Reforço escolar · Matemática

O DNA das equações algébricas

Dinâmica 3

3º Série | 4º Bimestre

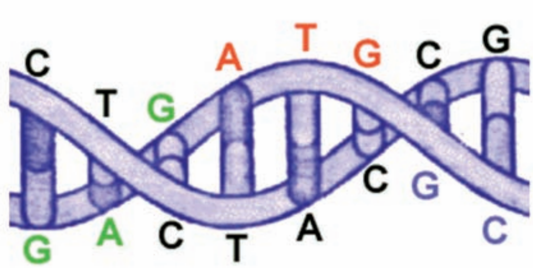
Aluno

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Algébrico-Simbólico	Polinômios e Equações Algébricas.

Primeira Etapa

Compartilhar ideias

Atividade · O avô de Júlia e o trinômio do 2º grau.



Governo do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação
Governo do Rio de Janeiro
Secretaria de Ciência e Tecnologia
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Ao buscar a resposta a esta questão, o aluno vai resolver uma equação do 2º grau. Vamos trabalhar depois um pouco mais com ela e com equações de grau mais alto.

Questão 1 (OBMEP, prova da 1ª fase do Nível 3, do ano de 2006, ligeiramente simplificada.)

Júlia perguntou ao seu avô: Em que ano você nasceu? E ele respondeu: “Nasci no ano x^2 e completei x anos em 1980.” Em que ano nasceu o avô de Júlia?

a. Comece por fazer a tradução da linguagem corrente para uma linguagem algébrica que lhe permita resolver o problema.

LINGUAGEM CORRENTE	LINGUAGEM ALGÉBRICA
“Nasci no ano x^2”, então a idade do avô em 1980 é	$1980 - x^2$
“e completei x anos em 1980”, então a idade do avô em 1980 é	
A equação será, então,	
Ou, na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, é	

b. Resolva a equação encontrada, sabendo que $\sqrt{7921} = 89$:

c. Você achou as 2 raízes da equação do 2º grau.

Você vai agora juntar alguns resultados que você já viu. A partir deles, você vai poder escrever o primeiro membro da equação que você resolveu como produto de dois binômios do 1º grau.

Complete, com as palavras disponíveis a seguir, os resultados que você já conhece:

Aluno

Teorema do Resto

O Resto da ______ de um polinômio P(x) por x – a é ______.

Consequência

Se P(a) = 0, então, P(x) = Q(x)(x – a), onde Q(x) é um ______ e o grau de Q é igual ao ______ de P menos 1.

Por outro lado, se P(x) = Q(x)(x – a), ______, P(a) = 0.

grau	multiplicação	P(x)	P(a)	Q(a)
então	polinômio	divisão	zero	nunca

d. Agora chame de P(x) o 1º membro da equação que você encontrou na resolução da questão anterior e complete:

P(x) = ______ ; P(44) = ______, então, P(x) = Q(x) (x – ______) e

o grau de Q(x) = ______.

Mas P(– 45) = ______

Então, P(x) também é ______ por (x + 45).

Confira, então, quanto vale o produto de (x – 44) por (x + 45):

	x	– 44	
×	x	+ 45	
+			

Você chegou, então, a uma fatoração do trinômio do 2º grau em binômios do 1º grau:

______ = (x – ______) . (x + ______)

Questão 2

Júlia gostou da brincadeira. Chegou, mais tarde, ao seu pai e perguntou: “Papai, me dê uma equação cuja solução seja a sua idade e vou descobrir quantos anos você tem.” E o pai respondeu: “Minha idade é solução da equação $(x - 40)(x + 42) = 0$, quantos anos eu tenho?”

Júlia encontrou no mesmo instante qual era a idade do pai. Explique como Júlia pôde achar tão depressa a solução desta equação do 2º grau.

Você viu como é fácil resolver equações $P(x) = 0$ quando $P(x)$ é um polinômio escrito como produto de binômios da forma $x - a$?

Mas... será isso sempre possível?

Aluno

Segunda Etapa
Um novo olhar...

Atividade • Afinal, os complexos complicam ou simplificam?

Questão 1

Sabendo que $x = 1$ é solução da equação $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$, encontre as outras soluções, se existirem.

Você encontrou soluções complexas. Como as quatro operações entre números complexos satisfazem às mesmas condições que satisfazem entre números reais, o Teorema do Resto é válido também para polinômios nos números complexos. Podem ser complexos a variável, os coeficientes e as raízes. Não se esqueça de que os números reais são também complexos.

Você acaba de resolver uma equação do 3º grau e encontrou 3 soluções. Será que isso é sempre assim? Toda equação algébrica tem solução? E, se for do grau n, será que ela terá n soluções?

Para responder a essas questões, você vai relembrar alguns resultados que serão necessários quando se trabalha com polinômios nos números complexos e vai conhecer um teorema importante, talvez novo para você, mas vai usá-lo mesmo sem ver sua demonstração.

Esse é o resultado mais importante neste contexto e que, por isso, é chamado de **Teorema Fundamental da Álgebra**.

Ele diz o seguinte:

Toda equação polinomial P(x)=0, de grau ≥1, tem, pelo menos, uma raiz complexa.

Observe que esse polinômio pode ser real ou complexo, isto é, os coeficientes são complexos quaisquer e podem, portanto, ser todos reais. Mas, mesmo quando os coeficientes são todos reais, a raiz pode não ser real. O teorema garante a existência de uma raiz complexa, que pode, portanto, ser real ou não.

Juntando esse teorema com o Teorema do Resto, que diz que, se a é uma raiz (real ou mesmo complexa), então o polinômio P(x) é divisível por (x – a), e repetindo esse procedimento com o quociente de P(x) por (x – a) você vai chegar ao seguinte resultado.

O polinômio P(x) de grau n, com n ≥ 1 e coeficiente a_n, de x^n, pode ser escrito como o produto de n binômios:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n),$$

onde os números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ e x_n são complexos.

Esse resultado recebe o nome de **Teorema da Decomposição** e, é claro, os números $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}$ e x_n são raízes da equação $P(x) = 0$.

Observe que, mesmo que os coeficientes de $P(x)$ sejam todos reais, algumas ou todas as raízes de $P(x) = 0$ podem ter parte imaginária não nula.

Questão 2

Escreva o polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ como produto de binômios do 1º grau.

Voltando ao Teorema da Decomposição, em

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n),$$

os números complexos $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}$ e x_n podem não ser n números distintos. Se algum desses números se repete um número d de vezes, d se diz a **multiplicidade dessa raiz**.

E esse é mais um fato que se conclui do Teorema da Decomposição: uma equação polinomial nos números complexos de grau n, com $n \geq 1$, tem n raízes complexas, se contadas com suas multiplicidades.

Aluno

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • A sequência... das raízes.

Questão

Encontre todas as raízes da equação

$$x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 36x^2 + 72x = 0,$$

sabendo que $x = 2$ é uma delas.

Observação: Não se deixe impressionar pela tarefa que parece tão difícil. Você já sabe uma das raízes e pode ver a outra com facilidade. Como não há termo independente (sem o x), todos os termos estão multiplicados por x, então $x = 0$ é uma solução e você pode já dividir o polinômio P(x) do 1º membro por $(x - 0) = x$. Comece por aí e, depois, divida o quociente obtido por $x - 2$.

A partir daí, o leme é todo seu! Ao mar! Quer um salva-vidas? A raiz quadrada de 169 é 13.

Quarta Etapa

Quiz

Questão (FUVEST – Vestibular da USP, adaptada.)

As três raízes de $2\,(x^3 + 2) = x\,(x + 8)$ são p, q e 2, com $p > q$. O valor de $2p + q^2$ é

a. $-\dfrac{15}{4}$

b. -3

c. $-$

d. -1

e. 5

Aluno

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Etapa Flex

Para saber +

1. Para rever alguns dos resultados focalizados nesta dinâmica, seus alunos podem assistir aos vídeos das aulas do Professor Guto sobre Equações Polinomiais em:

   http://www.auladoguto.com.br/?s=equa%C3%A7%C3%B5es+polinomiais

2. Você encontra mais exercícios sobre este assunto em:

   http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-polinomios.htm

   em que você poderá conferir suas resoluções com as que lá são apresentadas.

Agora é com você!

1. Na Segunda Etapa, você viu que 1, 2 + i e 2 – i são zeros do polinômio

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5.$$

Agora escreva P(x) como produto de um binômio do 1º grau e um trinômio do 2º grau, todos com coeficientes reais.

2. Você escreveu um polinômio P(x) como produto de binômios da forma (x – a), em que a é zero do polinômio. Esse a pode ser complexo, mesmo que todos os coeficientes de P sejam reais. Mas, tendo que eventualmente considerar trinômios do 2º grau, você vai poder fatorar um polinômio

com coeficientes reais em binômios do 1º grau e/ou trinômios do 2º grau, todos com coeficientes reais. Para verificar isso, seja $z = a + bi$ e calcule o produto $(x - z)\,(x - \overline{z})$.

Veja você concluiu que $(x - z)\,(x - \overline{z})$ é um trinômio do 2º grau, com coeficientes reais e discriminante negativo (pois seus zeros são complexos com parte imaginária não nula, z e $\overline{z}$).

E esse resultado permite a fatoração de um polinômio com coeficientes reais em fatores também com coeficientes reais, embora sejam de grau 1 ou 2.

3. (UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro) Considere o polinômio:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$$

a. Calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)$.

b. Ache as raízes de $P(x) = 0$

4. (PUC/RJ) Sabendo que $\frac{3}{4}$ é raiz da equação: $10x\,(2x^2 - 1) = 3(x^2 + x - 1)$, determine as outras duas raízes dessa equação.

Aluno

5. (*FUVEST – Vestibular da USP*) Sabe-se que o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + mx + n$, em que m e n são reais, é divisível por $x – 1$.

a. Determine n em função de m.

b. Determine m para que P(x) admita raiz dupla diferente de 1.

c. Para que valores de m P(x) admite três raízes reais e distintas?

6. (*UFPR – Universidade Federal do Paraná*) Considere o polinômio:

$$P(x) = x^3 - ax^2 + x - a$$

e analise as afirmativas:

(I) $i = \sqrt{-1}$ é uma raiz desse polinômio.

(II) Qualquer que seja o valor de a, P(x) é divisível por $(x – a)$.

(III) Para que $P(-2) = -10$, o valor de a deve ser zero.

Matemática

Assinale a alternativa correta:

a. Somente a afirmativa (II) é verdadeira.

b. Somente as afirmativas (I) e (II) são verdadeiras.

c. Somente as afirmativas (I) e (III) são verdadeiras.

d. Somente as afirmativas (II) e (III) são verdadeiras.

e. As afirmativas (I), (II) e (III) são verdadeiras.

Aluno