Reforço escolar · Matemática ·

Onde está o tesouro?

Dinâmica 4

3ª Série | 4º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 3ª	Algébrico-Simbólico.	Polinômios e Equações Algébricas.

DINÂMICA	Onde está o tesouro?
HABILIDADE BÁSICA	Efetuar cálculos com polinômios.
HABILIDADE PRINCIPAL	Resolver problemas envolvendo operações com polinômios.
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Terrenos, áreas e polinômios.	de 20 a 25 min	Em grupos de 3.	Individual
2	Um novo olhar ...	Em busca das raízes.	de 15 a 20 min	Nos mesmos grupos, com eventual introdução coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Onde está o tesouro do vovô Marcelão?	de 20 a 30 min	Coletiva'	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Esta dinâmica foi elaborada para apresentar as *Relações de Girard* que estabelecem uma ligação entre as raízes de uma equação algébrica e os coeficientes do polinômio do seu primeiro membro. Em primeiro lugar, são desenvolvidos alguns produtos de binômios do tipo $(x - r)$ a fim de que o estudante perceba a formação desses coeficientes. A seguir são dadas algumas aplicações dessas relações.

É importante que o estudante seja avisado de que tais relações, assim como os Teoremas do Resto e da Decomposição, não resolvem equações algébricas, mas propiciam alguma simplificação ou mesmo o cálculo das raízes a partir de alguma outra informação a respeito delas. A maior relevância desses procedimentos se dá pela impossibilidade de resolver equações gerais de grau maior do que 4 por meio de um número finito de cálculos algébricos. Além disso, as Relações de Girard adquirem um peso maior na procura de soluções inteiras.

Também aqui, você, professor/a, poderá administrar o tempo gasto em cada etapa, com certa margem para adaptação à sua turma.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • Terrenos, áreas e polinômios.

Objetivo

Rever a multiplicação de dois binômios.

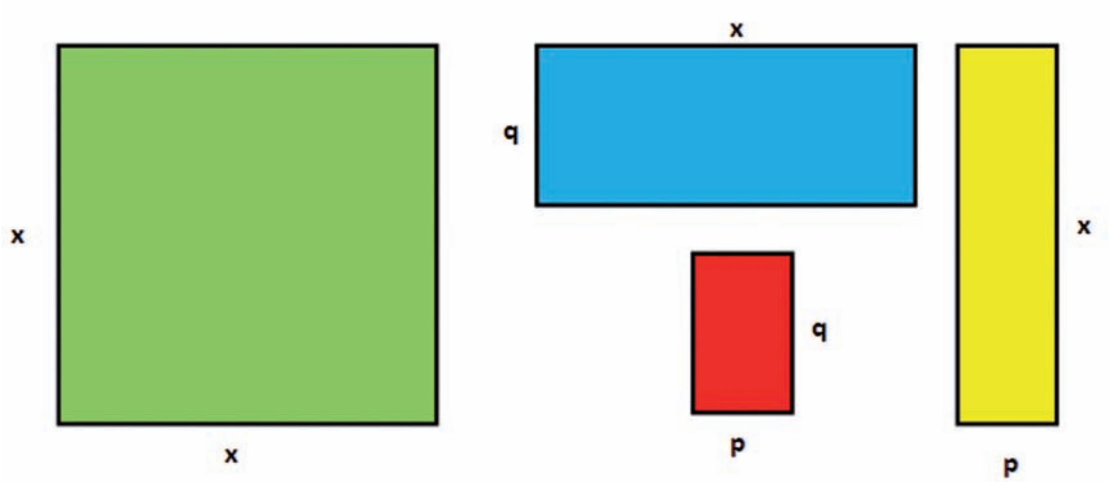
Descrição da atividade

As atividades a seguir provocam o aluno a fazer multiplicações de binômios da forma $(x - p)$, que são fatores em que um polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto.

Questão

Você vai cortar e emendar um terreno para comparar o processo algébrico com a ilustração geométrica do produto $(x - p).(x - q)$, em que $0 < p < q < x$.

Para montar a ilustração geométrica, você vai acompanhar o desmonte do terreno quadrado de lado x para chegar ao terreno retângulo de dimensões $(x - p)$ por $(x - q)$ e, portanto, de área igual ao produto $(x - p).(x - q)$. Nessa montagem e desmontagem, serão usados retângulos de dimensões x por p, x por q e p por q.



Observando as operações feitas com as figuras, você vai descrever algebricamente os movimentos, discutindo com seus colegas de grupo.

a. Vá acompanhando o movimento das peças e completando a última coluna:

São as seguintes as figuras e suas dimensões:

Professor

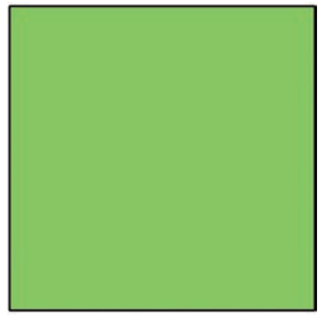
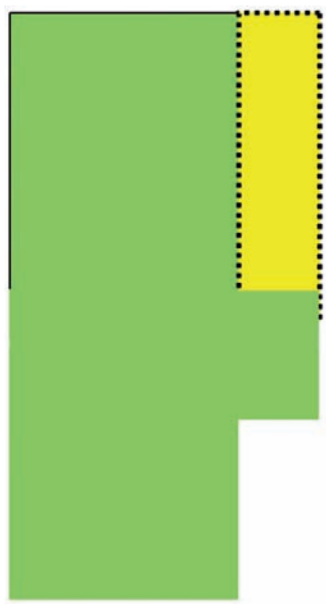
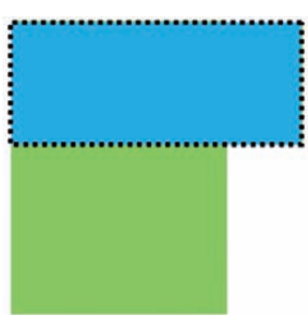
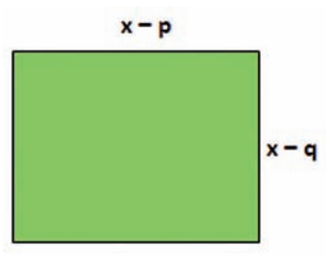
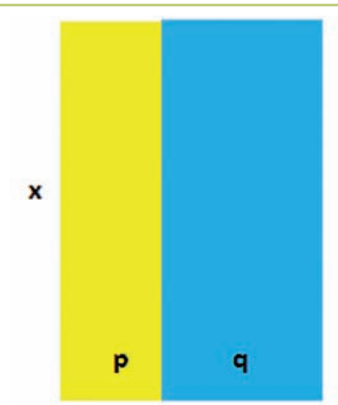
MOVIMENTO	FIGURA RESULTANTE	Área DA FIGURA VERDE
Partindo do quadrado de lado x		x^2
Cortando o retângulo de dimensões p por x com um lado coincidindo com um lado do quadrado.		$x2 - px$
Acrescentando o retângulo de dimensões p por q de modo a restaurar um lado de medida x do quadrado.		$x^2 - px + pq$
Cortando o retângulo de dimensões x por q.		$x2 - px + pq - qx =$ $= x2 - (px + qx) + pq$ Cuidado aqui! Confira com seu professor!

Figura final = retângulo (x – p) por (x – q)		*(x – p) (x – q)*

b. E como calcular a soma: px + qx?

Resposta

MOVIMENTO	FIGURA RESULTANTE	Área da figura RESULTANTE
Juntar os retângulos de dimensões p por x e q por x formando um retângulo (p + q) por x.		px + qx = *(p+q)x*

Confira com seus colegas de grupo e da turma o resultado que essas figuras ajudam a concluir:

$$(X - P).(X - Q) = X^2 - (P + Q)X + PQ$$

Ficam ainda algumas perguntas e a primeira é:

Esse resultado só vale nas condições em que* x, p *e* q** são positivos e com **0 < p < q < x*?

Você vai responder a esta pergunta fazendo os cálculos algébricos e verificando que x, p, q **<u>podem ser números quaisquer, podem mesmo ser complexos</u>** e o resultado vai ser o mesmo.

c. Faça os cálculos:

Resposta

×	x	− p	
	x	− q	
+	x^2	− px	
		− qx	+ pq
	x^2	− (p + q)x	+ pq

O resultado deve ser o mesmo que você obteve no cálculo das áreas. Confere?

A segunda pergunta é:

O Teorema da Decomposição vale para polinômios de grau n, com n ≥ 1. Como são os coeficientes do produto de vários binômios do tipo* (x – p)*?

Desta vez, vale a pena usar o algoritmo algébrico, pois é mais geral. Mesmo porque, ao multiplicar 3 dimensões, já teríamos que recorrer a paralelepípedos, o que é de construção bem mais complicada!

d. Veja, então, qual é o produto de três desses binômios, calculando: (x – p).(x – q). (x – r).

Você já calculou (x – p).(x – q), basta então multiplicar aquele produto por (x – r).

Avante:

Resposta

×	x^2	− (p + q)x	+ pq	
	x	− r		
+	x^3	− (p + q)x^2	+ pqx	
		− rx^2	+ (p + q) rx	− pqr
	x^3	− (p + q + r)x^2	+ (pq + pr + qr)x	− pqr

Professor

e. E, passando a 4 binômios:

$\times$	x^3	$-(p+q+r)x^2$	$+(pq+pr+qr)x$	$-pqr$	
		x	$-s$		
$+$	x^4	$-(p+q+r)x^3$	$+(pq+pr+qr)x^2$	$-pqrx$	
		$-s\,x^3$	$+s(p+q+r)x^2$	$-s\,(pq+pr+qr)x$	$+pqrs$
	x^4	$-(p+q+r+s)x^3$	$+(pq+pr+qr+ps+qs+rs)x^2$	$-(pqr+pqs+prs+qrs)x$	$+pqrs$

Você pode imaginar qual seria o resultado para o produto de 5 polinômios?

Veja: em cada passo da multiplicação por $(x-t)$, você multiplica o produto anterior por x (o que aumenta em 1 o expoente da variável x em cada termo) e multiplica esse mesmo produto anterior por $-t$, o que troca os sinais e acrescenta o fator t a cada um dos coeficientes. O próximo passo daria, então:

$(x-p).(x-q).(x-r).(x-s).(x-t) =$

$= x^5 - (p+q+r+s+t)x^4 + (pq+pr+qr+ps+qs+rs+pt+qt+rt+st)x^3$

$-(pqr+pqs+prs+qrs+pqt+prt+pst+qrt+qst+rst)x^2$

$+(pqrs+pqrt+pqst+prst+qrst)\,x + pqrst.$

Recursos Necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

Espera-se que os alunos conversem sobre a resolução em grupo, mas que façam os cálculos em seu encarte.

A correção também pode ser feita nos grupos ou, se for necessário, numa discussão coletiva no final da etapa.

A passagem de 4 para 5 binômios está justificada em poucas palavras e o resultado já está enunciado. Vale a pena sugerir que os alunos prestem atenção à formação dos coeficientes. Essa verificação pode ser feita nos grupos ou coletivamente, conforme o tempo disponível e o número de grupos a serem atendidos.

Professor/a:

A escolha para trabalhar o caso literal, em vez de dar valores numéricos às dimensões dos retângulos, é porque o objetivo final da dinâmica é chegar às relações de Girard. Se o aluno trabalhar com números ao invés das letras, as operações ficam ocultas: é difícil saber se um 8 está no lugar de 3 + 5 ou de 2 × 4, por exemplo.

Na parte (a) desta etapa, há uma passagem que vai exigir um cuidado especial. É aquela em que o aluno pode não perceber que é importante juntar as parcelas que contêm x e dar um passo adiante, fazendo: $x^2 - px + pq - qx = x^2 - (px + qx) + pq$.

Esses produtos serão generalizados, pois o interesse é estudar equações de grau n. Talvez seja o caso de mostrar que, no cálculo do produto de n binômios, cada parcela tem n fatores, alguns dos quais são iguais a x e os demais são as constantes – p, – q, etc. Essas constantes participam do binômio com sinal menos, então, quando o número de constantes na parcela for par, o sinal da parcela será +, quando for ímpar o sinal da parcela será – . Por isso, os sinais das parcelas se alternam de acordo com o expoente de x, que é o que determina quantas constantes entram em cada parcela.

Segunda Etapa
Um novo olhar...

Atividade • Em busca das raízes.

Objetivo

Apresentar as Relações de Girard.

Descrição da Atividade

A atividade a seguir mostra um importante teorema que relaciona as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial apresentado pelo matemático Albert Girard (1595–1632) em sua obra *Invention nouvelle en l'algèbre*.

As relações estabelecidas nesse teorema s**ão, por isso, conhecidas como *RELAÇÕES DE* GIRARD.** Elas constituem uma ferramenta importante na resolução de equações quando conhecemos alguma informação sobre suas raízes.

Essas relações são obtidas pela exploração do Teorema da Decomposição e pela formação dos coeficientes dos produtos estudados na Primeira Etapa.

O Teorema da Decomposição afirma que:

SE P(X) É UM POLINÔMIO DE GRAU N, COM N ≥ 1, SE AN ≠ 0 É O COEFICIENTE DO TERMO DE MAIS ALTO GRAU E SE R1, R2, R3, ... , RN – 1, RN SÃO AS N RAÍZES DA EQUAÇÃO P(X) = 0, ENTÃO:

P(X) = AN (X – R1) (X – R2) (X – R3) ... (X – RN – 1) (X – RN).

Vale lembrar que este teorema vale para polinômios com coeficientes complexos quaisquer e que, mesmo sendo reais todos os coeficientes de P, as raízes são números complexos com parte imaginária nula, ou não.

Pelo que se viu na Primeira Etapa, é possível concluir as Relações de Girard, que são as seguintes:

Para a Equação do 2° Grau:

Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a\ ^{1}\ 0$, pelo Teorema da Decomposição, você sabe que: $ax^2 + bx + c = a \,.\, (x - r_1) \,.\, (x - r_2)$

Utilizando o produto calculado na etapa anterior, você pode concluir:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Para a Equação do 3° Grau:

Se r_1 , r_2 e r_3 são as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a\ ^{1}\ 0$, pelo Teorema da Decomposição, você sabe que: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a \,.\, (x - r_1) \,.\, (x - r_2) \,.\, (x - r_3)$.

Utilizando o produto calculado na etapa anterior, você pode concluir:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 = \frac{c}{a}$$

$$r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}$$

Generalizando os cálculos feitos na Primeira Etapa, utilizando o esboço da passagem de 4 para 5 fatores, as Relações de Girard para a equação de grau $n \geq 1$ podem ser enunciadas da seguinte forma:

Professor

PARA A EQUAÇÃO DE GRAU "N": AN XN + AN – 1 XN – 1 + ... + A2 X2 + A1 X + A0 = 0

a soma de suas n raízes $= -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

a soma dos produtos das raízes multiplicadas duas a duas $= +\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

a soma dos produtos das raízes multiplicadas três a três $= -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

e assim por diante ... até, por último:

o produto das n raízes $= (-1)n\ \dfrac{a_0}{a_n}$

Observe que os sinais vão se alternando, por causa dos produtos dos sinais – em (x – r), o que já era possível perceber nos casos estudados na Primeira Etapa.

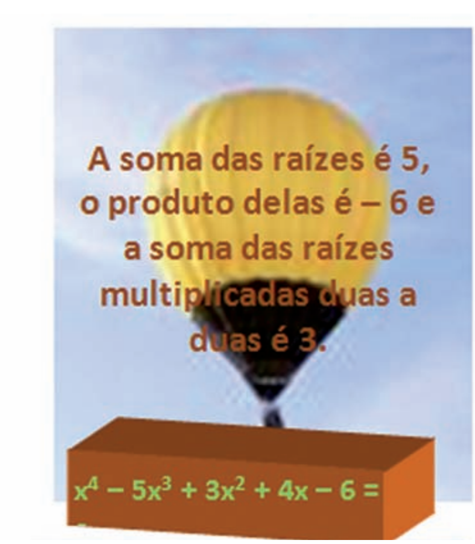
Você vai precisar destas relações para resolver o seguinte desafio.

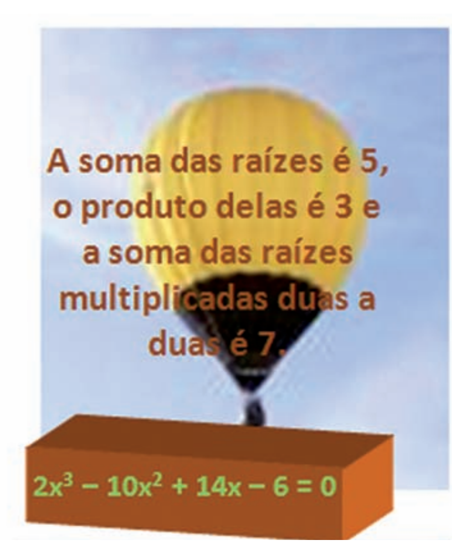
Questão:

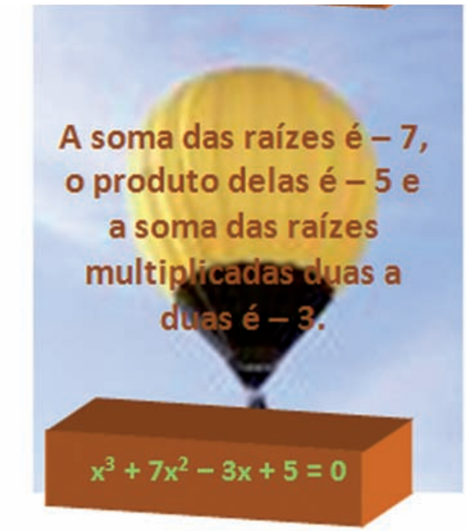
O vovô Marcelão gosta muito de viajar de balão e gosta muito de Matemática também. Ele prometeu levar os netos para passear de balão, mas, antes, eles terão que descobrir a senha que abre cada cabine.

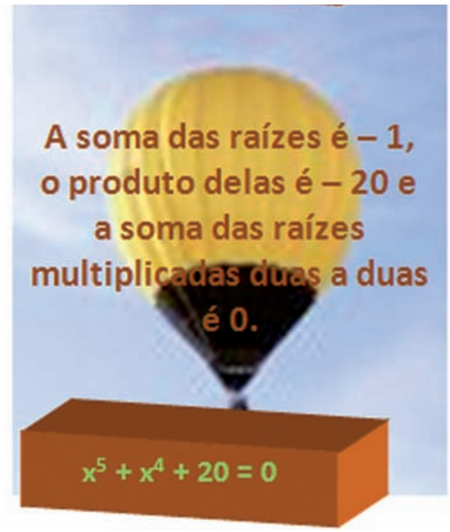
Ajude os netos do vovô Marcelão a encontrar a equação que abre a cabine de cada balão. Seu professor vai entregar ao seu grupo uma lista de senhas possíveis.

Resposta









DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
$x^5 + x^4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

Recursos necessários

- Encarte do aluno.
- Dicas para os netos do vovô Marcelão, disponíveis para recorte em anexo.

Procedimentos Operacionais

As tabelas com as "dicas" das equações precisam ser recortadas com antecedência.

A discussão das Relações de Girard são consequência do trabalho realizado na Primeira Etapa e pode ser feita nos trios. No caso de turmas grandes, em que você não possa acompanhar as discussões, elas podem ser feitas coletivamente.

Mesmo no caso das discussões feitas coletivamente, a questão sobre a escolha das equações dadas e algumas relações entre as raízes devem ser feitas nos trios.

Já as anotações devem ser registradas individualmente no Encarte do Aluno para consulta posterior.

Professor/a:

É importante que o estudante perceba que, na multiplicação de um certo número de binômios da forma (x – r), cada termo terá esse mesmo número de fatores. Alguns deles são iguais a x, os outros são produtos dos – r. É o número de fatores – r que determina o sinal que precede esse termo: se esse número for par, o sinal será + e será – se esse número for ímpar. Ora, esse número somado com o expoente de x daquele termo é sempre o grau do polinômio. Logo, os sinais dos termos vão se alternando. O termo de grau mais alto só tem fatores x, então vem com sinal +. O termo seguinte, de expoente 1 a menos, é uma soma de parcelas em que há um só fator – r, logo tem sinal – , o seguinte terá parcelas com 2 fatores do tipo – r, logo terá sinal +, e assim por diante. Por isso, o último sinal será (– 1) elevado ao grau do polinômio. Ou seja, o sinal do termo que seja a soma das raízes é –, o sinal do termo que seja a soma dos produtos de 2 raízes tem sinal +, o sinal do termo que seja a soma dos produtos de 3 raízes tem sinal –, e assim por diante. Por exemplo, se n = 5, no produto de 5 fatores, se o expoente de x for 3, há em cada termo 2 fatores com sinal –, então o sinal dessa parcela será +; se o expoente de x for 2, há, em cada termo, 3 fatores com sinal –, então o sinal dessa parcela será –.

Essas observações podem ser verificadas pelas multiplicações feitas na Primeira Etapa e ajudam o estudante a guardar com mais facilidade tais resultados.

Terceira Etapa

Fique por dentro!

30 MINUTOS

Atividade • Onde está o tesouro do vovô Marcelão?

Objetivo

Aplicar as Relações de Girard na resolução de equações algébricas.

Descrição da atividade

Os alunos, mantidos em seus próprios grupos, deverão descobrir em que ponto encontrarão o tesouro que foi enterrado, há muitos anos, pelo vovô Marcelão. Os passos poderão ser descobertos através da resolução de uma equação algébrica, pela aplicação das Relações de Girard.

Questão

Vovô Marcelão, há muito tempo, escondeu um valioso tesouro no quintal de sua casa. Deixou escondida, no pé direito de um sapato velho, uma carta contendo as dicas de onde foi escondido esse tesouro. Para encontrá-lo, os passos deverão ser rigorosamente seguidos.

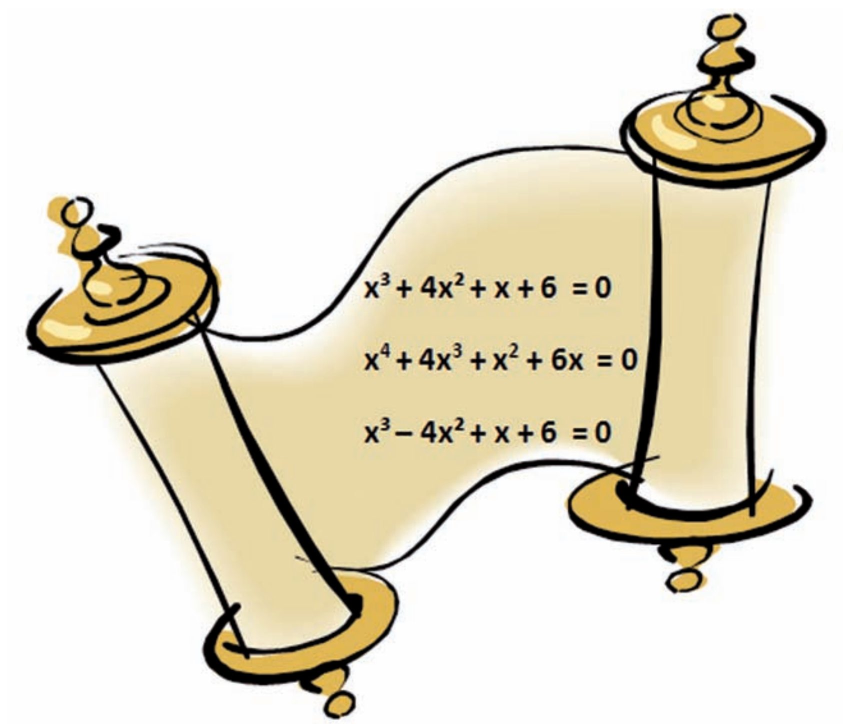
Bem, eu já ia esquecendo. O vovô também deixou registrado o seguinte:

Vocês terão que resolver uma equação, mas cuidado! Há pistas falsas. A equação que vocês têm que resolver tem todas as soluções inteiras e não nulas.

Escolham a pista certa e, partindo da nossa velha amoreira, deem um número de passos na direção leste-oeste igual à menor das raízes da equação-pista. Sigam no sentido de oeste para leste se essa raiz for positiva e no sentido de leste para oeste se a raiz for negativa. Sigam depois na direção sul-norte um número de passos igual à maior raiz da equação-pista. Da mesma forma, escolham o sentido de sul para norte se essa raiz for positiva e de norte para o sul se essa raiz for negativa.

Cada neto do vovô Marcelão recebeu uma cópia da carta e ficou acertado que o tesouro seria do primeiro que o encontrasse.

Segue uma cópia das pistas a fim de que você e seu grupo vejam se encontrariam o tesouro. Escolham a pista verdadeira dentre as equações:



Então, à procura do tesouro!

a. A primeira coisa será encontrar a pista certa. E isso você pode começar observando se o termo independente é 0, ou não.

Resposta

Ora, a pista certa é uma equação que não tem raiz nula. Isso mostra que a 2ª equação é uma pista falsa: o termo independente é nulo, então pelo menos uma raiz é nula.

• • • • •

b. Depois, observe que, nas duas outras equações, o termo independente deve ser o produto das raízes com sinal trocado, pois o grau 3 é ímpar. Mas esse é, então, o produto das três raízes inteiras. A busca das soluções deve ser, portanto, entre os divisores de – 6. Quais são esses divisores?

Resposta

As raízes só podem ser + 1 ou – 1, + 2 ou – 2, + 3 ou – 3, + 6 ou – 6.

• • • • •

c. Você tem os candidatos. Vale, então, testar esses números nas duas equações. Sejam P(x) o primeiro membro da 1ª equação e Q(x) o primeiro membro da 3ª equação da carta do vovô Marcelão. Ao teste:

Resposta

x	**$P(x)= x^3 + 4x^2 + x + 6$**	**$Q(x) = x^3 – 4x^2 + x + 6$**
+ 1	P(1) = 1 + 4 + 1 + 6 = 12	Q(1) = 1 – 4 + 1 + 6 = 4
– 1	P(– 1) = – 1 + 4 – 1 + 6 = 8	Q(– 1) = – 1 – 4 – 1 + 6 = 0
+ 2	P(2) = 8 + 16 + 2 + 6 = 32	Q(2) = 8 – 16 + 2 + 6 = 0
– 2	P(– 2) = – 8 + 16 – 2 + 6 = 12	Q(– 2) = – 8 – 16 – 2 + 6 = – 20
+ 3	P(3) = 27 + 36 + 3 + 6 = 72	Q(3) = 27 – 36 + 3 + 6 = 0
– 3	P(– 3) = – 27 + 36 – 3 + 6 = 12	Q(– 3) = – 27 – 36 – 3 + 6 = – 60
+ 6	P(6) = 216 + 144 + 6 + 6 = 372	Q(6) = 216 – 144 + 6 + 6 = 84
– 6	P(– 6) = – 216 + 144 – 6 + 6 = – 72	Q(– 6) = – 216 – 144 – 6 + 6 = – 360

• • • • •

d. Pronto, agora você já sabe qual é a pista certa e já tem as três soluções. Quais foram esses resultados?

Resposta

A pista certa era a 3ª equação e suas soluções são: – 1, 2 e 3.

e. No mapa a seguir, que letra representa a localização do tesouro?

Resposta

Como eles se deslocaram 1 passo de leste para oeste e 3 passos do sul para o norte, o tesouro estava na letra E.

E sabem qual foi o tesouro que os netos do vovô Marcelão encontraram?

Um baú com preciosos livros de Matemática, que contêm os mais intrigantes segredos matemáticos de todos os tempos. Um deles traz as Relações de Girard e as equações algébricas.

Procedimentos Operacionais

Esta atividade está prevista para ser desenvolvida pelos grupos, mas, de acordo com a sua percepção, pode ser interessante fazer alguma discussão coletiva.

Como sempre, os cálculos foram aliviados e com números inteiros de modo a dar maior atenção ao tema introduzido: o uso das Relações de Girard na pesquisa de raízes de equações algébricas.

Intervenção Pedagógica

Professor/a:

Dá para ver que a segunda equação tem uma raiz nula pela Relação de Girard, que diz que o termo independente de x é o produto das raízes. Caso a tenha, esse termo naquela equação é nulo. Daria para ver isso também pela fatoração do 1º membro da equação que tem x como fator comum. Ora, o fator x é o mesmo que (x – 0), logo a equação tem uma raiz nula.

Na exposição da tabela com os valores de P(x) e Q(x) quando x assume os divisores de – 6, o cálculo foi feito até o final. Como o objetivo era o de procurar raízes das equações com 2º membro igual a 0, não seria preciso fazer o cálculo até o final, mas verificar somente se o resultado era, ou não, 0. Por exemplo, quando todas as parcelas são positivas, não seria preciso fazer a soma.

O tesouro do vovô Marcelão, na verdade, foi mostrar ao aluno que a observação das Relações de Girard pode auxiliar na análise de algumas questões, por exemplo, facilita a pesquisa de raízes inteiras. Equações das quais se procuram só as raízes inteiras recebem o nome de Equações Diofantinas. Seu estudo é um capítulo importante da Teoria dos Números. De fato, há muitas situações em que só interessam as respostas inteiras, ou mesmo só as naturais, por exemplo, quando se contam carneirinhos num rebanho.

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão

(*UNICAMP, 2006, adaptada para múltipla escolha.*)

As três raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 12x - q = 0$, onde q é um parâmetro real, formam uma

progressão aritmética de razão r: $a - r$; a ; $a + r$.

Então, dentre as opções a seguir, a única válida é

a. $q = 10$ e $r = 3$.

b. $q = -10$ e $r = 3$.

c. $q = -10$ e $r = -3$.

d. $q = 10$ e $r = 3i$.

e. $q = -10$ e $r = -3i$.

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

Pelas Relações de Girard, a soma das raízes é o coeficiente de x^2, com sinal trocado, isto é:

$a - r + a + a + r = -(-3)$, *isto é:* $3a = 3$, *donde* $a = 1$.

Se 1 é solução da equação, por substituição, tem-se o valor de q:

$1^3 - 3 \times 1^2 + 12 \times 1 - q = 0$ *ou:* $1 - 3 + 12 = q$, *donde:* $q = 10$.

Ora, o produto das 3 raízes é igual, por um lado, a:

$1(1 - r).(1 + r) = 1 - r^2$

e, pelas Relações de Girard, esse produto é também igual a:

$1(1 - r).(1 + r) = -(-q) = q = 10$.

Então, comparando as duas igualdades, segue:

$1 - r^2 = 10$ *ou* $r^2 = -9$, *donde* $r = \pm 3i$.

A razão r pode ser $+3i$ ou $-3i$, mas a resposta $q = 10$ e $r = -3i$, também correta, não é oferecida como opção, então **a opção correta é a opção (d)**.

Possíveis erros:

As demais opções correspondem a erros de sinal no cálculo final ou no passo em que se calcula o valor de r^2. Um aluno que chegue a r^2 = , poderá escolher uma das opções (a), (b) ou (c), conforme o valor encontrado para q.

• • • • •

Etapa Flex

Para saber +

1. Qual a ordem em que devem ser consideradas as raízes de uma equação algébrica para aplicação da Relações de Girard?

   A resposta a esta pergunta é: qualquer. Sim, as raízes são chamadas de r_1, r, etc., mas essa ordem não tem importância na aplicação das relações vistas, pois todas elas são o que se chama de Funções simétricas. Isto é, elas assumem o mesmo valor independentemente da ordem em que sejam considerados os seus argumentos. Por exemplo, no caso da equação dada no Quiz: $x^3 - 3x^2 + 12x - 10 = 0$, suas raízes podem ser ordenadas como $r_1 = 1 - 3i$, $r_2 = 1$ e $r_3 = 1 + 3i$, ou em qualquer outra ordem, mas o cálculo da sua soma, da soma dos seus produtos duas a duas ou do seu produto será sempre o mesmo.

2. Uma outra observação que cabe para ajudar a conferir a aplicação das Relações de Girard é o número de termos de cada uma dessas funções simétricas. No final da Primeira Etapa, foi desenvolvido o produto de 5 binômios. Lá é possível conferir que, para n = 5, têm-se:

   A soma das raízes tem 5 parcelas.

   A soma de seus produtos duas a duas tem 10 parcelas.

   A soma de seus produtos três a três tem 10 parcelas.

   A soma de seus produtos quatro a quatro tem 5 parcelas.

   E o produto das 5 raízes tem 1 só parcela.

   Isso fica bem claro quando se percebe que cada uma dessas parcelas corresponde às combinações das 5 raízes, tomadas uma a uma, ou duas a duas, etc. Esse número pode ser calculado pela fórmula que dá o número de combinações ou diretamente pela aplicação do princípio multiplicativo e aditivo.

3. Uma observação importante sobre o estudo feito sobre as equações algébricas, desde o Teorema do Resto às Relações de Girard, passando pelo Teorema da Decomposição, é que esses procedimentos não são suficientes para o cálculo das raízes da equação algébrica. Foi visto que o Teorema do Resto permite que se reduza a resolução de uma equação do grau n para a resolução de uma equação de grau n – 1, desde que se conheça uma de

suas soluções. As Relações de Girard permitem a determinação de uma ou mais soluções a partir de alguma outra informação sobre as raízes, como foi o caso da equação estudada na questão do Quiz.

Então, por que desenvolver esse estudo tão fraco?

E a resposta é:

Porque não é possível resolver esse problema geral de um modo completo.

Ou seja, nosso aluno já sabe resolver as equações do 2º grau por uma fórmula que dá sempre suas duas raízes, quer sejam reais, simples ou duplas ou complexas. As fórmulas para as equações do 3º e do 4º grau são bem mais complicadas, mas são conhecidas já há muito tempo. E daí para a frente? Ruffini (médico e matemático italiano, 1765–1822) e Abel (matemático norueguês, 1802–1829) mostraram (a prova dada por Ruffini em 1799 tinha um erro, mas a de Abel fechou o problema em 1824 – quando ele tinha só 22 anos!) que não existe, nem pode existir, uma expressão com um número finito de operações algébricas, mesmo que envolva radicais, para a resolução de uma equação algébrica de grau 5 ou mais. Isto é, não existe uma tal fórmula que resolva qualquer equação daquele grau. Claro que a equação $x^{100} = 5$ tem todas as suas raízes dadas pela raiz 100ª de 5. Mas são casos particulares. Não há uma fórmula que sirva para todas as equações daquele grau, como existem as fórmulas para as equações oe 1º, 2º, 3º e 4º graus.

Esse fato não é provado aqui porque exige a construção de objetos algébricos mais sofisticados. Mesmo assim, vale a pena contar o fato ao seu aluno para que ele valorize mais a pouca força destes resultados e para que ele tenha conhecimento de um assunto de Matemática mais avançado do que os que ele já conhece.

4. No vídeo indicado a seguir é apresentado o método de Briot-Ruffini e, em seguida, apresentam-se e resolvem-se equações polinomiais.

   Acessar

   http://video.impa.br/index.php?page=julho-de-2008

   e clicar na palavra IMPA em:

   Aulas do dia 24/07/2008 - Quinta Feira

   Polinômios - Prof. Luiz Henrique (IMPA)

   Polinômios II - Prof. Paulo Cezar (IMPA)

5. Em:

   http://sovestibular.blogspot.com.br/2009/10/exercicios-de-matematica--equacoes.html

   seu aluno encontra exercícios sobre equações algébricas que caíram em alguns vestibulares e suas respostas.

6. Para uma leitura interessante sobre a história do desenvolvimento do estudo das equações algébricas, leia o livro de autoria de Gilberto Geraldo Garbi, *O romance das equações algébricas* (Editora Livraria da Física, 2009 - 240 páginas).

Agora, é com você!

1. (*ITA-SP*) Os números a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Resposta

Ora, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$ *e, pelas Relações de Girard aplicadas ao polinômio* $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, *têm-se:* $bc + ac + ab = 3$ *e* $abc = 4$, *logo:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4}$.

• • • • •

2. (*FGV-SP*)- A soma e o produto das raízes da equação $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$ formam qual seguinte par de valores?

   a. $-5; 6$
   b. $5; -6$
   c. $3; 4$
   d. $1; 6$
   e. $4; 3$

Resposta

Na equação do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, *com raízes* x_1, x_2, x_3 *e* x_4, *valem as relações:* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$ *e* $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = \frac{e}{a}$ *então, na equação dada, a soma das raízes deve ser igual a* $-(-5) = 5$ *e o produto igual a* -6, *sende* **(b)** *a* **opção corret**.

• • • • •

3. (*MACK-SP, adaptada*)- Uma raiz da equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ é igual à soma das outras duas. A menor das raízes dessa equação é:

   a. 6;
   b. 3;
   c. -1;

Professor

d. -2;

e. -3

Resposta

Sejam x, y, z as raízes dessa equação. Por hipótese, pode-se considerar x = y + z. Aplicando as Relações de Girard, têm-se:

$x + y + z = -(-4) = 4$, logo: $2(y + z) = 4$ ou $y + z = 2$.

Então, $x = 2$.

$x\,y\,z = -6$, donde: $2yz = -6$ ou $yz = -3$.

Então, y e z satisfazemàas condições: $y + z = 2$ e $yz = -3$. Novamente, pelas Relações de Girard, y e z são as soluções da equação do 2º grau:

$s^2 - (y + z)s + yz = 0$, ou seja: $s^2 - 2s - 3 = 0$. E as soluções dessa equação podem ser calculadas pela fórmula:

$$s = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

portanto, $s_1 = y = \dfrac{2+4}{2} = 3$ e $s_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$. Logo, as raízes da equação são: 2, -1, 3, e a menor delas é, portanto, -1. A opção correta é (c).

• • • • •

5. (*FUVEST – vestibular da USP – a questão do Quiz de dinâmica anterior na sua forma original.*)

As três raízes de $9x^3 - 31x - 10 = 0$ são p, q e 2. O valor de $p^2 + q^2$ é:

a. 5/9

b. 10/9

c. 20/9

d. 26/9

e. 31/9

Resposta

Lembrando que (p + q)2 = p2 + q2 + 2pq, tem-se que: p2 + q2 = (p + q)2 – 2pq e, pelas Relações de Girard, 2pq = – (– $\dfrac{10}{9}$) e p + q + 2 = 0, então: p2 + q2 = (– 2)2 – $\dfrac{10}{9}$

$= 4 - \frac{10}{9} = \frac{36-10}{9} = \frac{26}{9}$ e a opção correta é a (d).

Se o aluno não tiver a ideia de usar este artifício, ele poderá calcular cada uma das raízes p e , usando os teoremas da decomposição.

Se 2 é raiz da equação, então seu primeiro membro é divisível por (x – 2). Efetuando a divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 9 & 0 & -31 & -10 \\ \hline & 9 & 18 & 5 & 0 \end{array}$$

o quociente será igual a 9x2 + 18 x + 5, cujos zeros são dados pela fórmula

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4\times 9\times 5}}{2\times 9} = \frac{-18 \pm \sqrt{18\times 18 - 18\times 10}}{18} = \frac{-18 \pm \sqrt{18\times 8}}{18} =$$

$$\frac{-18 \pm \sqrt{9\times 2\times 8}}{18} = \frac{-18 \pm \sqrt{9\times 16}}{18} = \frac{-18 \pm 12}{18} = \frac{-3 \pm 2}{3}$$ *, isto é:*

se $p = \frac{-1}{3}$, $q = \frac{-5}{3}$

e p2 + q2 = $\frac{1}{9} + \frac{25}{9} = \frac{26}{9}$, como já havia sido concluído por outro caminho.

• • • • •

Professor

ANEXOS

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:

$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:

$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
$x5 + x4 + 20 = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

DICAS DAS SENHAS DOS BALÕES DO VOVÔ MARCELÃO:			
x5 + x4 + 20 = 0	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$	$3x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$2x^5 + x^4 - 20 = 0$	$x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 - 7x^2 + 3x - 5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$
$x^5 - x^4 - 20 = 0$	$2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$	$x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$	$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$