



# Tudo ou nada!

## Dinâmica 5

3ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Algébrico-Simbólico.	Geometria Analítica.

DINÂMICA	Tudo ou nada!
HABILIDADE BÁSICA	H10 – Resolver problemas utilizando o Teorema de Tales.
HABILIDADE PRINCIPAL	Identificar retas paralelas a partir de suas equações.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Haverá encontro?	20 a 25 min	Em grupos de 3.	Individual
2	Um novo olhar ...	E agora?	20 a 25 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
3	Fique por dentro!	Caminho de volta...	15 a 25 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

## APRESENTAÇÃO

Esta dinâmica pretende levar o aluno a deduzir e utilizar as condições de paralelismo entre retas de um plano, conhecidas suas equações na forma reduzida ou em forma geral.

A apresentação inicial é feita por meio de exemplos numéricos e os processos utilizados são analíticos, gráficos e algébricos, sempre bastante dirigidos e em pequenos degraus.

Como em outras dinâmicas, você tem liberdade para ajustar a duração de cada atividade de acordo com as necessidades de sua turma.

## PRIMEIRA ETAPA

### COMPARTILHAR IDEIAS



#### ATIVIDADE • HAVERÁ ENCONTRO?

##### Objetivo

Analisar o paralelismo entre retas dadas no plano por suas equações reduzidas.

##### Descrição da atividade:

Nesta atividade, os alunos vão analisar equações de movimentos retilíneos uniformes e verificar se haverá colisão. Nas questões propostas, as equações estão na forma reduzida.

#### QUESTÃO 1:

Numa caminhada pela Via Lagos, dois estudantes decidiram medir a distância  $s$  que cada um percorreria, a partir do ponto inicial da via. O tempo  $t$  seria contado a partir de um instante em que ambos já tivessem atingido a velocidade de percurso que seria mantida por algum tempo. Fred percebeu que, enquanto mantivesse essa velocidade, a distância ao ponto inicial podia ser descrita pela equação:

$$s = 5t + 0,7.$$

Já seu amigo Hulk identificou que a equação relativa à sua caminhada nesse mesmo intervalo era:

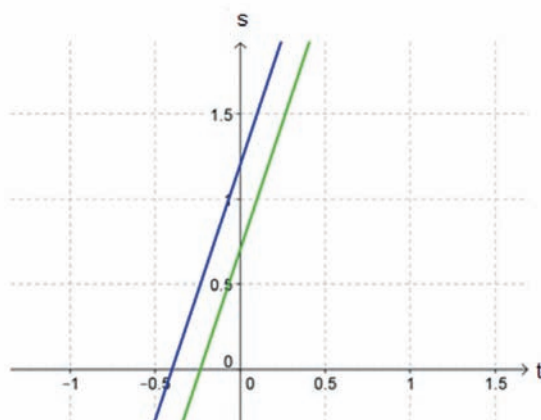
$$s = 5t + 1,2,$$

onde  $s$  é dada em quilômetros e  $t$  em horas.

##### Pergunta:

Será que Fred e Hulk se encontraram nesse intervalo de tempo? Justifique sua resposta, esboçando no mesmo sistema de coordenadas o gráfico de  $s$  em função de  $t$ , definida em cada uma dessas equações.

Resposta



Essas são equações de retas em sua forma reduzida. O coeficiente angular de ambas é 5. Logo, elas fazem ângulos iguais com o eixo das abscissas e, portanto, são paralelas. E são retas distintas, pois para  $t = 0$ , uma reta corta o eixo  $y$  no ponto de ordenada 0,7 e a outra corta o eixo  $y$  no ponto de ordenada 1,2. Isto é, Fred caminhou 0,7 km a partir do ponto inicial e Hulk caminhou 1,2 km a partir do mesmo ponto. Isto significa que, enquanto eles estiverem nesse ritmo, andando em frente, não irão se encontrar.



## QUESTÃO 2:

- a. Analise agora, as várias equações de retas apresentadas a seguir e identifique aquelas que são paralelas entre si:

$$f: y = \frac{1}{2}x; g: y = 5; h: y = x - 3; r: y = -3; s: y = 3 - x;$$

$$t: y = 2 + x; u: y = -\frac{3}{5}x + 5; v: y = 5 + x; w: y = \frac{x-3}{2}.$$

## Resposta

O eixo  $x$  corta paralelas em ângulos iguais, então, são paralelas as retas que têm o mesmo coeficiente angular. Logo na lista acima, são paralelas entre si as retas:

- Com coeficiente angular igual a  $\frac{1}{2}$ :

$$f: y = \frac{1}{2}x \text{ e } w: y = \frac{x-3}{2}.$$

- Com coeficiente angular igual a 1:

$$h: y = x - 3; t: y = 2 + x \text{ e } v: y = 5 + x.$$

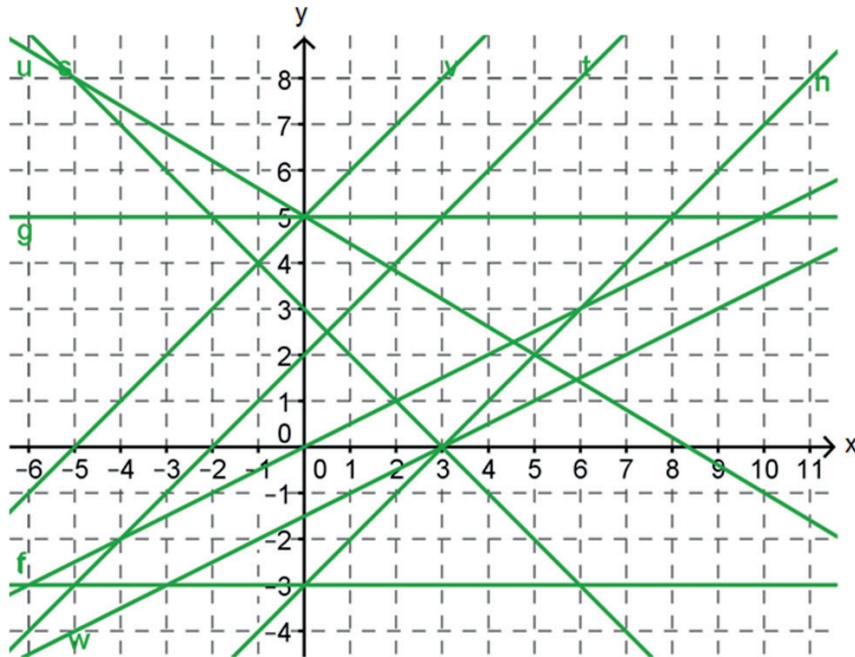
- Com coeficiente angular igual a 0:

$$g: y = 5 \text{ e } r: y = -3.$$

As retas  $s: y = 3 - x$  e  $u: y = -\frac{3}{5}x + 5$  não têm parceiras paralelas nessa lista.



- b. Para complementar o que você fez no item (a), identifique, no esboço gráfico a seguir, a letra correspondente a cada uma das retas indicadas.



### QUESTÃO 3:

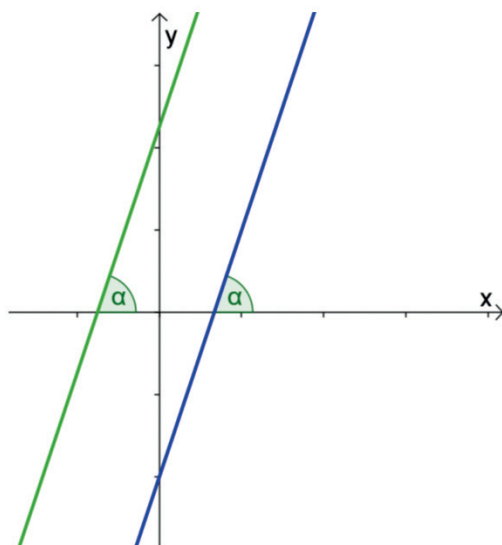
A exemplo das questões anteriores, como você enuncia a condição para verificar se duas retas são paralelas a partir de suas equações reduzidas

$$y = m_1x + n_1 \text{ e } y = m_2x + n_2?$$

Por quê?

Resposta

Consideradas as duas retas no plano com equações:  $y = m_1x + n_1$  e  $y = m_2x + n_2$ , espera-se que o aluno se lembre da propriedade dos ângulos formados por uma transversal a duas paralelas e perceba que a condição é que essas retas façam o mesmo ângulo com o eixo  $x$  e que, portanto, se tenha:  $m_1 = m_2$ . E, no caso de  $m_1 = m_2$ , se  $n_1 = n_2$  as duas retas coincidem e são, na realidade, a mesma reta. Nesse caso, as equações também são uma só. Se  $n_1 \neq n_2$ , as retas têm a mesma inclinação e cortam o eixo  $y$  em pontos distintos, o que significa que são duas retas paralelas no sentido mais comum de retas num plano em que não se encontram.



#### Recursos necessários

- Encarte do Aluno.

### Procedimentos Operacionais

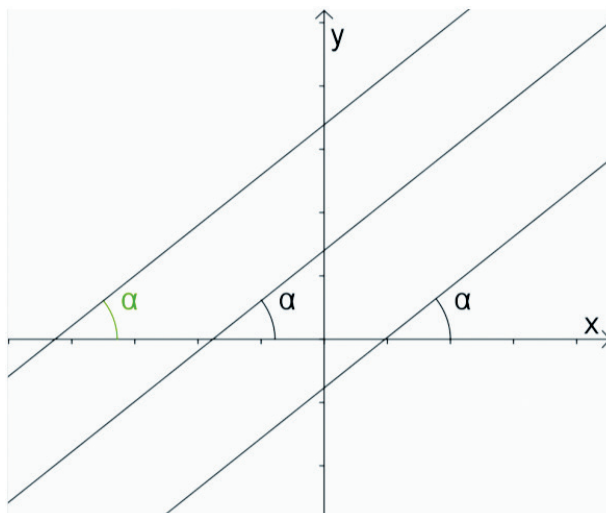
- Nesta etapa, será preciso lembrar que a equação reduzida de uma reta tem a forma  $y = mx + n$  em que  $m$  é o coeficiente angular (ligado à inclinação da reta em relação ao eixo  $x$ ) e  $n$  é o coeficiente linear (ordenada do ponto em que a reta corta o eixo  $y$ ).



### Intervenção Pedagógica

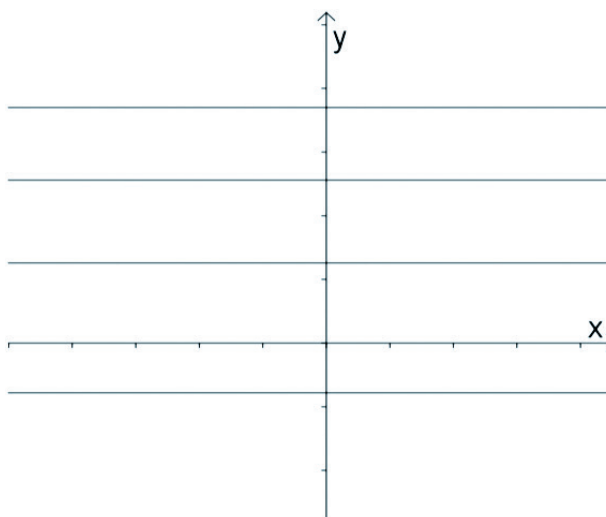
Professor,

- A condição de paralelismo para retas dadas por sua equação reduzida,  $y = mx + n$ , tem sua justificativa geométrica. De fato, quando  $m \neq 0$ , o fato de que retas paralelas tenham a mesma inclinação em relação ao eixo  $x$  é uma consequência da relação entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal que, neste caso, é o eixo  $x$ :



Observe que as propriedades que estão sendo utilizadas aqui são aquela mais conhecida e sua recíproca. Em geral, a proposição estudada é aquela que mostra a igualdade de alguns pares de ângulos formados por uma transversal a um feixe de retas paralelas. A propriedade invocada aqui é também que, quando esses ângulos são iguais, as retas são paralelas.

E, no caso de  $m = 0$ , todas as retas serão paralelas ao eixo  $x$  e retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si:



- É importante lembrar que muitas das justificativas de procedimentos e fórmulas da Matemática não precisam ser reproduzidas pelo aluno quando ele acaba de entrar em contato com as questões. É importante somente que ele saiba que existe a justificativa e que ele tenha acompanhado esses raciocínios uma vez. A partir daí, o tema vai amadurecendo e, mais tarde, se a memória falhar, ele será capaz de refazer esses passos ou, pelo menos, de entender os argumentos encontrados em algum livro ou algum site. Afinal, parece que o Google vai acompanhar esse aluno por algum tempo ainda...

- Nas questões sobre caminhadas, vale a pena observar que os gráficos aqui apresentados não representam o caminho (trajetória) percorrido pelos estudantes. Eles medem a distância percorrida em relação ao tempo e seu mundo é o plano em que um dos eixos é o dos tempos e o outro, das distâncias percorridas. O caminho percorrido pelos estudantes pode ser descrito num mapa da região e é mais ou menos o mesmo, mas em instantes diferentes. Eles não se encontram porque em nenhum instante eles estão à mesma distância do ponto inicial e não porque estejam correndo em pistas paralelas!



## SEGUNDA ETAPA

### UM NOVO OLHAR...



#### ATIVIDADE • E AGORA?

##### Objetivo

Analisar o paralelismo entre retas dadas no plano por equações na forma geral.

##### Descrição da atividade

Nesta atividade, os alunos vão analisar também equações de movimentos retilíneos uniformes e verificar se haverá colisão. Nesta questão, no entanto, as equações estão em forma geral.

#### QUESTÃO 1

Entusiasmadas com a experiência dos colegas, Marta e Érika, resolveram estabelecer sua caminhada na mesma estrada, de modo que a relação entre a distância  $s$  e o tempo  $t$ , definidos como na questão anterior, fosse também dada por equações. Marta afirmou que as equações que permitiriam que elas não se encontrassem seriam:

$$2t - s + 1 = 0 \text{ e } t - 2s + 4 = 0.$$

E Érika discordou, sugerindo as equações:

$$2t - s + 1 = 0 \text{ e } 2t - s + 4 = 0.$$

##### Pergunta:

Qual das duas sugeriu equações de retas paralelas de modo que não haja mesmo perigo de encontro?

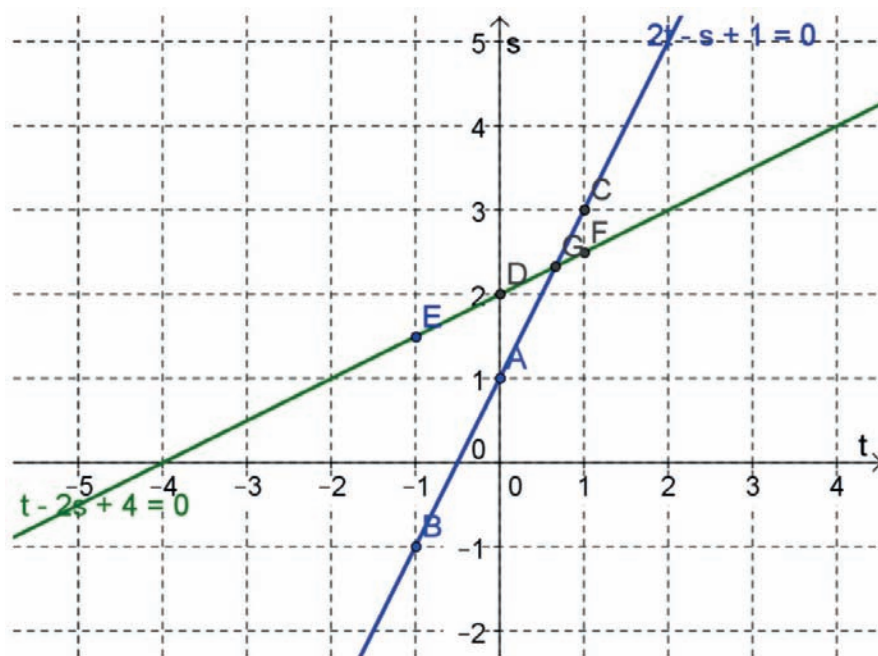


- a. Para fazer esse estudo, comece por fazer gráficos dessas retas, marcando três dos seus pontos, para “ver” o que acontece.

Sugestão da Marta:

$2t - s + 1 = 0$		
ponto	t	s
A	0	1
B	-1	-1
C	1	3

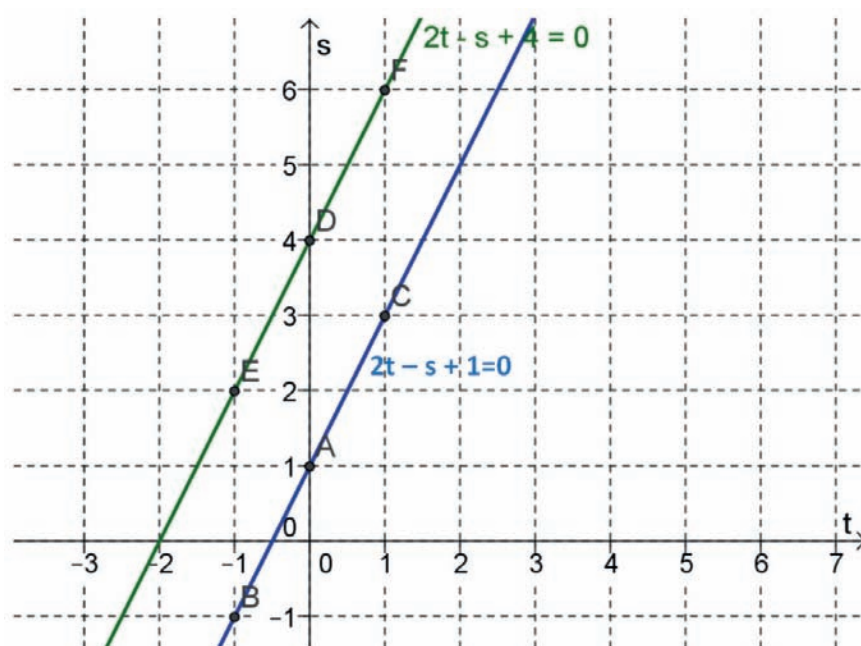
$t - 2s + 4 = 0$		
ponto	t	s
D	0	2
E	-1	1,5
F	1	2,5



Sugestão da Érika:

$2t - s + 1 = 0$		
ponto	t	s
A	0	1
B	-1	-1
C	1	3

$2t - s + 4 = 0$		
ponto	t	s
D	0	4
E	-1	2
F	1	6



- b. Agora, passe das equações gerais para as equações reduzidas e você vai “entender” melhor o que acontece.

## Resposta

Com efeito, escrevendo as equações sugeridas pela Marta na forma reduzida obtêm-se:

$2t - s + 1 = 0$  transforma-se em:  $s = 2t + 1$  e  $2t - s + 4 = 0$  transforma-se em:  $s = \frac{t}{2} + 2$ . Isto significa que o coeficiente angular da 1ª reta é 2 e o da 2ª reta é  $\frac{1}{2}$ . As retas não podem ser paralelas se têm inclinações diferentes em relação ao eixo das abscissas (no caso, o eixo do tempo  $t$ ).

E as equações sugeridas por Érika? Com elas, dá-se o seguinte:

$2t - s + 1 = 0$  já foi visto que se transforma em  $s = 2t + 1$  e  $2t - s + 4 = 0$  transforma-se em  $s = 2t + 4$ . Essas duas equações definem retas com coeficientes angulares ambos iguais a 2. São, portanto retas com mesma inclinação, portanto, paralelas e são distintas porque cortam o eixo das ordenadas (no caso, o eixo  $s$ ) em pontos distintos:  $A = (0, 1)$  e  $D = (0, 4)$ . Logo, não se encontram.



- c. Para concluir, confira as conclusões a que você chegou pelos processos gráfico e analítico, estudando algebricamente os sistemas formados pelas equações sugeridas por Marta e por Érika.

## Resposta

O fato de que os gráficos das retas sugeridas pela Marta se encontram no ponto  $G = (\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$  é confirmado algebricamente, pela solução do sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} 2t - s + 1 = 0 \\ t - 2s + 4 = 0 \end{cases}$$

Este sistema pode ser resolvido, por exemplo, começando por fazer a diferença entre a 1ª equação multiplicada por 2 e a 2ª equação. Isso leva a:

$3t - 2 = 0$ , donde  $t = \frac{2}{3}$ . Valor que, substituído na 1ª equação, leva ao cálculo de  $s$ :  $\frac{4}{3} - s + 1 = 0$ , donde  $s = \frac{7}{3}$ .

E que as retas sugeridas pela Érika não se encontram pode ser confirmado pelo estudo do sistema

formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} 2t - s + 1 = 0 \\ 2t - s + 4 = 0 \end{cases}$$

em que, subtraindo a 1ª equação da 2ª, chega-se à relação:  $3 = 0$  que é visivelmente impossível.



## QUESTÃO 2:

E qual é a condição de paralelismo a partir de equações gerais de duas retas:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ e } a_2x + b_2y + c_2 = 0 ?$$

Espera-se que o estudante se lembre de que, se  $b_1$  e  $b_2$  são diferentes de 0, é possível escrever a equação reduzida de cada uma delas:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \text{ e } y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$$

às quais se aplica o que foi visto na questão anterior: as duas retas são paralelas se  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$  ou, seja se os coeficientes de  $x$  e de  $y$  forem proporcionais. Se os termos independentes forem também proporcionais aos coeficientes, isto é, se  $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$ , então as duas retas coincidem e uma dessas equações é obtida da outra pelo produto por um número real não nulo.

No caso em que  $b_1 = 0$ , então essa reta é paralela ao eixo  $y$  e a outra será paralela a ela se e só se for também paralela ao eixo  $y$ , isto é, se e só se  $b_2 = 0$  também. E, nesse caso, as retas coincidem se  $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$ , o que significa que as equações são obtidas uma da outra pelo produto por um número real não nulo. E serão retas distintas e paralelas se:  $b_1 = b_2 = 0$  e  $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$ .



#### Recursos necessários

- Encarte do aluno.
- Régua, se possível.

## Procedimentos Operacionais

- Os alunos devem manter-se nos mesmos grupos e fazer o registro individual.
- Como sempre, a correção pode ser feita nos grupos ou coletivamente.



Professor,

- Nesta etapa, as retas são dadas por equações na forma geral e a sugestão é que elas sejam transformadas para a forma reduzida, em que o coeficiente angular fica explícito. A abordagem gráfica e algébrica serve para a confirmação dos resultados e a articulação entre Geometria e Álgebra.
- A opção por marcar três pontos para localizar uma reta tem o objetivo de conferir algum eventual erro de cálculo ou de marcação dos pontos no sistema de coordenadas. É mais difícil que, cometido algum desses erros, os três pontos continuem alinhados.
- O título desta dinâmica “Tudo ou nada...” já chama a atenção para a definição de retas paralelas. Em geral, quando se estuda Geometria, a definição de retas paralelas é tal que, no plano, são paralelas as retas que não se encontram. Neste caso, não há lugar para retas coincidentes. Na Geometria Analítica, porém, é mais cômodo considerar 2 equações distintas que definam a mesma reta como sendo equações de “retas coincidentes”. Enfim, quando se diz “2 retas” ela pode ser uma só. Isso é mais cômodo, justamente, para não ser necessário estar sempre fazendo exceções ao considerar equações na forma geral. Se você quer considerar como paralelas num plano coordenado aquelas que fazem o mesmo ângulo com o eixo  $x$ , ou, o que é o mesmo, aquelas que têm a mesma inclinação, você não pode dizer que elas “nunca se encontram” e tem de dizer que “ou são coincidentes ou são disjuntas, isto é, nunca se encontram”. Você pode seguir a opção do livro adotado. O importante é manter a coerência entre a definição que você escolher para retas paralelas no plano e as condições algébricas sobre as equações. Essa duplicidade de equações pode acontecer somente na forma geral mas, na forma reduzida, isso não acontece. Por ter o coeficiente de  $y$  igual a 1, ela será uma só para cada reta que não seja paralela ao eixo  $y$ .
- A contextualização desse estudo em equações que descrevem corridas (equações ditas horárias) é bastante artificial, embora haja situações em que os movimentos sejam conhecidos por suas equações. De qualquer forma, se o aluno estiver curioso, pode elaborar um pouco mais sobre o tema e verificar que, nas condições expostas por Marta, elas se encontrariam para  $t = \frac{2}{3}$ , isto é,  $\frac{2}{3}$  de hora ou 40 minutos depois do início da contagem do tempo e em  $s = \frac{7}{3}$ , isto é, a  $\frac{7}{3}$  km  $\cong$  2 333 m do início da estrada.

- A condição de paralelismo é visível nas equações na forma reduzida, pois um dos coeficientes já dá a inclinação. As equações na forma geral exigem a verificação da proporcionalidade dos coeficientes. O modo como foi sugerido ao estudante, a transformação à forma reduzida, é interessante porque se limita ao caso mais simples, não exigindo o recurso à memória. O enunciado das condições sobre os coeficientes das equações na forma geral será discutido ainda na Etapa Flex.



## TERCEIRA ETAPA

### FIQUE POR DENTRO!



#### ATIVIDADE • CAMINHO DE VOLTA...

##### Objetivo

Escrever equações de retas a partir de condições de paralelismo.

##### Descrição da atividade

Nas etapas anteriores, os alunos analisaram equações de retas para verificar se estas eram, ou não, paralelas. Agora, eles vão usar as condições vistas naquelas etapas para escrever equações de retas dadas por condições de paralelismo.

#### QUESTÃO 1

Qual a equação reduzida da reta paralela à reta de equação  $y = 4x - 7$  que passa pelo ponto  $(5, 2)$ ?

**Resposta**

Se a reta é paralela à reta de equação  $y = 4x - 7$ , sua equação é  $y = 4x + n$  e, se ela passa pelo ponto  $(5, 2)$ , então  $n$  é tal que:  $2 = 4 \times 5 + n$ , ou  $n = 2 - 20$ , isto é:  $n = -18$ .

E a equação pedida é:  $y = 4x - 18$ .



**QUESTÃO 2**

Qual a equação reduzida da reta paralela à reta de equação  $5x - 3y + 9 = 0$ , que passa pelo ponto  $(5, 2)$ ?

---

---

**Resposta**

*Se a reta é paralela à reta de equação  $5x - 3y + 9 = 0$ , sua equação deve ter os coeficientes de  $x$  e de  $y$  proporcionais. Tomando a razão de proporcionalidade igual a 1, a equação será:  $5x - 3y + c = 0$ . Se ela passa pelo ponto  $(5, 2)$ , então  $c$  é tal que:*

$$5 \times 5 - 3 \times 2 + c = 0, \text{ donde } c = -25 + 6 \text{ isto é: } c = -19$$

*e a equação geral é:  $5x - 3y - 19 = 0$ . E a respectiva equação reduzida é, portanto:*

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}.$$

• • • • •

**QUESTÃO 3**

Qual o ponto em que a reta paralela à reta de equação  $y = 3x + 7$  pelo ponto  $(2, 3)$  corta o eixo  $x$ ?

---

---

**Resposta**

*Se a reta é paralela à reta de equação  $y = 3x + 7$ , sua equação é  $y = 3x + n$  e, se ela passa pelo ponto  $(2, 3)$ , então  $n$  é tal que:  $3 = 3 \times 2 + n$ , ou  $n = 3 - 6$ , isto é:  $n = -3$ . E a equação da reta é:  $y = 3x - 3$ .*

*Esta reta vai cortar o eixo  $x$  quando  $y = 0$ , isto é, quando  $3x - 3 = 0$  ou  $x = 1$ . Ou seja, a reta corta o eixo  $x$  no ponto  $(1, 0)$ .*

• • • • •

**Recursos necessários**

- Encarte do aluno.



## Procedimentos Operacionais

- Esta atividade está prevista para ser desenvolvida pelos mesmos grupos, por facilidade de organização.
- Os grupos podem discutir as questões entre si e pode haver, se necessária, uma correção coletiva.

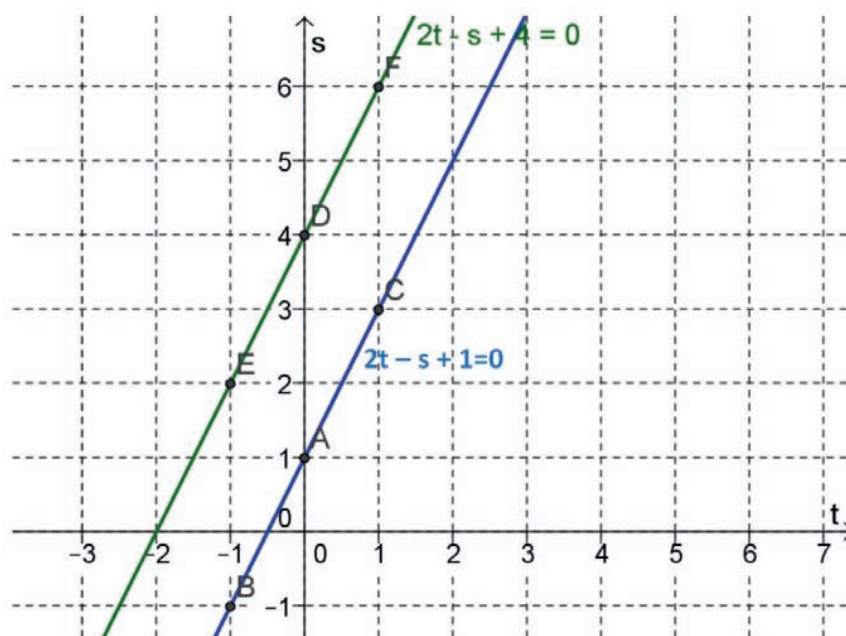


## Intervenção Pedagógica

Professor,

- Estas questões podem ser corrigidas por verificação direta dos cálculos ou por verificação gráfica.

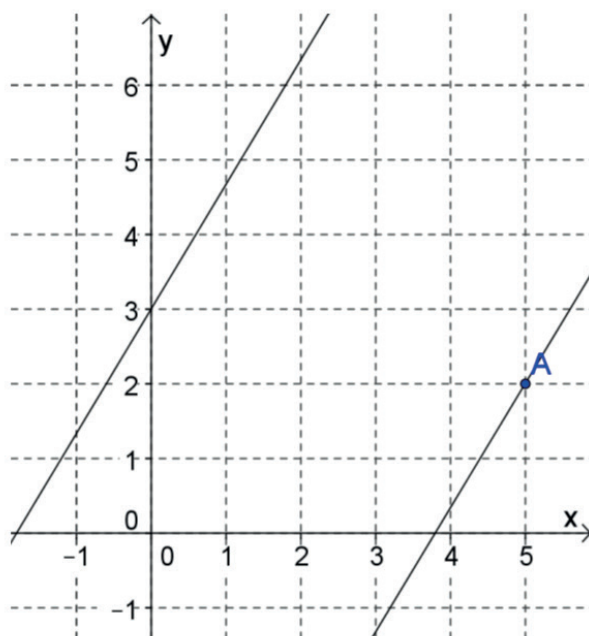
A questão 1 pode ser verificada pela construção dos gráficos das equações:  $y = 4x - 7$ ,  $y = 4x - 18$  e a marcação do ponto (5, 2):



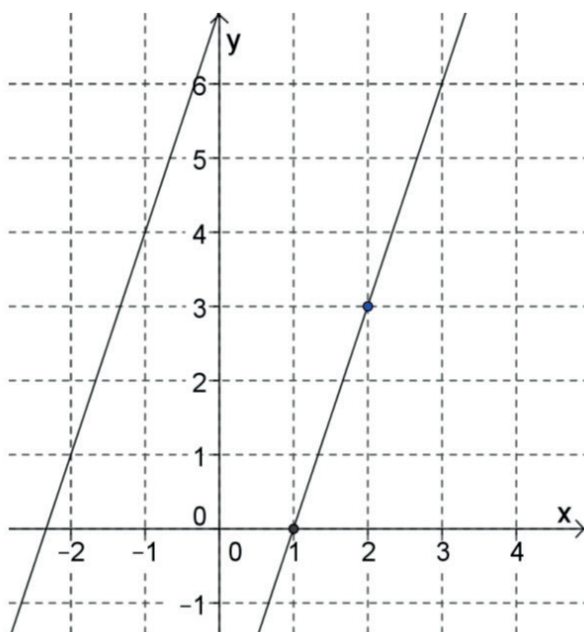
A questão 2 pode ser verificada pela construção dos gráficos das equações:

$5x - 3y + 9 = 0$ ,  $y = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}$  e a marcação do ponto (5, 2):





E a questão 3 pode ser verificada pela construção dos gráficos das equações:  $y = 3x + 7$ ,  $y = 3x - 3$  e marcação dos pontos  $(2, 3)$  e  $(1, 0)$ :



## QUARTA ETAPA

### Quiz



#### QUESTÃO: (USP, ADAPTADA)

A equação da reta passando pela origem e paralela à reta determinada pelos pontos A (2; 3) e B (1; -4) é:

- a.  $y = x$
- b.  $y = 3x - 4$
- c.  $x = 7y$
- d.  $y = 7x$
- e.  $y = 7 + x$

## QUINTA ETAPA

### ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ



Professor

#### Resposta

Se a reta passa pela origem, sua equação reduzida é  $y = mx$ . A equação da reta que passa pelos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  pode ser escrita como:  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1)$ . Seu coeficiente angular é, portanto,  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Fazendo,  $(x_1, y_1) = (2, 3)$  e  $(x_2, y_2) = (1, -4)$ , tem-se que o coeficiente angular da reta pedida deve ser:  $\frac{-4 - 3}{1 - 2} = \frac{-7}{-1} = 7$ . A equação reduzida da reta pedida é, portanto,  $y = 7x$  e a opção correta é (d).

O aluno poderia também testar as opções dadas, começando por excluir as opções (b) e (e) que representam retas que não passam pela origem. Observando que, entre os pontos B e A a abscissa cresce 1 unidade e a ordenada cresce 7, dá para concluir que o coeficiente angular deve ser 7 e a equação reduzida só pode ser  $y = 7x$ .

#### Erros possíveis

A opção (a) tem a vantagem de ser a reta pela origem “mais popular”. Pode ser escolhida por falta de vontade de fazer cálculos.

A opção (b) pode ser escolhida por apresentar coeficientes que estão no enunciado.

As opções (c) e (e) podem ser escolhidas por um aluno que estude a frequência com que o número 7 aparece nas opções, sem saber muito bem qual o seu significado ou qual o seu lugar na equação.

## ETAPA FLEX

## PARA SABER +

1. O estudo da condição de paralelismo de retas de um plano, dadas por suas equações na forma geral,  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ , pode começar pela separação do caso em que algum coeficiente  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  ou  $b_2$  seja nulo. Nesse caso, a reta correspondente será paralela a um dos eixos coordenados e a outra, para que seja paralela a esta, terá que ter o coeficiente correspondente nulo também.

No caso em que estes quatro coeficientes sejam diferentes de zero, a condição de paralelismo encontrada pela transformação destas equações à sua forma reduzida foi:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Ora, mas se esses números são diferentes de zero, essa condição é equivalente a:

$$a_1b_2 = a_2b_1 \text{ ou } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

E a condição para que sejam equações da mesma reta,  $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$  pode também ser escrita como  $c_1a_2 = c_2a_1$ , o que implica que  $c_1$  e  $c_2$  são ambos nulos ou que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Isto é claro: se os 3 coeficientes da equação geral são proporcionais, uma equação é obtida da outra pela multiplicação por um número real diferente de zero e as duas equações têm as mesmas soluções, ou seja, definem a mesma reta.

Resumindo:

as retas de equações $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ,		
São paralelas	São a mesma reta	São retas paralelas distintas
Se $a_1 = a_2 = 0$ , o que implica que $b_1$ e $b_2$ são diferentes de zero e as retas são paralelas ao eixo x (têm y constante).	$a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ e $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , isto é: $a_1 = a_2 = 0$ e $b_1c_2 = b_2c_1$	$a_1 = a_2 = 0$ e $b_1c_2 \neq b_2c_1$

Se $b_1 = b_2 = 0$ , o que implica que $a_1$ e $a_2$ são diferentes de zero e as retas são paralelas ao eixo y (têm x constante).	$b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$ ou $b_1 = b_2 = 0$ e $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , isto é: $b_1 = b_2 = 0$ e $a_1 c_2 = a_2 c_1$	$b_1 = b_2 = 0$ e $a_1 c_2 \neq a_2 c_1$
Se $a_1, a_2, b_1$ e $b_2$ são diferentes de zero e $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ .	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , isto é, os coeficientes são proporcionais.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Este resumo pode organizar o raciocínio, mas talvez não valha a pena guardá-lo de memória. O aluno pode preferir passar à equação reduzida.

2. Vale observar a questão das unidades nos eixos, pois esse problema virá à tona no estudo de retas perpendiculares. A escolha dessas unidades é determinante para a métrica que se esteja usando no plano. O cálculo das distâncias entre dois pontos como aplicação do Teorema de Pitágoras, as medidas dos ângulos e de suas funções trigonométricas pelas expressões mais conhecidas de nossos estudantes são válidas quando as unidades nos 2 eixos são a mesma.

Há propriedades, entretanto, que não dependem de medidas, estas se conservam mesmo com unidades diferentes nos dois eixos e o paralelismo é uma delas.

O fato de que o coeficiente  $m$  está ligado à inclinação da reta de equação  $y = mx + n$  independe da escolha das unidades em cada eixo. O fato de que, quando  $m = 0$ , a reta é paralela ao eixo  $x$  independe das unidades em cada eixo, e, que quando  $m \neq 0$ , o sinal de  $m$  indica se ela é o gráfico de uma função crescente, se  $m > 0$ , e o gráfico de uma função decrescente, se  $m < 0$ , também não depende das unidades nos eixos. Já a igualdade  $m = \tan \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo formado pela reta e o eixo  $x$ , é válida quando a unidade nos dois eixos seja a mesma. Quando as unidades são diferentes, o coeficiente angular é igual à tangente desse ângulo multiplicado por uma constante. Essa constante é igual à razão entre as unidades nos dois eixos. Isso significa que, para qualquer reta que corta o eixo  $x$  (não paralela ao eixo  $x$ ), esse fator é o mesmo.

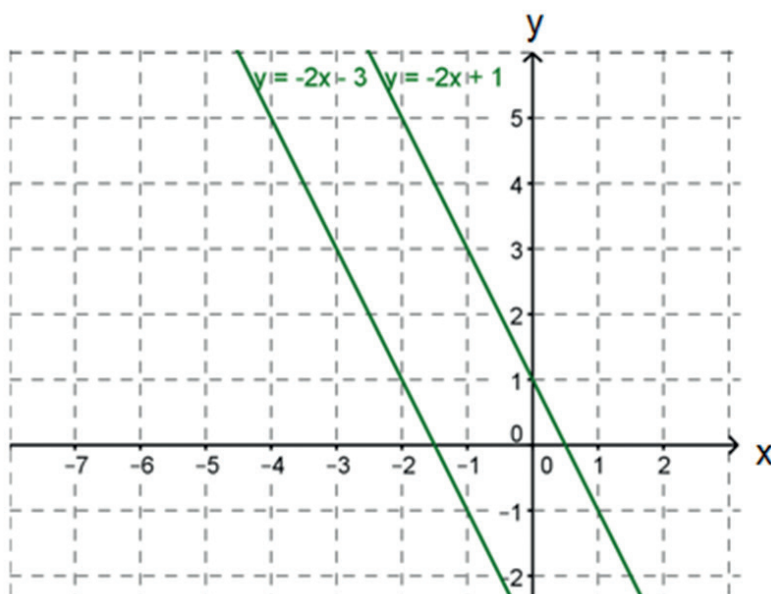
Sendo assim, o fato de que  $m_1 = m_2$  se e somente se as retas  $y = m_1 x + n_1$  e  $y = m_2 x + n_2$  são paralelas independe das escolhas das unidades nos eixos.

Vejamos um exemplo, considere as retas de equações

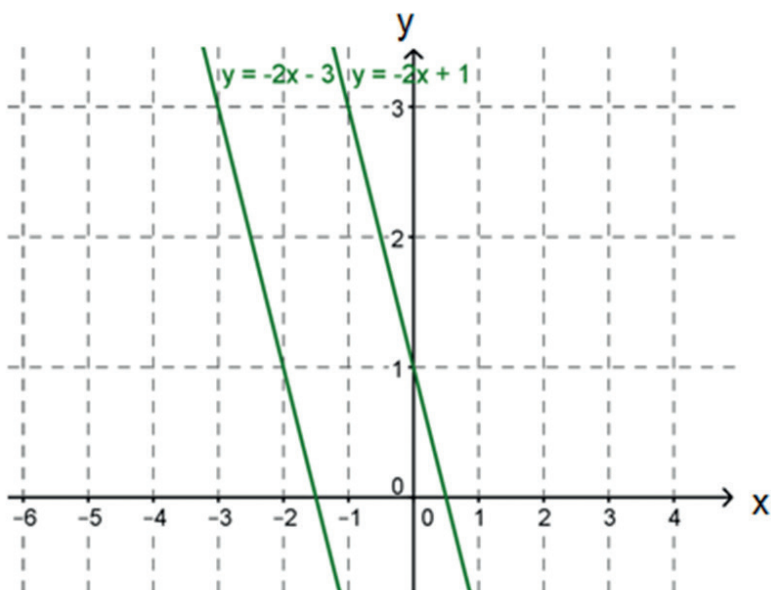
$$y = -2x + 1 \text{ e } y = -2x - 3$$

num sistema de coordenadas em que as unidades sejam as mesmas nos dois eixos e num outro em que a unidade no eixo  $y$  seja o dobro da unidade no eixo  $x$ :

A mesma unidade nos 2 eixos:



Unidades diferentes nos eixos:

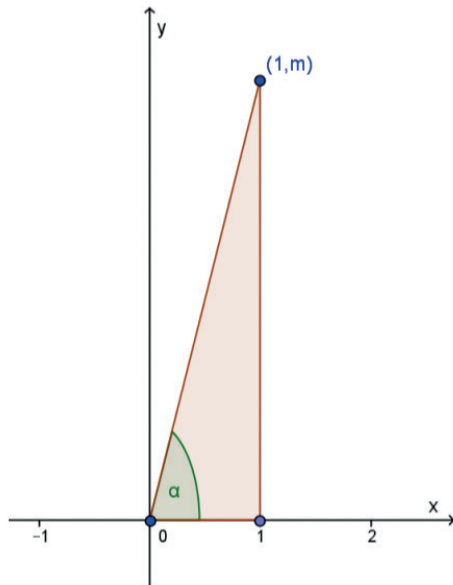


Observe que esse exemplo não é uma prova. A prova está no fato de que a reta de equação  $y = mx + n$  é paralela à reta que passa pela origem e pelo ponto  $(1, m)$ , independentemente do valor de  $n$  e das unidades nos eixos.

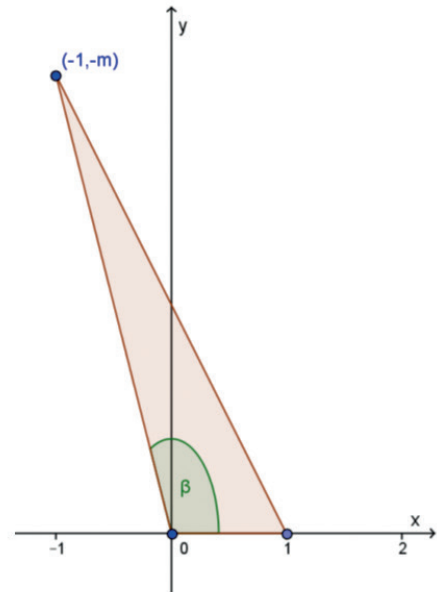
Considere um sistema de coordenadas, em que a unidade no eixo  $y$  tenha medida igual a  $k$  vezes a unidade no eixo  $x$  ( $k > 0$ ).

Examinando o triângulo retângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, m)$  se  $m > 0$  e  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(-1, -m)$ , se  $m < 0$ , nesse sistema de coordenadas e considerando o ângulo  $\alpha$  como sendo o ângulo agudo desse triângulo adjacente ao eixo  $x$ , é possível perceber que, na unidade do eixo  $x$ , tem-se:

Se  $m > 0$



Se  $m < 0$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{km}{1} = km.$$

Observe que a constante  $k$  só depende da relação entre as unidades nos dois eixos.

3. Para aprender mais sobre retas paralelas e perpendiculares o aluno poderá consultar o link a seguir:

- <http://www.youtube.com/watch?v=J2FujKsND2I> e assistir a uma teleaula interessante sobre este assunto.

## AGORA, É COM VOCÊ!

1. (Cesgranrio) As retas  $x + ay - 3 = 0$  e  $2x - y + 5 = 0$  são paralelas, se  $a$  vale:
  - a.  $-2$
  - b.  $-0,5$
  - c.  $0,5$
  - d.  $2$
  - e.  $8$

## Resposta

Antes de tudo, verifica-se que  $a \neq 0$  porque a equação  $x - 3 = 0$  é paralela ao eixo  $y$  e  $2x - y + 5 = 0$  não é. E, se  $a \neq 0$ , a forma reduzida de ambas as equações é:

$$y = -\frac{x}{a} + \frac{3}{a} \text{ e } y = 2x + 5.$$

Elas serão paralelas quando e só quando tiverem o mesmo coeficiente angular, isto é, quando

$$-\frac{1}{a} = 2 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ e a opção correta é (b).}$$

• • • • •

2. (Cesgranrio) Se as retas  $y + \frac{x}{2} + 4 = 0$  e  $my + 2x + 12 = 0$  são paralelas, então o coeficiente  $m$  vale:

- a. 2.
- b. 3.
- c. 4.
- d. 5.
- e. 6.

## Resposta

Se as retas são paralelas, elas possuem o mesmo coeficiente angular e os coeficientes de  $x$  e de  $y$  nas equações na forma geral devem ser proporcionais. Assim:  $\frac{1}{m} = \frac{1/2}{2}$  ou  $2 = \frac{m}{2}$ , isto é,  $m = 4$  e a opção correta é a opção (c).

• • • • •

3. Em que ponto a reta paralela à reta de equação  $5x - 3y + 1 = 0$ , que passa pelo ponto,  $(1, 4)$  corta o eixo  $x$ ?

A reta paralela à reta de equação  $5x - 3y + 1 = 0$  tem equação na forma geral

$$5x - 3y + c = 0.$$

Se ela passa pelo ponto  $(1, 4)$ , o valor de  $c$  deve ser tal que:

$$5 \times 1 - 3 \times 4 + c = 0, \text{ isto é: } c = 7.$$

Ora, a reta de equação  $5x - 3y + 7 = 0$  corta o eixo  $x$  no ponto em que  $y = 0$  e o valor de  $x$  é tal que:

$$5x + 7 = 0 \text{ ou } x = -\frac{7}{5} = -1,4.$$

O ponto em que essa reta corta o eixo  $x$  é, portanto, o ponto  $(-1,4; 0)$ .

