Reforço escolar • Matemática •

Professor

O espião que me amava

Dinâmica 2

3ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 3ª	Algébrico-Simbólico.	Polinômios e Equações Algébricas.

DINÂMICA	O espião que me amava.
HABILIDADE BÁSICA	Efetuar cálculos com polinômios.
HABILIDADE PRINCIPAL	H16 – Resolver problemas envolvendo operações com polinômios.
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor

<table>
<tr><th colspan="2">ETAPAS</th><th>ATIVIDADE</th><th>TEMPO</th><th>ORGANIZAÇÃO</th><th>REGISTRO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Compartilhar Ideias</td><td>Qual é o código?</td><td>15 a 20 min.</td><td>Em grupos de 3 alunos e grupos de 3 alunas.</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Um novo olhar ...</td><td>Quem é o agente secreto?</td><td>20 a 25 min.</td><td>Nos mesmos grupos.</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Fique por dentro!</td><td>Simplificando...</td><td>20 a 30 min.</td><td>Nos mesmos grupos.</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Quiz</td><td>Quiz</td><td>10 min</td><td>Individual</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Análise das respostas ao Quiz</td><td>Análise das respostas ao Quiz</td><td>15 min</td><td>Coletiva</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">FLEX</td><td>Para Saber +</td><td colspan="4">Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica.
O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.</td></tr>
<tr><td>Agora, é com você!</td><td colspan="4">Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.</td></tr>
</table>

Apresentação

Esta dinâmica foi elaborada com o intuito de apresentar aos alunos um dispositivo prático para o cálculo da divisão de um polinômio em uma variável pelo binômio da forma $x - a$. A fim de justificar esse dispositivo, a dinâmica começa com revisão da divisão de polinômios de uma variável, por analogia com o algoritmo longo da divisão numérica.

Como o foco do estudo de polinômios, no ensino médio, está na resolução de equações a uma incógnita, também os polinômios aqui estudados são somente os polinômios em uma variável.

Como sempre, você conta com margem de tempo para desenvolver as diversas atividades de acordo com as necessidades da sua turma.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

20 MINUTOS

Atividade • Qual é o código?

Objetivo

Rever o algoritmo para a divisão de polinômios.

Descrição da atividade

Os alunos deverão utilizar a divisão entre polinômios para descobrir o código de uma sociedade secreta que será utilizado na etapa seguinte.

Um agente secreto teve o seu nome codificado e o grupo deverá descobrir qual é o nome dele. Para desvendar esse segredo, será preciso fazer uma divisão de polinômios. Aqui, você vai lidar só com polinômios de uma única variável.

Você se lembra dessa operação?

Ela acompanha o procedimento da divisão entre números naturais pelo algoritmo chamado longo, em que a multiplicação e a subtração são calculadas separadamente a cada passo. Você vai acompanhar os passos da divisão numérica pelo processo longo e aplicar os mesmos passos à divisão de polinômios. Veja como é dividindo 389 por 12:

3	8	9	12
– 3	6		32
0	2	9	
	– 2	4	
	0	5	

Complete colocando os números a cada passo:

Resposta

1. Escreva aqui o Dividendo: 389	2. Escreva aqui o Divisor:

4. Multiplique o 1º algarismo do quociente pelo divisor e escreva aqui o produto com o sinal trocado: -36	3. Divida o número formado por 1 ou 2 algarismos de ordem mais alta do dividendo pelo algarismo de ordem mais alta do divisor, isso dá o primeiro algarismo do quociente: **3**
5. Escreva aqui o resultado da soma do dividendo com esse produto com sinal trocado (é uma diferença, então): 029	6. Repita o processo para achar mais um algarismo do quociente, tomando como novo dividendo o último número obtido na 1ª coluna: 2
7. Multiplique o 2º algarismo do quociente pelo divisor e escreva aqui o produto com o sinal trocado: -24	
8. Escreva aqui o resultado da soma do dividendo com esse produto com sinal trocado (é uma diferença, então): 05	Este processo vai se repetindo até que se chegue a uma destas somas (que são diferenças...) que seja menor do que o divisor. Esse é o resto da divisão e, se o resto for 0, a divisão se diz exata.

A divisão de 389 por 12 tem um quociente igual a 32 e um resto igual a 5, o que pode ser indicado na expressão numérica: **389 = 12 × 32 + 5**.

Observação: No caso numérico, a escolha dos algarismos do quociente pode ser mais complicada do que o que acontece com os polinômios. No caso dos polinômios, exige-se que o grau do dividendo seja maior ou igual ao grau do divisor. Sendo assim, o primeiro termo do dividendo será sempre divisível pelo primeiro termo do divisor. Não é preciso fazer avaliação como no caso numérico.

No caso dos polinômios, em vez de separar algarismos, você separa monômios e, em vez de chegar a um resto menor do que o divisor, você vai parar quando chegar a um resto de grau menor do que o grau do divisor. E já começou por um dividendo que tem grau maior ou igual ao do divisor.

Você vai, então, seguir passos análogos e vai ver que já sabe dividir $x^2 + 6x + 3$ por $x - 1$:

1. Escreva aqui o Dividendo, do grau mais alto para o de grau menor: **$x^2 + 6x + 3$**	**2.** Escreva aqui o Divisor, do grau mais alto para o de grau menor: **$x - 1$**
4. Multiplique o 1º termo do quociente pelo divisor e escreva aqui o produto com o sinal trocado: – x2 + x	**3.** Divida o 1º termo do dividendo, x^2, pelo 1º termo do divisor, x, isso dá o primeiro termo do quociente: **x**
5. Escreva aqui o resultado da soma do dividendo com esse produto com sinal trocado (é uma diferença, então): $0 + 7x + 3$	**6.** Repita o processo para achar mais um termo do quociente, tomando como novo dividendo o último polinômio na 1ª coluna, $7x + 3$, e divida seu primeiro termo, 7x, pelo primeiro termo do divisor, x, encontrando: +7
7. Multiplique o 2º algarismo do quociente pelo divisor e escreva aqui o produto com o sinal trocado: $- 7x + 7$	
8. Escreva aqui o resultado da soma deste dividendo com esse produto com sinal trocado (é uma diferença, então): $0 + 10$	*Este processo vai se repetindo até que se chegue a uma destas somas (que são diferenças...) que seja de grau menor do que o grau do divisor. Esse é o resto da divisão e, se o resto for 0, a divisão se diz exata.*

• • • • •

Você pode agora copiar só os polinômios, apagando a descrição dos passos:

x^2	$+ 6x$	$+ 3$	$x - 1$
$- x^2$	$+ x$		$x + 7$
0	$+ 7x$	$+ 3$	
	$- 7x$	$+ 7$	
	0	$+ 10$	

Viu como é fácil?!

Agora você pode escrever o resultado dessa divisão numa só expressão algébrica:

$$x^2 + 6x + 3 = (x - 1)(x + 7) + 10$$

Pronto! Você já pode ser aceito na Sociedade Secreta a que pertence nosso espião, cujo nome você vai descobrir na próxima etapa.

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *A leitura inicial pode ser feita coletivamente, alternando entre os grupos a leitura e sua interpretação, trecho por trecho.*
- *Conforme o tempo disponível e o preparo dos alunos nessa fase, será preciso fazer a correção coletiva ou os próprios alunos vão se corrigindo nos grupos.*
- *É importante, porém, que cada aluno se aproprie da habilidade requerida para o cálculo da divisão de dois polinômios.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Professor/a,

- *Em geral, nosso aluno não faz a divisão numérica pelo algoritmo longo. O uso do algoritmo longo tem algumas vantagens. A primeira delas é que ele evita a imbricação da multiplicação e da subtração a cada etapa para encontrar os restos parciais. Fazendo a multiplicação e depois a subtração, os algoritmos usados já são conhecidos dos alunos. A segunda vantagem é que esse algoritmo é muito mais simples para extensão aos polinômios.*
- *Outra observação é que a divisão de polinômios não necessita da avaliação e tentativa que a divisão numérica exige. Os exemplos aqui focalizados foram cuidadosamente escolhidos para evitar frações ou números irracionais, mas, como são polinômios de uma variável com coeficientes reais e o dividendo deve ter grau maior ou igual ao grau do divisor, os primeiros termos em cada passo serão sempre divisíveis entre si. Com efeito, esses primeiros termos serão sempre do tipo* ax^m

e bx^n, com a e b reais, $b \neq 0$ e $m \geq n$, mas então: $ax^m \div bx^n = \frac{a}{b} x^{m-n}$

e $\frac{a}{b}$ é um número real e $m - n$ é um número natural.

- *Vale a pena verificar se o aluno sabe o que é o grau de um polinômio de uma variável.*

Segunda Etapa

Um novo olhar...

Atividade • Quem é o agente secreto?

Objetivo

Calcular quociente e resto na divisão de polinômios de uma variável.

Descrição da atividade

Os alunos vão ser convocados a descobrir o nome de um agente secreto a partir de "pistas" que só podem ser traduzidas quando eles fizerem uma divisão de polinômios. Esses polinômios serão entregues a eles por você a fim de criar um certo clima de suspense e sigilo.

Questão

Você vai receber do seu professor as pistas que definem cada letra do nome do agente secreto que está infiltrado na sua escola. A solução de cada pista será um número; esse número corresponde a uma letra do alfabeto, como mostra a tabela a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
M	L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A

As pistas serão todas sobre os polinômios P(x) e S(x), a seguir, sobre o quociente Q(x) e o resto R(x) da divisão de P(x) por S(x).

$P(x) = 6x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 6x^2 + 7x + 12$ e $S(x) = 3x^2 + 5x + 4$

Antes de receber as pistas, faça a divisão de P(x) por S(x):

Resposta

$6x^5$	$-2x^4$	$-15x^3$	$+6x^2$	$+7x$	$+12$	$3x^2 + 5x + 4$
– 6x5	– 10x4	– 8x3				2x3 – 4x2 – x + 9
0	– 12x4	– 23x3	+ 6x2	+ 7x	+ 12	
	12x4	+ 20x3	+ 16x2			
	0	– 3x3	+ 22x2	+ 7x	+ 12	
		+ 3x3	+ 5x2	+ 4x		
		0	+ 27x2	+ 11x	+ 12	
			– 27x2	– 45x	– 36	
			0	– 34x	– 24	

Você obteve, então: P(x) = S(x) Q(x) + R(x), com:

$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 9$ e $R(x) = -34x - 24$.

Agora você pode usar as pistas que recebeu do seu professor para descobrir o nome com o qual o espião ou a espiã se esconde. Mas lembre-se: você não precisa fazer divisões por binômios do tipo x – a para conhecer o resto. Lembra-se do Teorema do Resto?

Então, mãos à obra e seja um bom detetive.
Qual é o nome do espião?

Resposta

LETRA	PISTAS	VALOR NUMÉRICO	LETRA
1ª	P(1)	P(1) = 6 × 15 – 2 × 14 – 15 × 13+ 6 × 12 + 7 × 1 + 12 = 14	M
2ª	S(1)	S(1) = 3 × 12+ 5 × 1 + 4 = 12	O
3ª	Q(0)	Q(0) = 2 × 03 – 4 × 02 – 0 + 9 = 9	R
4ª	R(– 1) + S(1)	R(– 1) = – 34 × (– 1) – 24 = 34 – 24 = 10 R(– 1) + S(1) = 10 +12 = 22	E
5ª	S(0) + Q(0)	S(0) = 3 × 02 + 5 × 0 + 4 = 4 S(0) + Q(0) = 4 + 9 = 13	N
6ª letra para as moças	Resto da divisão de S(x) por x – 1.	S(1) = 12	O
6ª letra para os rapazes	Resto da divisão de P(x) + S(x) por x – 1.	P(1) + S(1) = 14 + 12 = 26	A

E qual é a idade desse espião?

Resposta

ESPIÃO	PISTA	IDADE
das moças	Resto da divisão de P(x) + S(x) por x – 1.	26
dos rapazes	Resto da divisão de P(x) por x – 1.	14

Preencha agora a ficha a seguir com os dados do espião desmascarado:

Resposta

DADOS	ESPIÃO DAS MOÇAS	ESPIÃ DOS RAPAZES
NOME	MORENO	MORENA
IDADE	26	14

Recursos necessários

- Encarte do aluno.
- Cartões, com as pistas, disponíveis para recorte em anexo. São 5 fichas para trios de moças e 5 para trios de rapazes.

Procedimentos Operacionais

- *A ideia de separar moças de rapazes é para modificar um pouco a dinâmica e a distribuição dos grupos. Conforme a formação da turma, talvez seja preciso montar algum trio misto. Nesse caso, a escolha pelo espião ou espiã fica por sua conta.*

Professor/a

- *Na primeira etapa, o estudante fez uma divisão com a instrução passo a passo. Desta forma, espera-se que os estudantes consigam completar a divisão com autonomia. A história do espião, é claro, não é uma contextualização, mas simplesmente um modo divertido de propor algumas questões cuja aplicação em casos reais é muito sofisticada para o nível escolar atual.*
- *Se o estudante não se lembrar do Teorema do Resto, vale a pena enunciá-lo de novo a fim de evitar cálculos desnecessários. O Teorema do Resto diz que o resto da divisão de um polinômio P(x) por x – a é igual a P(a).*

Terceira Etapa

Fique por dentro!

30 MINUTOS

Atividade • Simplificando...

Objetivo

Introduzir o dispositivo de Briot-Ruffini.

Briot (*lê-se Briô, foi um matemático francês que viveu de 1812 a 1882*) e Ruffini (*médico e matemático italiano que viveu de 1765 a 1822*) sugeriram um dispositivo prático para achar quociente e resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do 1º grau. Como esta divisão é bastante comum, essa simplificação ajuda bastante.

Descrição da atividade

Os alunos vão resolver uma divisão de um polinômio P(x) por um binômio do tipo x – a pelo processo apresentado nas etapas anteriores e verificar como se pode simplificar a escrita deixando de escrever as potências da variável.

Vamos usar um exemplo numérico, com números simples, mas dá para perceber que o processo é válido para coeficientes reais quaisquer.

Questão

Calcule o quociente e o resto da divisão de $3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ por $x - 2$:

Resposta

3x4	+ 5x3	+ 4x2	+ 2x	+ 1	x – 2
– 3 x4	+ 6x3				3x3 + 11 x2 + 26x + 54
0	+ 11 x3	+ 4x2	+ 2x	+ 1	
	– 11x3	+ 22x2			
	0	+ 26x2	+ 2x	+ 1	
		– 26x2	+ 52x		
		0	+ 54x	+ 1	
			– 54x	+ 108	
			0	+ 109	

• • • • •

Repare nas células destacadas: a primeira é a célula da 1ª linha da 1ª coluna. Descendo duas linhas e avançando uma coluna, está marcada a segunda célula na 3ª linha da 2ª coluna. E assim por diante, descendo 2 linhas e avançando uma coluna, estão marcadas células até chegar à quinta célula na 9ª linha da 5ª coluna, onde está o resto 109 da divisão em questão.

Agora, como os polinômios foram escritos a partir dos termos de ordem mais alta com os expoentes decrescendo de 1 em 1, compare as outras células destacadas com o polinômio que você achou como quociente. As 4 primeiras células destacadas têm os mesmos coeficientes que esse polinômio. A diferença está no expoente da variável que, no quociente, tem 1 a menos. Claro, porque você dividiu esses termos por x. Além disso, você já sabia que, quando divide um polinômio de grau n por um polinômio de grau 1, o quociente deve ter grau n – 1.

Agora repare como se calcula um desses coeficientes em função do anterior: o 1º deles é o 1º coeficiente do polinômio dividendo. O 2º deles é a soma deste, vezes 2, com o 2º coeficiente do polinômio. E assim por diante: cada coeficiente numa célula marcada é a soma do coeficiente da célula destacada anterior, vezes 2, com o coeficiente seguinte do polinômio. Então, para que escrever todo o resto? Basta escrever os coeficientes, mantendo essa ordem.

Esse é o segredo do dispositivo de Briot-Ruffini que pode ser descrito pelo seguinte esquema:

<u>1º passo</u>: Desenhe duas linhas que se cruzam de modo a separar a raiz do binômio divisor, à esquerda (x – 2 = 0 dá x = 2 e sua raiz é 2), dos coeficientes do divisor (à direita e na ordem decrescente dos expoentes):

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

<u>2º passo</u>: Repita abaixo, à direita, o primeiro coeficiente:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

<u>3º passo</u>: Multiplique esse número pela raiz 2, some com o número que está uma posição à frente, acima dele e copie essa soma a seguir do 1º número escrito na 2ª linha:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 11 & & & \end{array}$$

<u>4º passo e seguintes</u>: O processo vai se repetindo na obtenção dos coeficientes seguintes:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 11 & 26 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 11 & 26 & 54 & 109 \end{array}$$

A partir dessa 2ª linha, escreve-se o resto (último número da 2ª linha) 109 e o quociente, com 1 grau a menos que o dividendo: $3x^3 + 11x^2 + 26x + 54$.

Muito mais simples, não?

Então, tente agora achar o quociente e o resto da divisão de $x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ dividido por $x + 1$:

Resposta

– 1	1	– 3	1	– 5	3	2
	1	– 4	5	– 10	13	– 11

Logo, o quociente será $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 13$ e o resto é – 11.

• • • • •

E se não houver alguma potência da variável no dividendo? Neste dispositivo, não é possível pular uma potência: no caso de faltar alguma potência entre o maior expoente e a constante, o coeficiente precisa constar no local como 0. Calcule, por exemplo, o quociente e o resto da divisão de $x^3 + 3x$ por $x - 3$ e depois tire a prova real para ficar seguro de que você chegou ao resultado certo. Não se esqueça de colocar o 0 como coeficiente das potências de x que não aparecem no dividendo.

Resposta

–3	1	0	3	0
	1	3	12	36

Logo, o quociente será $x^2 + 3x + 12$ e o resto é 36.

Tirando a prova real:

×	x2	+ 3x	+ 12	
		X	– 3	
	x3	+ 3x2	+ 12x	
		– 3x2	– 9x	– 36
+	x3	+ 0	+ 3x	– 36
				36
	x3	+ 0	+ 3x	+ 0

• • • • •

Matemática

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Esta atividade está prevista para ser desenvolvida pelos mesmos grupos, por facilidade de organização.*
- *Os grupos podem discutir as questões entre si, mas pode haver uma correção coletiva.*

Intervenção Pedagógica

Professor/a,

- *Ainda nesta etapa, os coeficientes são todos inteiros a fim de limitar as dificuldades, mas é importante que os estudantes saibam que os coeficientes podem ser números quaisquer, mesmo com raízes. A variável não pode ser elevada a expoentes fracionários, mas os coeficientes podem ser números reais quaisquer.*
- *É importante frisar que a justificativa da passagem do algoritmo completo para o dispositivo de Briot-Ruffini é para ser vista pelo aluno uma vez. O dispositivo é usado para simplificar, então deve ser utilizado direta e automaticamente. Como em outros procedimentos, a justificativa precisa ter sido vista para que, no futuro, se a memória falhar e o estudante não tiver oportunidade de consultar uma referência, ele tente refazer os passos usando a lógica. Se essas justificativas forem apresentadas repetidamente ou cobradas dos estudantes, a simplificação proporcionada pelo dispositivo perde completamente o seu valor.*

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão: (*UEL – Universidade Estadual de Londrina, PR.*)

Dividindo-se o polinômio $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x - 21$ por $x + 3$, obtêm-se

d. $x^3 - 2x^2 + x - 12$, com resto nulo;

e. $x^3 - 2x^2 + 3$, com resto 16;

f. $x^3 - x^2 - 13x + 35$, e resto 84;

g. $x^3 - x^2 - 3x + 1$, com resto 2;

h. $x^3 - x^2 + x - 7$, e resto nulo.

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

Como a questão pede quociente e resto, pode-se aplicar diretamente o dispositivo de Briot-Ruffini:

− 3	1	2	− 2	− 4	− 21
	1	− 1	1	− 7	0

E o quociente será polinômio do 3º grau, de coeficientes $x^3 - x^2 + x - 7$ e resto 0, isto é, a opção correta é a (e).

Um aluno que não soubesse esse procedimento nem quisesse fazer a divisão longa poderia fazer a substituição para calcular o resto. Repare que há 2 opções com resto nulo. Então, o cálculo do resto já determina a solução ou, pelo menos, aumenta a probabilidade de acerto de $\frac{1}{5}$ para $\frac{1}{2}$, ou seja, de 20% para 50% (Você se lembra da probabilidade condicional?).

Cálculo do resto pelo Teorema do Resto:

Resto $= P(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^3 - 2(-3)^2 - 4(-3) - 21 = 81 - 54 - 18 + 12 - 21 = 93 - 93 = 0.$

Sabendo que o resto é nulo, o aluno poderia escolher entre as opções (a) e (e), com 50% de chance de acertar, ou poderia fazer o produto dos polinômios, ou perceber que o termo independente do polinômio produto é o produto dos termos independentes (todos os outros são multiplicados por alguma potência de x). Fazendo o produto dos termos independentes das propostas de quociente, o aluno já encontra a resposta certa. Com efeito:

Pela opção (a), o termo independente de $(x^3 - 2x^2 + x - 12)(x + 3)$ seria $(-12) \times 3 = -36 \neq -21$, então não é essa opção.

Seria, então, a opção (e) que concorda com o resto nulo e o termo independente de $(x^3 - x^2 + x - 7)(x + 3)$ que é $(-7) \times 3 = -21$. Desta forma, o estudante chega à resposta certa, mas assumindo que haja uma resposta certa, pois ele não conferiu todos os dados da resposta.

Possíveis erros:

O aluno que calcular primeiro o resto e concluir que o resto é 0 pode apressar-se e escolher logo a primeira opção, sem conferir o quociente. Assinala, então, a opção (a).

O aluno que trocar a raiz do binômio de – 3 para + 3 e calcular o resto como P(3) chegará a:

$P(3) = 3^4 + 2 \times 3^3 - 2 \times 3^2 - 4 \times 3 - 21 = 81 + 54 - 12 - 18 - 21 = 135 - 51 = 84$

e vai escolher a opção (c), sem testar o quociente.

As demais opções podem também ocorrer por erros de cálculos ou sinais, além da escolha sem análise.

• • • • •

Professor

Etapa Flex

Para saber +

Vale observar que o dispositivo de Briot-Ruffini pode ser adaptado a um divisor qualquer do 1º grau. Por exemplo, para um divisor como 2x + 5, é possível considerar $2x + 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)$ e, tendo achado o quociente Q(x) e o resto R da divisão de P(x) por $\left(x + \frac{5}{2}\right)$, tem-se: $P(x) = Q(x)\left(x + \frac{5}{2}\right) + R$.

Mas $\left(x + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(2x + 5)$, logo: $P(x) = Q(x) \times \frac{1}{2}(2x + 5) + R$ ou $P(x) = \frac{1}{2}\,Q(x)(2x + 5) + R$.

Calcula-se, então, o quociente de P(x) colocando na 2ª coluna a raiz do binômio 2x + 5, que é $-\frac{5}{2}$ e dividem-se os coeficientes do quociente por 2. O resto permanece o mesmo.

O mesmo raciocínio vale para um binômio qualquer do 1º grau, $ax + b$ $(a \neq 0)$. Considera-se $-\frac{b}{a}$ na 2ª coluna e dividem-se os coeficientes do quociente obtido por a, mantendo o resto.

Para rever uma descrição do dispositivo prático de Briot-Ruffini, o aluno poderá consultar o link a seguir:

http://www.brasilescola.com/matematica/divisao-polinomios-utilizando-dispositivo-briotruffini.htm

Agora é com você!

1. (VUNESP-SP) Se a, b, c são números reais tais que

$ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = (x + 3)^2$ para todo x real, então o valor de $a - b + c$ é

a. -5

b. -1

c. 1

d. 3

e. 7

Resposta

Desenvolvendo-se as expressões entre parênteses, teremos:

$ax^2 + bx^2 + cx^2 + 2bx + 4cx + b + 4c = x^2 + 6x + 9.$

Portanto, a, b, c devem satisfazer ao sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2b + 4c = 6 \\ b + 4c = 9 \end{cases}$$

Fazendo a 2ª equação menos a 3ª, obtém-se: $b = -3$ que, lançado na 1ª equação, leva a:

$a + c = 1 + 3$ ou $a + c = 4$. Tem-se, então: $a - b + c = (a+c) - b = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$.

A opção correta é, portanto, a opção (e).

• • • • •

2. (PUC RIO) Sendo $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + ax + b)$ para todo x real, os valores de a e b são, respectivamente

a. -1 e -1;

b. 0 e 0;

c. 1 e 1;

d. 1 e − 1;

e. − 1 e 1

Resposta

Desenvolvendo-se o lado direito da igualdade, teremos:

x3 + ax2 + bx + x2 + ax + b = x3 + (a + 1)x2 + (a + b) x + b,

que, identificado a x3 + 1:

x3 + 1 = x3 + (a + 1)x2 + (a + b) x + b

leva, pela identificação dos coeficientes das mesmas potências de x a:

$$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Trata-se de um sistema de 3 equações a 2 incógnitas que tem solução, pois a 2ª equação é obtida da soma das outras duas. A solução é: a = – 1 e b = 1, e a opção correta é (e).

• • • • •

3. (UNIRIO) O grau do polinômio $(x + 2)^2 . (x - 4)^4 . (x + 6)^6 . (x - 8)^8 . \ldots . (x + 18)^{18}$ é

a. 2.9;

b. 90;

c. $2^9.9$;

d. 180;

e. 18

Resposta

Para determinar o grau do polinômio, será preciso calcular o expoente da potência de maior expoente. Essa será o produto de x elevado às potências pares de 2 a 18 e esse expoente será a soma dos expoentes de cada fator. Será, portanto:

$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 18 = 2\,(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 9) = 2 \times \frac{(1+9)9}{2} = 2 \times 5 \times 9 = 90.$

E a opção correta é (b).

A soma 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 18 pode também ser calculada como a soma de uma Progressão Aritmética, de razão r = 2, primeiro termo igual a 2, último termo igual a 18, com 9 termos, por aplicação da fórmula:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2+18)9}{2} = 10 \times 9 = 90$$

Ou ainda fazer diretamente, imitando o menino Gauss quando somou de 1 a 100 num instantinho para desagrado do seu professor que esperava que os alunos ficassem fazendo somas por muito tempo:

2 +	4 +	6 +	8 +	10 +	12 +	14 +	16 +	18
+ 18	+ 16	+ 14	+ 12	+ 10	+ 8	+ 6	+ 4	+ 2
20	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20

A soma da última linha é igual a 9 × 20 = 180 e é também igual ao dobro da soma da 1ª linha que é a nossa busca. Logo, a soma dos termos da 1ª linha é igual a 180 ÷ 2 = 90.

● ● ● ● ●

4. Fatorar o polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$, sabendo que $P(5) = 0$.

Resposta

Se P(5) = 0, pelo Teorema do Resto, o polinômio P(x) é divisível por x – 5. Fazendo a divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -7 & 7 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

E já se tem: $P(x) = (x^2 - 2x - 3)(x - 5)$.

Ora, $x^2 - 2x - 3$ é um trinômio do 2º grau, cujas raízes podem ser calculadas pela fórmula:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, *onde a = 1, b = – 2 e c = – 3, isto é:*

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

donde $x_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ *e* $x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$.

Novamente, pelo Teorema do Resto, se 3 e – 1 são raízes, o trinômio é divisível por x – 3 e por x + 1. E, como o coeficiente de x^2 *é 1, o trinômio é o produto desses dois binômios e tem-se, afinal:*

$P(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 5)$.

Professor

PISTAS PARA AS MOÇAS	
LETRAS DO NOME DO ESPIÃO	
1ª	$P(1)$
2ª	$S(1)$
3ª	$Q(0)$
4ª	$R(-1) + S(1)$
5ª	$S(0) + Q(0)$
6ª	Resto da divisão de $S(x)$ por $x - 1$.
IDADE DO ESPIÃO	
Resto da divisão de $P(x) + S(x)$ por $x - 1$.	

PISTAS PARA AS MOÇAS	
LETRAS DO NOME DO ESPIÃO	
1ª	$P(1)$
2ª	$S(1)$
3ª	$Q(0)$
4ª	$R(-1) + S(1)$
5ª	$S(0) + Q(0)$
6ª	Resto da divisão de $S(x)$ por $x - 1$.
IDADE DO ESPIÃO	
Resto da divisão de $P(x) + S(x)$ por $x - 1$.	

PISTAS PARA AS MOÇAS	
LETRAS DO NOME DO ESPIÃO	
1ª	P(1)
2ª	S(1)
3ª	Q(0)
4ª	R(– 1) + S(1)
5ª	S(0) + Q(0)
6ª	Resto da divisão de S(x) por x – 1.
IDADE DO ESPIÃO	
Resto da divisão de P(x) + S(x) por x – 1.	

PISTAS PARA AS MOÇAS	
LETRAS DO NOME DO ESPIÃO	
1ª	$P(1)$
2ª	$S(1)$
3ª	$Q(0)$
4ª	$R(-1) + S(1)$
5ª	$S(0) + Q(0)$
6ª	Resto da divisão de $S(x)$ por $x - 1$.
IDADE DO ESPIÃO	
Resto da divisão de $P(x) + S(x)$ por $x - 1$.	

PISTAS PARA AS MOÇAS	
LETRAS DO NOME DO ESPIÃO	
1ª	$P(1)$
2ª	$S(1)$
3ª	$Q(0)$
4ª	$R(-1) + S(1)$
5ª	$S(0) + Q(0)$
6ª	Resto da divisão de $S(x)$ por $x - 1$.
IDADE DO ESPIÃO	
Resto da divisão de $P(x) + S(x)$ por $x - 1$.	

PISTAS PARA OS RAPAZES	
LETRAS DO NOME DA ESPIÃ	
1ª	P(1)
2ª	S(1)
3ª	Q(0)
4ª	R(– 1) + S(1)
5ª	S(0) + Q(0)
6ª	Resto da divisão de P(x) + S(x) por x – 1.
IDADE DA ESPIÃ	
Resto da divisão de P(x) por x – 1.	

PISTAS PARA OS RAPAZES	
LETRAS DO NOME DA ESPIÃ	
1ª	$P(1)$
2ª	$S(1)$
3ª	$Q(0)$
4ª	$R(-1) + S(1)$
5ª	$S(0) + Q(0)$
6ª	Resto da divisão de $P(x) + S(x)$ por $x - 1$.
IDADE DA ESPIÃ	
Resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$.	

PISTAS PARA OS RAPAZES	
LETRAS DO NOME DA ESPIÃ	
1ª	P(1)
2ª	S(1)
3ª	Q(0)
4ª	R(– 1) + S(1)
5ª	S(0) + Q(0)
6ª	Resto da divisão de P(x) + S(x) por x – 1.
IDADE DA ESPIÃ	
Resto da divisão de P(x) por x – 1.	

PISTAS PARA OS RAPAZES	
LETRAS DO NOME DA ESPIÃ	
1ª	P(1)
2ª	S(1)
3ª	Q(0)
4ª	R(– 1) + S(1)
5ª	S(0) + Q(0)
6ª	Resto da divisão de P(x) + S(x) por x – 1.
IDADE DA ESPIÃ	
Resto da divisão de P(x) por x – 1.	

PISTAS PARA OS RAPAZES	
LETRAS DO NOME DA ESPIÃ	
1ª	P(1)
2ª	S(1)
3ª	Q(0)
4ª	R(– 1) + S(1)
5ª	S(0) + Q(0)
6ª	Resto da divisão de P(x) + S(x) por x – 1.
IDADE DA ESPIÃ	
Resto da divisão de P(x) por x – 1.	