Reforço escolar • Matemática •

Nem início, nem fim!

Dinâmica 7

3ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Geométrico.	Geometria Analítica.

Aluno

Primeira Etapa

Compartilhar idéias

Atividade • Qual o tamanho da pizza?

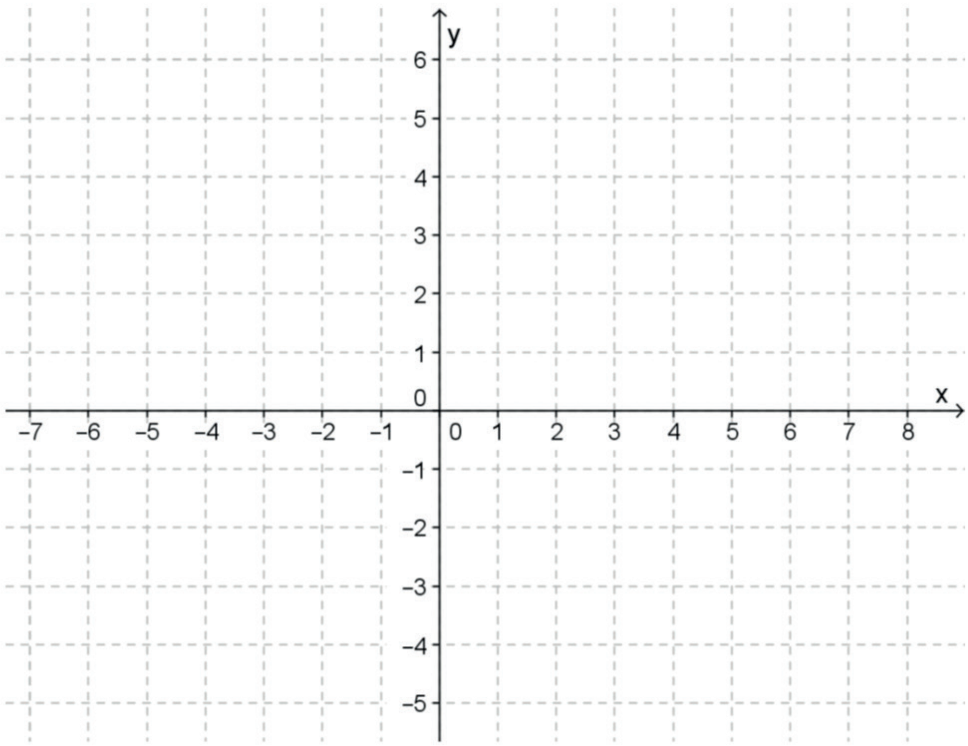
Questão

Você vai receber de seu professor as coordenadas de um ponto no plano cartesiano. Procure, dentre seus colegas, aqueles que receberam pontos que estão à mesma distância da origem que o seu.

Com esses colegas, você vai formar um grupo e responder às questões seguintes:

a. Localize cada ponto do seu grupo no sistema cartesiano a seguir:

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj



b. Desenhe, nesse mesmo sistema, todos os pontos que estejam à mesma distância da origem que os pontos do seu grupo.

c. Que figura você desenhou? Quais são seus elementos?

d. Um ponto (x, y) deve ser localizado nesta figura. Qual o "comando" algébrico a que x e y devem satisfazer a fim de que este ponto esteja nesta figura? Por quê?

e. Marque, no mesmo sistema de coordenadas, os pontos A = (0,5; 0,3) e o ponto B = (– 6, 0) e responda se estão sobre a figura que você desenhou, dentro ou fora dela.

f. Que cálculos você poderia fazer com as coordenadas do ponto A e as do ponto B para responder à pergunta anterior sobre a localização de cada um deles?

Você acabou de ver um exemplo de figuras que podem ser descritas por relações algébricas e de cálculos entre coordenadas que dão informações sobre localização de objetos, mesmo sem que se possa "enxergá-los".

Essas observações estão na base, bem no comecinho, dos procedimentos que permitem a realização de cirurgias a distância, a construção de efeitos especiais em filmes, por exemplo. Infelizmente, são esses mesmos procedimentos que permitem a realização de bombardeios a grandes distâncias!

Cabe a você escolher como usá-los.

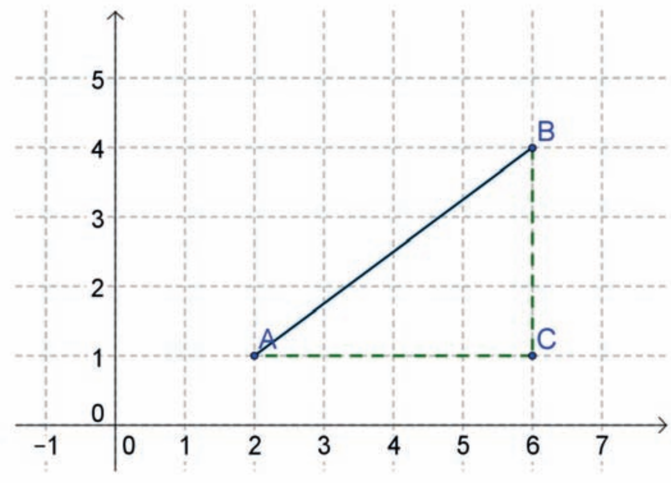
Segunda Etapa

Um novo olhar ...

Atividade • Cirandando...

Questão 1

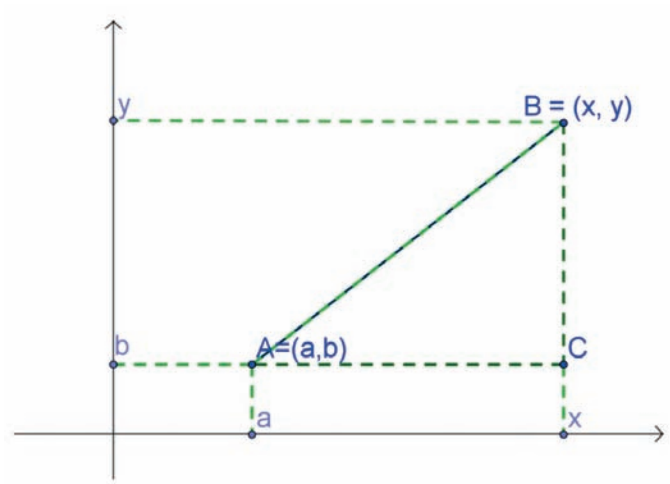
a. Na etapa anterior, você calculou a distância de um ponto à origem. Agora, você vai rever como pode calcular a distância de um ponto a outro. Comece por um exemplo numérico, calculando a distância entre os pontos A = (2, 1) e B = (6, 4):



"Dica": *Aplique o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo* ACB.

Matemática

b. Calcule a distância d entre os pontos A = (a, b) e B = (x, y).



"Dica": *Observe o triângulo retângulo* ACB*, em que* C = (x, b)*, e comece por calcular a medida de cada um dos catetos em função de* a, b*,* x *e* y.

Questão 2

Considere, agora, a circunferência de centro no ponto A = (1, 2) e raio r igual ao raio da circunferência que seu grupo estudou na Primeira Etapa. Se P = (x, y) é um ponto dessa circunferência, qual a relação algébrica que deve ser satisfeita pelas coordenadas de P? Por enquanto, você não deve desenvolver os quadrados dos binômios que você vai encontrar.

Aluno

Você acaba de obter o que se chama **equação reduzida** da circunferência que seu grupo estudou.

Essa foi uma circunferência particular, pois foi dado o seu centro e o seu raio.

Questão 3

Escreva agora a **equação reduzida** de uma circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$. Para isso, considere um ponto $P = (x, y)$ e encontre a relação que deve existir entre suas coordenadas para que ele pertença a essa circunferência.

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • As alianças de um matemático!

Questão

Um ourives recebeu de um matemático a seguinte encomenda de alianças:

Por favor, faça um par de alianças, a da minha noiva satisfazendo à equação:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

e a minha satisfazendo a:

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0,$$

com x e y em centímetros.

A sorte do ourives é que o filho dele, Ouromar, estava na 3ª série do Ensino Médio. Ouromar leu essas equações e ficou atrapalhado. Estas não são equações reduzidas de circunferências. Será que elas são mesmo equações de circunferências? E, se forem, como calcular o tamanho de cada uma delas? Quais são seus raios?

Você vai ajudar Ouromar a desvendar essas questões, em alguns passos.

1º passo: Desenvolva a equação reduzida da circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$, que você encontrou na Segunda Etapa.

<u>2º passo</u>: Escreva essa mesma equação, com os termos em ordem decrescente do grau e com segundo membro igual a 0.

<u>3º passo</u>: Você obteve uma equação geral da circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$. Voltando às alianças, Ouromar viu que bastava comparar a equação dada com a fórmula que ele acabava de aprender. Faça você essa comparação e dê o raio que deve ter a aliança da noiva.

<u>4º passo</u>: Ouromar não soube fazer o mesmo com a aliança do noivo, pois a equação não começava por $x^2 + y^2$, como a equação geral que ele já conhecia. Foi, então, procurar o professor de Matemática que lhe respondeu:

– Veja, a equação geral da circunferência que você conhece tem o segundo membro igual a 0. Você pode, então, multiplicar ou dividir o primeiro membro dessa equação por qualquer número diferente de 0, e suas soluções continuam as mesmas.

Faça você o que Ouromar deve fazer para encontrar o raio da aliança do noivo.

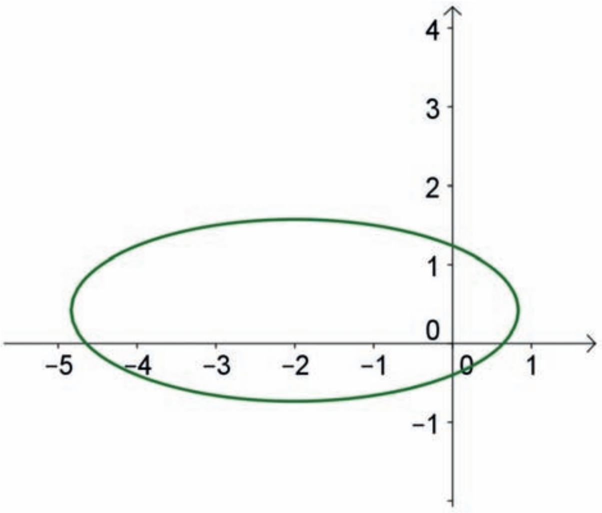
Na semana seguinte, o ourives recebeu uma encomenda de alianças satisfazendo às seguintes equações:

$$x^2 + 6y^2 + 4x - 5y - 3 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$$

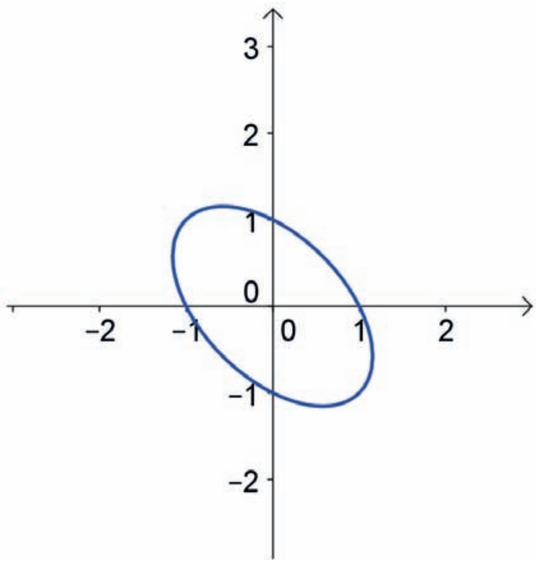
e foi ao Ouromar pedindo o valor do raio. Ouromar recorreu ao seu professor de novo e ouviu a seguinte explicação:

– Diga ao seu pai que isso é uma "pegadinha", pois essas não *são equações de uma circunferência. Com efeito, a primeira tem 1 como coeficiente de x^2 e 6 como coeficiente de y; você não consegue multiplicá-la por um número para passar a uma equação com $x^2 + y^2$, como é a equação geral na forma vista no 2º passo. E a segunda tem um termo xy, que também não aparece naquela equação.*

E o professor de Ouromar tinha razão. Veja os gráficos dessas equações, obtidos no *software* gratuito Geogebra:



$x^2 + 6y^2 + 4x - 5y - 3 = 0$



$x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$

Esta dinâmica, como você está vendo, tem início e fim. Por que, então, o seu título? O que é que não tem início nem fim?

É a circunferência! E dizem que é por isso que as alianças têm essa forma.

Quarta Etapa

Quiz

Questão:

Uma equação geral da circunferência de centro no ponto (– 2, 3) e que passa pelo ponto (1, – 3) é:

a. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

d. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

e. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 32 = 0$

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao Quiz

Etapa Flex

Para saber +

1. Para rever o assunto, você pode indicar ao seu aluno as duas partes da Aula 47, do Novo Telecurso para o Ensino Médio, que apresenta a equação da circunferência numa conversa entre operários e engenheiro durante uma obra em:

   http://www.youtube.com/watch?v=OxD2lUXHFus

   e

   http://www.youtube.com/watch?v=fG_iZfCEXhE

2. E para resolver mais alguns exercícios, seu aluno pode acessar

   - http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2012/12/exercicios-resolvidos-equacao-geral-da.html

   onde ele encontra também as resoluções.

Agora, é com você!

1. (*Saerjinho, 2ª série, 1º bimestre de 2011*) Observe as circunferências a seguir:

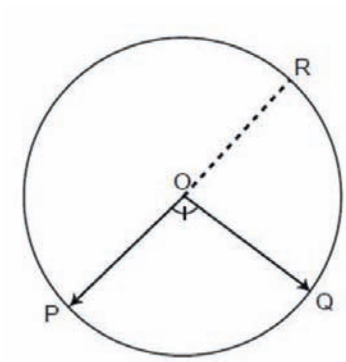


Figura 1

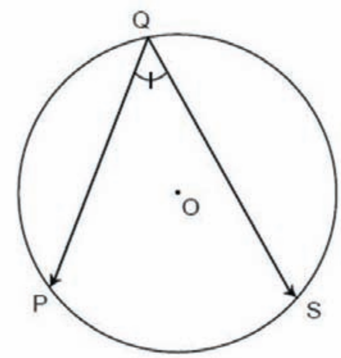


Figura 2

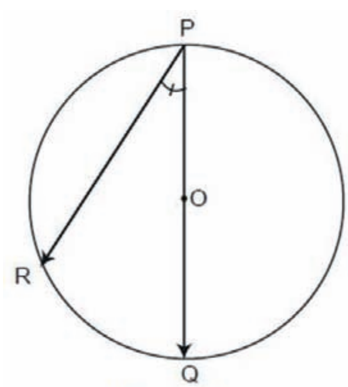


Figura 3

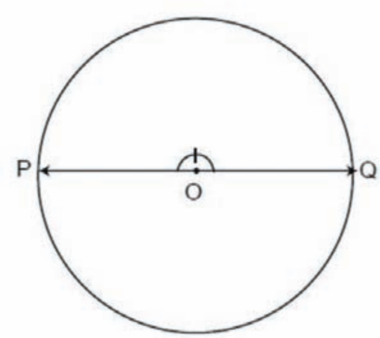


Figura 4

O segmento PQ é diâmetro nas circunferências:

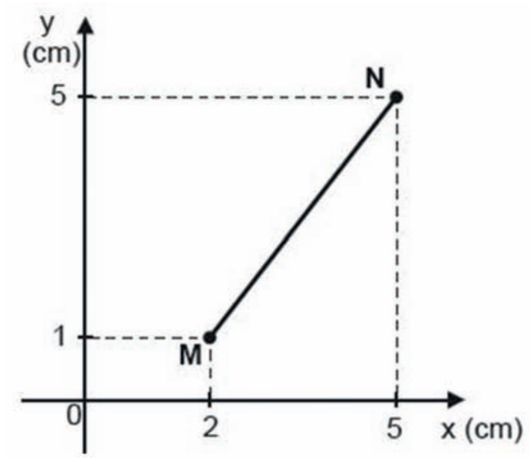
a. 1 e 2

b. 2 e 3

c. 3 e 4

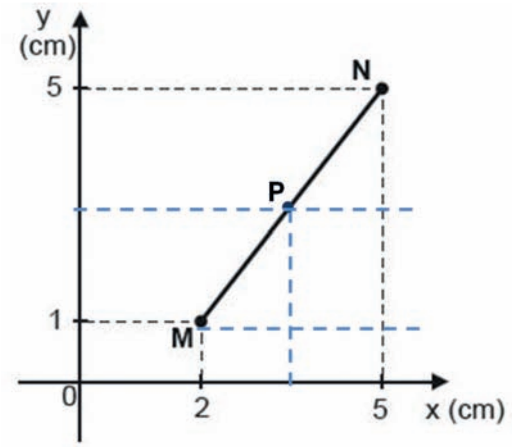
d. 4 e 2

2. (*Saerjinho, 3ª série, 3º bimestre de 2012; adaptada.*) Observe os pontos M e N no plano cartesiano a seguir:



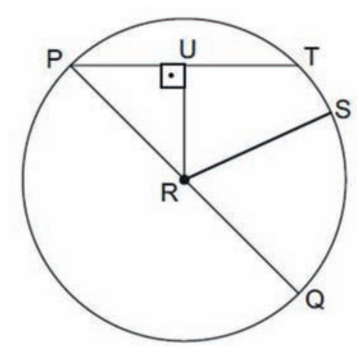
a. Qual é a medida do segmento MN?

b. Seja P o ponto médio do segmento MN. As coordenadas do ponto P são as médias aritméticas das coordenadas de M e de N, respectivamente. A abscissa de P é a média aritmética das abscissas de M e de N e a ordenada de P é a média aritmética das ordenadas de M e de N. (*Traçando paralelas aos eixos pelos pontos M, P e N, você vai poder usar o Teorema de Tales sobre os segmentos determinados em transversais por retas paralelas para verificar isso.*) Encontre as coordenadas de P.



c. Qual a equação da circunferência que contém os pontos M e N e tem centro em seu ponto médio?

3. (*Saerjinho, 2ª série, 3º bimestre de 2011.*) A medida do raio da circunferência a seguir é 10 cm e seu centro é R.



Qual é a medida do segmento PQ?

a. 5 cm

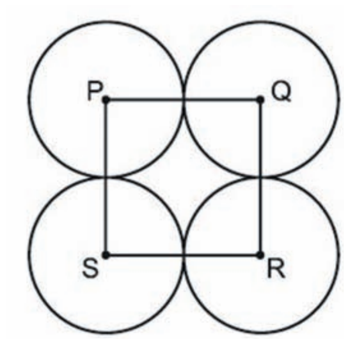
b. 10 cm

c. 15 cm

d. 20 cm

e. 60 cm

4. (*Saerjinho, 1ª série, 1º bimestre de 2011.*) Os vértices P, Q, R e S do quadrado a seguir correspondem aos centros de quatro circunferências iguais e tangentes.



Aluno

Sabendo que o lado desse quadrado mede 2 cm, qual é a medida do raio de cada uma dessas circunferências?

a. 1 cm

b. 2 cm

c. 4 cm

d. 8 cm

e. 10 cm

5. (*FUVEST, 1991 – adaptada*) As extremidades de um diâmetro de uma circunferência são (– 3, 1) e (5, – 5).