo o resto é 23 e 2 não é raiz da equação $P(x) = 0$.

• • • • •

3. Quanto deve valer m a fim de que o resto da divisão de $P(x) = x^4 - mx^3 + 7$ por $(x + 2)$ seja igual a 15?

Resposta

Pelo Teorema do Resto, deve-se ter $P(-2) = 15$, mas

$P(-2) = (-2)4 - m(-2)3 + 7 = 16 + 8m + 7 = 8m + 23$,

logo m deve satisfazer à equação: $8m + 23 = 15$, donde: ***m = – 1**.*

• • • • •

4. Qual deve ser o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ por $(3x - 6)$.

Resposta

Ora, $3x - 6 = 3(x - 2)$, então, se $P(x) = Q(x).(3x - 6) + R$, será possível escrever: $P(x) = 3.Q(x).(x - 2) + R = Q'(x).(x - 2) + R$. Assim, R será também o resto da divisão de P(x) por (x – 2), isto é, R = P(2). (aqui apenas o quociente se alteraria, passando de Q(x) para Q'(x) = 3Q(x))

Logo, o resto da divisão de P(x) por (3x – 6) será:

$P(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 3 \times 2 = 8 + 8 - 6 = 10$.

O resto será, portanto, igual a 10.

• • • • •

5. Qual deve ser o resto da divisão de um polinômio P(x) por (ax + b), onde a ≠ 0?

Resposta

Analogamente ao que foi feito no exercício 4, trata-se de reduzir o problema ao caso em que a divisão é por um binômio com coeficiente de x igual a 1 e o termo independente com sinal de menos. Isso pode ser feito porque a ≠ 0. Com efeito,

$$ax + b = a(x + \frac{b}{a}) = a\,[x - (-\frac{b}{a})],$$

então, se $P(x) = Q(x)(ax + b) + R$, tem-se também:

$$P(x) = a.Q(x)\,[x - (-\frac{b}{a})] + R = Q'(x).\,[x - (-\frac{b}{a})] + R$$

E, pelo Teorema do Resto, tem-se: $R = P(-\frac{b}{a})$.

• • • • •

Matemática