Reforço escolar • Matemática •

Onde está o tesouro?

Dinâmica 4

3ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 3ª	Algébrico-Simbólico.	Polinômios e Equações Algébricas.

Aluno

Primeira Etapa

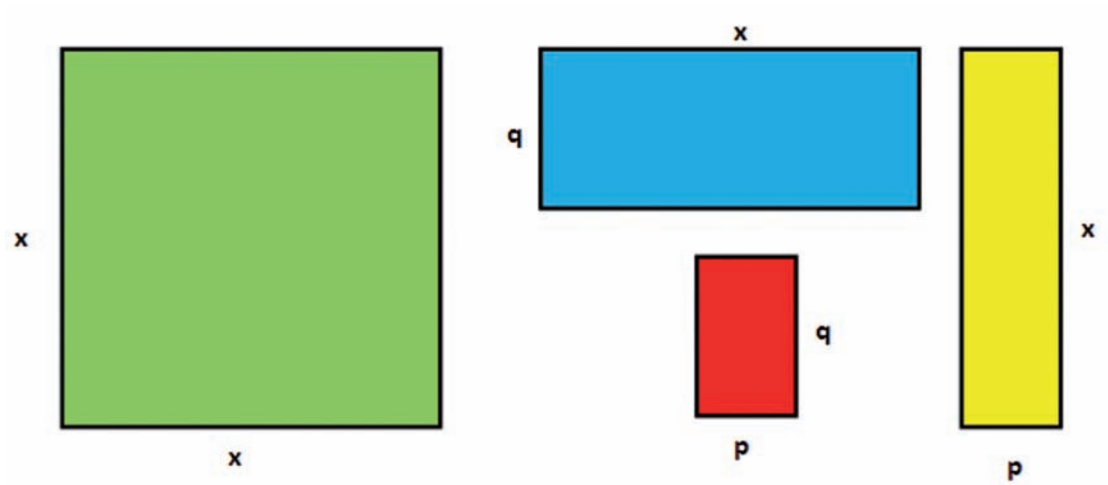
Compartilhar ideias

Atividade • Terrenos, áreas e polinômios.

Você vai cortar e emendar um terreno para comparar o processo algébrico com a ilustração geométrica do produto $(x - p).(x - q)$, em que $0 < p < q < x$.

Para montar a ilustração geométrica, você vai acompanhar o desmonte do terreno quadrado de lado x para chegar ao terreno retângulo de dimensões $(x - p)$ por $(x - q)$ e, portanto, de área igual ao produto $(x - p).(x - q)$. Nessa montagem e desmontagem, serão usados retângulos de dimensões x por p, x por q e p por q.

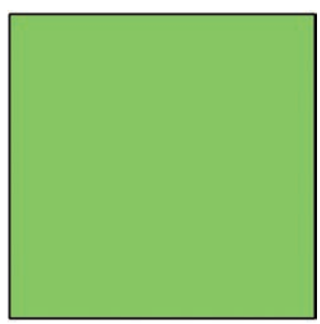
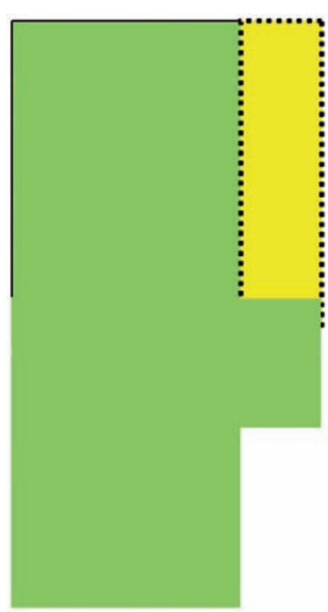
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj



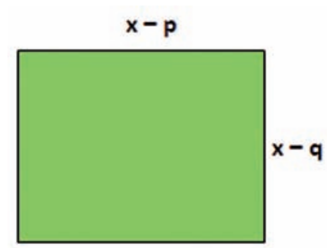
Observando as operações feitas com as figuras, você vai descrever algebricamente os movimentos, discutindo com seus colegas de grupo.

a. Vá acompanhando o movimento das peças e completando a última coluna:

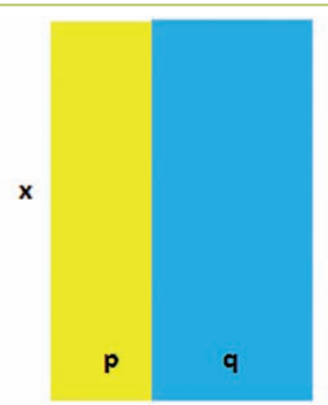
São as seguintes as figuras e suas dimensões:

MOVIMENTO	FIGURA RESULTANTE	Área DA FIGURA VERDE
Partindo do quadrado de lado x		x^2
Cortando o retângulo de dimensões p por x com um lado coincidindo com um lado do quadrado.		
Acrescentando o retângulo de dimensões p por q de modo a restaurar um lado de medida x do quadrado.		

Aluno

Cortando o retângulo de dimensões x por q.		Cuidado aqui! Confira com seu professor!
Figura final = retângulo (x – p) por (x – q)		

b. E como calcular a soma: px + qx?

MOVIMENTO	FIGURA RESULTANTE	Área da figura RESULTANTE
Juntar os retângulos de dimensões p por x e q por x formando um retângulo (p + q) por x.		px + qx =

Confira com seus colegas de grupo e da turma o resultado que essas figuras ajudam a concluir:

(X – P).(X – Q) =

Ficam ainda algumas perguntas e a primeira é:

Esse resultado só vale nas condições em que* x, p *e* q** são positivos e com **0 < p < q < x*?

Você vai responder a esta pergunta fazendo os cálculos algébricos e verificando que x, p, q **<u>podem ser números quaisquer, podem mesmo ser complexos</u>** e o resultado vai ser o mesmo.

c. Faça os cálculos:

×	x	$-p$	
	x	$-q$	
+			

O resultado deve ser o mesmo que você obteve no cálculo das áreas. Confere?

A segunda pergunta é:

O Teorema da Decomposição vale para polinômios de grau n, com n ≥ 1. Como são os coeficientes do produto de vários binômios do tipo* $(x - p)$*?

Desta vez, vale a pena usar o algoritmo algébrico, pois é mais geral. Mesmo porque, ao multiplicar 3 dimensões, já teríamos que recorrer a paralelepípedos, o que é de construção bem mais complicada!

d. Veja, então, qual é o produto de três desses binômios, calculando: $(x - p).(x - q).(x - r)$.

Você já calculou $(x - p).(x - q)$, basta então multiplicar aquele produto por $(x - r)$.

Avante:

×	x^2	$-(p + q)x$	$+ pq$	
	x	$-r$		
+				

e. E, passando a 4 binômios:

×	x^3	$-(p + q + r)x^2$	$+ (pq + pr + qr)x$	$- pqr$	
		x	$- s$		
+	x^4	$-(p + q + r)x^3$	$+ (pq + pr + qr)x^2$	$- pqrx$	
		$- s\,x^3$	$+ s(p + q + r)x^2$	$- s\,(pq + pr + qr)x$	$+ pqrs$
	x^4	$-(p + q + r + s)x^3$	$+ (pq + pr + qr + ps + qs + rs)x^2$	$-(pqr + pqs + prs + qrs)x$	$+ pqrs$

Você pode imaginar qual seria o resultado para o produto de 5 polinômios?

Aluno

Veja: em cada passo da multiplicação por (x – t), você multiplica o produto anterior por x (o que aumenta em 1 o expoente da variável x em cada termo) e multiplica esse mesmo produto anterior por – t, o que troca os sinais e acrescenta o fator t a cada um dos coeficientes. O próximo passo daria, então:

$(x - p).(x - q).(x - r).(x - s).(x - t) =$

$= x^5 - (p + q + r + s + t)x^4 + (pq + pr + qr + ps + qs + rs + pt + qt + rt + st)x^3$

$- (pqr + pqs + prs + qrs + pqt + prt + pst + qrt + qst + rst)x^2$

$+ (pqrs + pqrt + pqst + prst + qrst)\, x + pqrst.$

Segunda Etapa

Um novo olhar...

Atividade • Em busca das raízes.

Você vai ver um importante teorema que relaciona as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial apresentado pelo matemático Albert Girard (1595–1632).

As relações estabelecidas nesse teorema são, por isso, conhecidas como RELAÇÕES DE GIRARD. Elas constituem uma ferramenta importante na resolução de equações quando conhecemos alguma informação sobre suas raízes.

Essas relações são obtidas pela exploração do Teorema da Decomposição e pela formação dos coeficientes dos produtos estudados na Primeira Etapa.

O Teorema da Decomposição afirma que:

SE P(X) É UM POLINÔMIO DE GRAU N, COM N ≥ 1, SE AN ≠ 0 É O COEFICIENTE DO TERMO DE MAIS ALTO GRAU E SE R1, R2, R3, ... , RN – 1, RN SÃO AS N RAÍZES DA EQUAÇÃO P(X) = 0, ENTÃO:

P(X) = AN (X – R1) (X – R2) (X – R3) ... (X – RN – 1) (X – RN).

Vale lembrar que este teorema vale para polinômios com coeficientes complexos quaisquer e que, mesmo sendo reais todos os coeficientes de P, as raízes são números complexos com parte imaginária nula, ou não.

Pelo que se viu na Primeira Etapa, é possível concluir as Relações de Girard, que são as seguintes:

Para a Equação do 2° Grau:

Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a ¹ 0, pelo Teorema da Decomposição, você sabe que: $ax^2 + bx + c = a\,.\,(x - r_1)\,.\,(x - r_2)$

Utilizando o produto calculado na etapa anterior, você pode concluir:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Para a Equação do 3° Grau:

Se r_1, r_2 e r_3 são as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com a ^{1} 0, pelo Teorema da Decomposição, você sabe que: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a \,.\, (x - r_1) \,.\, (x - r_2) \,.\, (x - r_3)$.

Utilizando o produto calculado na etapa anterior, você pode concluir:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 = \frac{c}{a}$$

$$r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}$$

Aluno

Generalizando os cálculos feitos na Primeira Etapa, utilizando o esboço da passagem de 4 para 5 fatores, as Relações de Girard para a equação de grau n ≥ 1 podem ser enunciadas da seguinte forma:

PARA A EQUAÇÃO DE GRAU "N": AN XN + AN – 1 XN – 1 + ... + A2 X2 + A1 X + A0 = 0

a soma de suas n raízes $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

a soma dos produtos das raízes multiplicadas duas a duas $= +\frac{a_{n-2}}{a_n}$

a soma dos produtos das raízes multiplicadas três a três $= -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

e assim por diante ... até, por último:

o produto das n raízes $= (-1)n\,\frac{a_0}{a_n}$

Observe que os sinais vão se alternando, por causa dos produtos dos sinais – em (x – r), o que já era possível perceber nos casos estudados na Primeira Etapa.

Você vai precisar destas relações para resolver o seguinte desafio.

Questão:

O vovô Marcelão gosta muito de viajar de balão e gosta muito de Matemática também. Ele prometeu levar os netos para passear de balão, mas, antes, eles terão que descobrir a senha que abre cada cabine.

Ajude os netos do vovô Marcelão a encontrar a equação que abre a cabine de cada balão. Seu professor vai entregar ao seu grupo uma lista de senhas possíveis.

Terceira Etapa
Fique por dentro!

Atividade • Onde está o tesouro do vovô Marcelão?

Vovô Marcelão, há muito tempo, escondeu um valioso tesouro no quintal de sua casa. Deixou escondida, no pé direito de um sapato velho, uma carta contendo as dicas de onde foi escondido esse tesouro. Para encontrá-lo, os passos deverão ser rigorosamente seguidos.

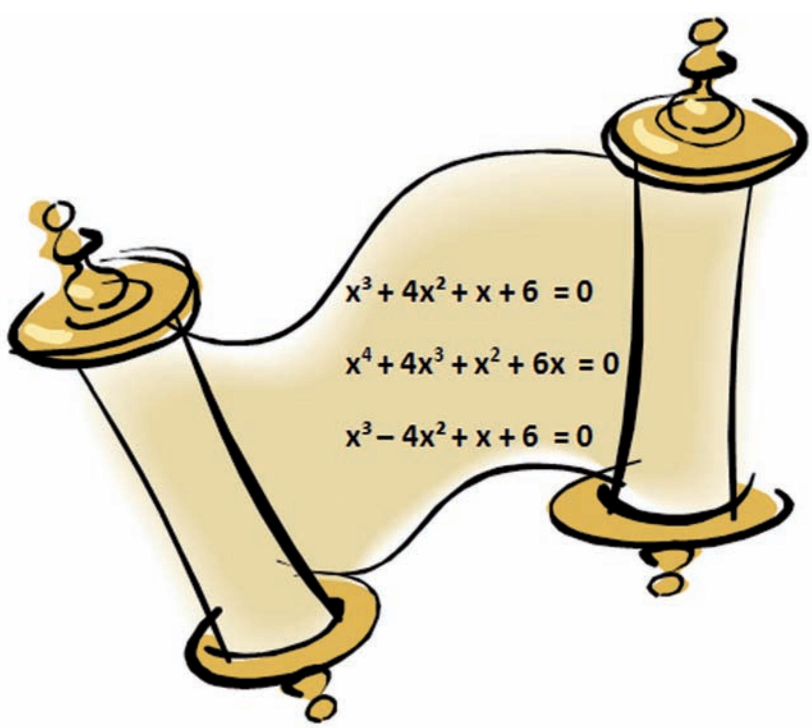
Bem, eu já ia esquecendo. O vovô também deixou registrado o seguinte:

Vocês terão que resolver uma equação, mas cuidado! Há pistas falsas. A equação que vocês têm que resolver tem todas as soluções inteiras e não nulas.

Escolham a pista certa e, partindo da nossa velha amoreira, deem um número de passos na direção leste-oeste igual à menor das raízes da equação-pista. Sigam no sentido de oeste para leste se essa raiz for positiva e no sentido de leste para oeste se a raiz for negativa. Sigam depois na direção sul-norte um número de passos igual à maior raiz da equação-pista. Da mesma forma, escolham o sentido de sul para norte se essa raiz for positiva e de norte para o sul se essa raiz for negativa.

Cada neto do vovô Marcelão recebeu uma cópia da carta e ficou acertado que o tesouro seria do primeiro que o encontrasse.

Segue uma cópia das pistas a fim de que você e seu grupo vejam se encontrariam o tesouro. Escolham a pista verdadeira dentre as equações:



Então, à procura do tesouro!

a. A primeira coisa será encontrar a pista certa. E isso você pode começar observando se o termo independente é 0, ou não.

b. Depois, observe que, nas duas outras equações, o termo independente deve ser o produto das raízes com sinal trocado, pois o grau 3 é ímpar. Mas esse é, então, o produto das três raízes inteiras. A busca das soluções deve ser, portanto, entre os divisores de – 6. Quais são esses divisores?

c. Você tem os candidatos. Vale, então, testar esses números nas duas equações. Sejam P(x) o primeiro membro da 1ª equação e Q(x) o primeiro membro da 3ª equação da carta do vovô Marcelão. Ao teste:

X	**$P(X) = X^3 + 4X^2 + X + 6$**	**$Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$**
+ 1		
– 1		
+ 2	$P(2) = 8 + 16 + 2 + 6 = 32$	
– 2		$Q(-2) = -8 - 16 - 2 + 6 = -20$
+ 3		
– 3	$P(-3) = -27 + 36 - 3 + 6 = 12$	
+ 6	$P(6) = 216 + 144 + 6 + 6 = 372$	
– 6		$Q(-6) = -216 - 144 - 6 + 6 = -360$

d. Pronto, agora você já sabe qual é a pista certa e já tem as três soluções. Quais foram esses resultados?

e. No mapa a seguir, que letra representa a localização do tesouro?

E sabem qual foi o tesouro que os netos do vovô Marcelão encontraram?

Um baú com preciosos livros de Matemática, que contêm os mais intrigantes segredos matemáticos de todos os tempos. Um deles traz as Relações de Girard e as equações algébricas.

Quarta Etapa

Quiz

Questão

(*UNICAMP, 2006, adaptada para múltipla escolha.*)

As três raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 12x - q = 0$, onde q é um parâmetro real, formam uma

progressão aritmética de razão r: $a - r$; a ; $a + r$.

Então, dentre as opções a seguir, a única válida é

Aluno

a. q = 10 e r = 3.

b. q = – 10 e r = 3.

c. q = – 10 e r = – 3.

d. q = 10 e r = 3i.

e. q = – 10 e r = – 3i.

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao Quiz

Etapa Flex

Para saber +

1. No vídeo indicado a seguir é apresentado o método de Briot-Ruffini e, em seguida, apresentam-se e resolvem-se equações polinomiais.

   Acessar

   http://video.impa.br/index.php?page=julho-de-2008

   e clicar na palavra IMPA em:

   Aulas do dia 24/07/2008 - Quinta Feira

   Polinômios - Prof. Luiz Henrique (IMPA)

   Polinômios II - Prof. Paulo Cezar (IMPA)

2. Em:

   http://sovestibular.blogspot.com.br/2009/10/exercicios-de-matematica-equacoes.html

   você encontra exercícios sobre equações algébricas que caíram em alguns vestibulares e suas respostas.

Aluno

Agora, é com você!

1. (*ITA-SP*) Os números a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

2. (*FGV-SP*)- A soma e o produto das raízes da equação $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$ formam qual seguinte par de valores?

   a. $-5; 6$

   b. $5; -6$

   c. $3; 4$

d. 1; 6

e. 4; 3

3. (*MACK-SP, adaptada*)- Uma raiz da equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ é igual à soma das outras duas. A menor das raízes dessa equação é:

a. 6;

b. 3;

c. – 1;

d. – 2;

e. – 3

4. (*FUVEST – vestibular da USP – a questão do Quiz de dinâmica anterior na sua forma original.*)

As três raízes de $9x^3 - 31x - 10 = 0$ são p, q e 2. O valor de $p^2 + q^2$ é:

a. 5/9

b. 10/9

c. 20/9

d. 26/9

e. 31/9

Aluno