Reforço escolar · Matemática ·

Professor

Nem início, nem fim!

Dinâmica 7

3ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Geométrico.	Geometria Analítica.

DINÂMICA	Nem inicio, nem fim.
HABILIDADE BÁSICA	H16 – Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano.
HABILIDADE PRINCIPAL	H09 – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.
CURRÍCULO MÍNIMO	Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Qual o tamanho da pizza?	15 a 25 min.	Em grupos de 5.	Individual
2	Um novo olhar...	Cirandando...	20 a 25 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
3	Fique por dentro!	As alianças de um matemá-tico!	20 a 25 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Apresentação

Esta dinâmica tem o objetivo de estudar equações da circunferência. Ela tem início com o sorteio de 20 pontos pertencentes a 5 circunferências, com centro na origem do plano cartesiano. Os estudantes que recebam pontos da mesma circunferência com centro na origem formarão um grupo. Esta atividade provoca a introdução da equação reduzida de uma circunferência com centro na origem. Em seguida, passa-se a circunferências com centros diferentes da origem , ainda com coordenadas numéricas. Para concluir, considera-se o centro como um ponto qualquer, generalizando o que tiver sido visto anteriormente. A equação da forma geral é estudada com a ajuda de um ourives e de seu filho.

Como nas demais dinâmicas, você, professor, pode administrar a margem de duração que é deixada em cada etapa.

Primeira Etapa

Compartilhar idéias

Atividade • Qual o tamanho da pizza?

25 MINUTOS

Objetivo

Calcular o raio de uma circunferência a partir do cálculo da distância de um ponto à origem.

Descrição da atividade

Você vai entregar a cada aluno as coordenadas de um ponto. Os grupos serão formados pelos alunos que receberem pontos que estejam à mesma distância da origem. Formados os grupos, eles passam a responder às questões propostas.

São os seguintes os pontos que pertencem à circunferência de cada um dos grupos:

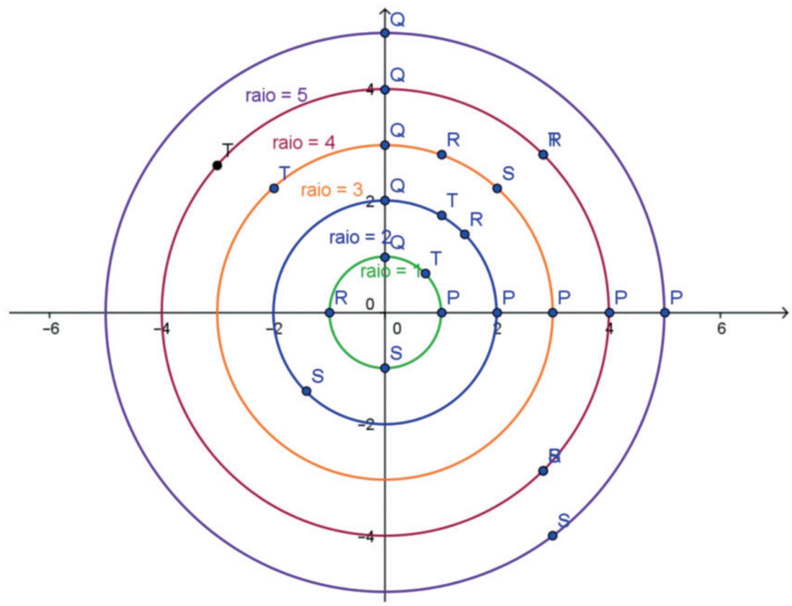
raio = distância à origem	Ponto P	Ponto Q	Ponto R	Ponto S	Ponto T
1	(1, 0)	(0, 1)	(– 1, 0)	(0, – 1)	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
2	(2, 0)	(0, 2)	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(1, \sqrt{3})$
3	(3, 0)	(0, 3)	$(1, \sqrt{8})$	$(2, \sqrt{5})$	$(-2, \sqrt{5})$
4	(4, 0)	(0, 4)	$(\sqrt{8}, \sqrt{8})$	$(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$	$(-3, \sqrt{7})$
5	(5, 0)	(0, 5)	(4, 3)	(3, – 4)	$(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

Questão

Você vai receber de seu professor as coordenadas de um ponto no plano cartesiano. Procure, dentre seus colegas, aqueles que receberam pontos que estão à mesma distância da origem que o seu.

Com esses colegas, você vai formar um grupo e responder às questões seguintes:

a. Localize cada ponto do seu grupo no sistema cartesiano a seguir:



b. Desenhe, nesse mesmo sistema, todos os pontos que estejam à mesma distância da origem que os pontos do seu grupo.

c. Que figura você desenhou? Quais são seus elementos?

Resposta

Espera-se que o estudante perceba que esse conjunto de pontos é uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1, 2, 3, 4 ou 5, conforme o grupo a que ele pertença.

d. Um ponto (x, y) deve ser localizado nesta figura. Qual o "comando" algébrico a que x e y devem satisfazer a fim de que este ponto esteja nesta figura? Por quê?

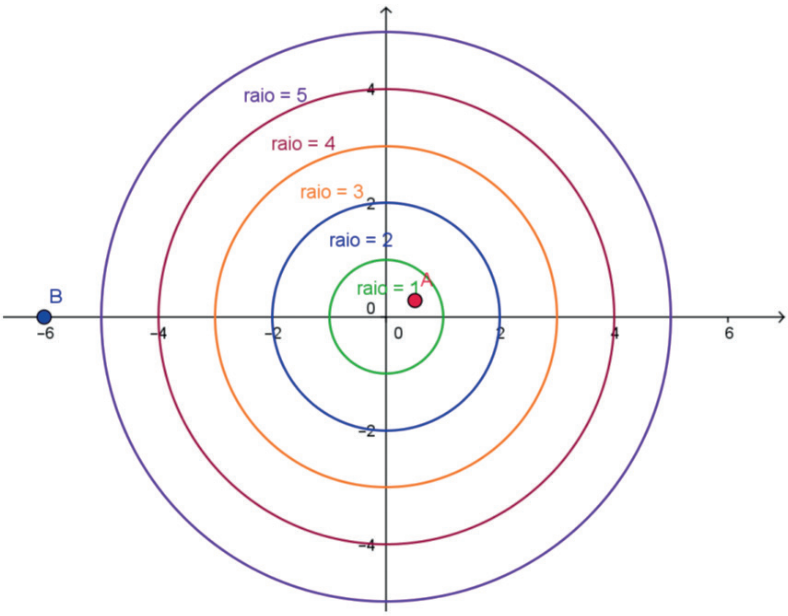
Resposta

$x^2 + y^2 = r^2$, onde r = 1, 2, 3, 4 ou 5, conforme o grupo que esteja respondendo. Espera-se que ele responda que a figura é o conjunto dos pontos que estão a distância r da origem e que o quadrado dessa distância é igual a $x^2 + y^2$ pelo Teorema de Pitágoras.

e. Marque, no mesmo sistema de coordenadas, os pontos A = (0,5; 0,3) e o ponto B = (– 6, 0) e responda se estão sobre a figura que você desenhou, dentro ou fora dela.

Resposta

Qualquer que seja o grupo, o ponto A será interior à circunferência desenhada e o ponto B será exterior.



• • • • •

f. Que cálculos você poderia fazer com as coordenadas do ponto A e as do ponto B para responder à pergunta anterior sobre a localização de cada um deles?

Resposta

Espera-se que o aluno responda que o cálculo a ser feito é o da distância do ponto à origem, cujo quadrado, no caso do ponto A é:

$(0,5)^2 + (0,3)^2 = 0,25 + 0,09 = 0,34 < 1$

e, portanto, menor do que o quadrado de qualquer um dos raios em questão. Logo, esta distância (que é positiva) é menor do que o raio de qualquer uma das circunferências, o que mostra que o ponto A está no interior de todas elas. No caso do ponto B, o quadrado dessa distância é:

$(-6)^2 + 0^2 = 36 > 25 = 5^2$

e, portanto, maior do que o quadrado de qualquer um dos raios em questão. Logo, esta distância (que é positiva) é maior do que o raio de qualquer uma das circunferências, o que mostra que o ponto B está no exterior de todas elas.

Você acabou de ver um exemplo de figuras que podem ser descritas por relações algébricas e de cálculos entre coordenadas que dão informações sobre localização de objetos, mesmo sem que se possa "enxergá-los".

Essas observações estão na base, bem no comecinho, dos procedimentos que permitem a realização de cirurgias a distância, a construção de efeitos especiais em filmes, por exemplo. Infelizmente, são esses mesmos procedimentos que permitem a realização de bombardeios a grandes distâncias!

Cabe a você escolher como usá-los.

Recursos necessários:

- Encarte do Aluno.
- Cartões para recorte.
- Compassos para os alunos e para a lousa, se possível.

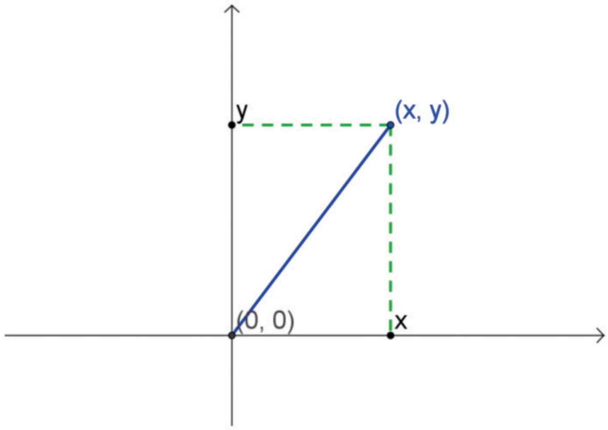
Professor

Procedimentos Operacionais

- *Esta atividade tem início com a distribuição de um cartão para cada aluno. É sempre recomendável que os cartões sejam recortados com antecedência. Como sempre, foram preparadas fichas para 25 alunos, com 5 pontos em cada uma das 5 circunferências. Se o número de alunos for outro, você pode adaptar modificando o número de pontos em cada circunferência ou mesmo eliminando alguma circunferência, o que não vai alterar o desenvolvimento das atividades.*
- *Há um local no Encarte do Aluno em que ele poderá esboçar os desenhos solicitados. Se houver oportunidade, porém, será bom que haja uma réplica desse sistema de coordenadas na lousa para que cada grupo faça o seu desenho no mesmo sistema e a classe possa comparar os resultados.*
- *Como em outras situações, o ideal é que a correção seja feita nos grupos, mas, se isso não for possível, a correção será feita coletivamente.*
- *Se for difícil conseguir compasso para alunos ou lousa, o desenho pode ser feito tirando algumas medidas em diferentes direções e completado à mão livre.*

Professor:

- *Esta atividade começa pelo cálculo da distância à origem de um ponto do plano dado por suas coordenadas. Talvez seja preciso fazer uma figura na lousa com essa informação. Algo como a figura a seguir:*



e sugerir o uso do Teorema de Pitágoras ao triângulo de catetos x, y, cuja hipotenusa dá a distância d do ponto (x, y) à origem. Isso leva à igualdade: $d^2 = x^2 + y^2$.

- *Com, ou sem compasso, é importante que o aluno perceba que o que está em jogo é a distância dos pontos ao ponto fixo que, no caso, é a origem.*
- *A observação final trata da possibilidade de analisar uma propriedade geométrica, como, por exemplo, a localização relativa de ponto e curva, por meio de relações algébricas. Este é um exemplo muito simples de uma situação bem mais geral.*

Segunda Etapa
Um novo olhar ...

Atividade • Cirandando...

Objetivo

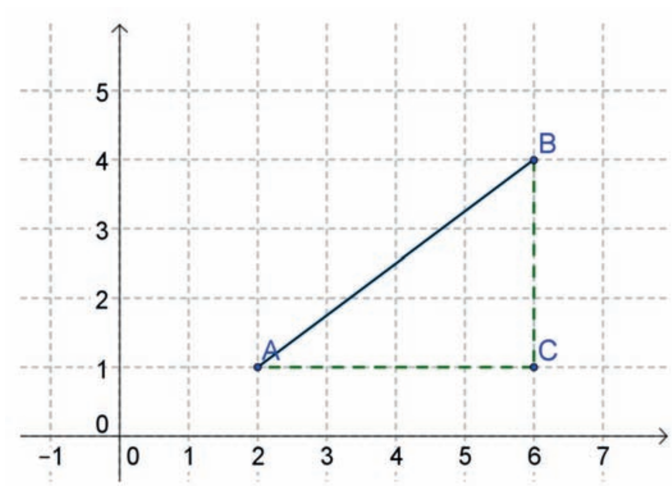
Escrever a equação reduzida de uma circunferência.

Descrição da atividade:

Nesta etapa, os mesmos grupos vão escrever a equação reduzida de uma circunferência com centro num ponto diferente da origem. Antes, porém, vão rever a fórmula que dá a distância entre dois pontos do plano, dados por suas coordenadas.

Questão 1

a. Na etapa anterior, você calculou a distância de um ponto à origem. Agora, você vai rever como pode calcular a distância de um ponto a outro. Comece por um exemplo numérico, calculando a distância entre os pontos A = (2, 1) e B = (6, 4):



"Dica": *Aplique o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo* ACB.

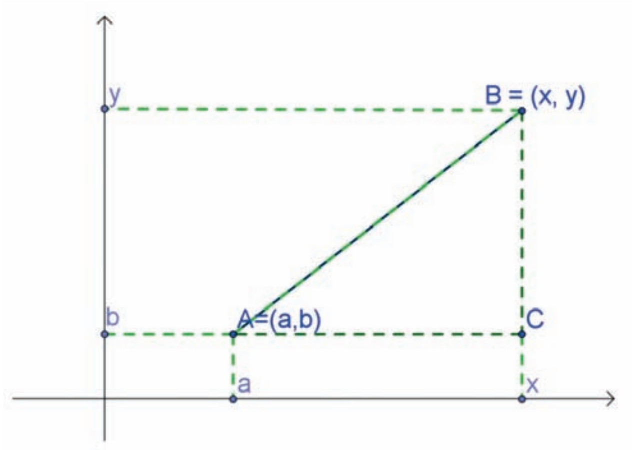
Resposta

Observando o quadriculado, o aluno pode ver que os catetos do triângulo retângulo ACB medem 4 e 3 unidades. Logo, sua diagonal AB deve medir d, com:

$d^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25.$

O valor de d é, portanto, 5.

b. Calcule a distância d entre os pontos A = (a, b) e B = (x, y).



"Dica": *Observe o triângulo retângulo* ACB, *em que* C = (x, b), *e comece por calcular a medida de cada um dos catetos em função de* a, b, x *e* y.

Resposta

O que se espera do aluno é que ele perceba que a medida do cateto AC é x – a e a do cateto CB é y – b. Sendo assim, a distância d entre A e B, que é também a medida da hipotenusa AB, pode ser calculada a partir de:

$d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ *ou* $d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

• • • • •

Questão 2

Considere, agora, a circunferência de centro no ponto A = (1, 2) e raio r igual ao raio da circunferência que seu grupo estudou na Primeira Etapa. Se P = (x, y) é um ponto dessa circunferência, qual a relação algébrica que deve ser satisfeita pelas coordenadas de P? Por enquanto, você não deve desenvolver os quadrados dos binômios que você vai encontrar.

Resposta

Cada grupo deve escrever uma equação, pois estão sendo propostas circunferências de mesmo centro, mas raios diferentes. As equações devem ser as seguintes, dependendo do grupo:

raio	equação
1	(x – 1)2 + (y – 2)2 = 1
2	(x – 1)2 + (y – 2)2 = 4
3	(x – 1)2 + (y – 2)2 = 9
4	(x – 1)2 + (y – 2)2 = 16
5	(x – 1)2 + (y – 2)2 = 25

• • • • •

Você acaba de obter o que se chama **equação reduzida** da circunferência que seu grupo estudou.

Essa foi uma circunferência particular, pois foi dado o seu centro e o seu raio.

Questão 3

Escreva agora a **equação reduzida** de uma circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$. Para isso, considere um ponto P = (x, y) e encontre a relação que deve existir entre suas coordenadas para que ele pertença a essa circunferência.

Resposta

Se o ponto P = (x, y) pertence a essa circunferência, então sua distância ao centro (a, b) deve ser igual a r, logo: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

E, vice – versa, se os números x e y satisfazem à equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, *então o ponto P = (x, y) está a uma distância igual a r do ponto (a, b) e, portanto, pertence à circunferência de centro (a, b) e raio r.*

Isto significa que

(x – a)2 + (y – b)2 = r2

é uma equação da circunferência de centro (a, b) e raio r > 0.

Essa equação é dita a equação reduzida da circunferência de centro (a, b) e raio r.

• • • • •

Professor

Recursos necessários:

- Encarte do Aluno.

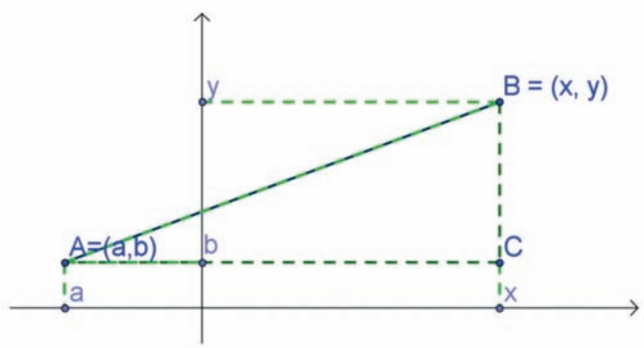
Procedimentos Operacionais

- *Os alunos devem manter-se nos mesmos grupos, porque estas questões são continuação da questão da etapa anterior, em que havia diferenças entre os dados numéricos dos vários grupos.*
- *Na primeira etapa, ficou a seu cargo a revisão do cálculo da distância entre um ponto e a origem, a fim de que os alunos pudessem encontrar seus companheiros de grupo, antes mesmo de começar a trabalhar no assunto. Nesta etapa, com os grupos já formados, a revisão do cálculo da distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano é deixada a cargo do aluno, com as dificuldades graduadas em dois passos, do numérico ao literal, e atenuadas com "dicas".*

Intervenção Pedagógica

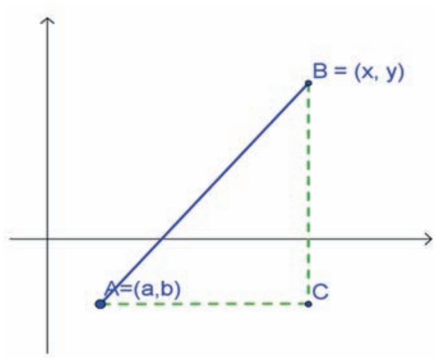
Professor:

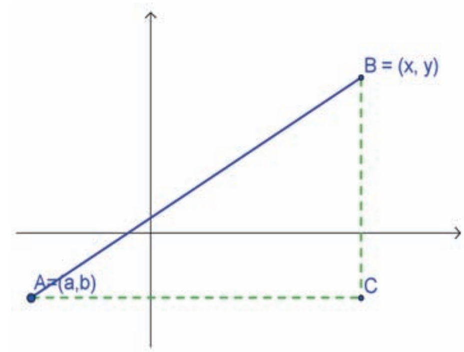
- *Prevendo dificuldades dos alunos trabalharem com coordenadas negativas, a posição dos pontos no cálculo da distância foi favorável, o que torna o raciocínio muito particular. Talvez seja o caso de chamar a atenção para a aplicação geral dessa fórmula, mesmo em outros casos, envolvendo coordenadas negativas. O problema se complica, por exemplo, quando $a < 0$.*



Pela figura, o estudante percebe que deve "somar" valores, mas o sinal na fórmula permanece o sinal de menos. É ainda muito difícil para o nosso aluno perceber que $-a$ é positivo quando a seja negativo. Situação análoga se dá quando $b < 0$.

Outras situações podem ocorrer que aumentam a dificuldade de perceber a validade da mesma regra, como por exemplo:





Fica a seu critério levantar, ou não, esse problema coletivamente. Algum estudante mais curioso, porém, pode pedir explicações mais gerais, caso que merece uma análise mais detalhada das diversas situações possíveis.

- *Uma observação importante quando se deduz uma equação de uma curva é que há necessidade de examinar a relação em dois sentidos. É importante verificar que, se o ponto está na curva, suas coordenadas satisfazem à equação e, reciprocamente, se um ponto tem coordenadas que satisfaçam à equação, então este ponto está na curva. Alguns livros didáticos deduzem a expressão da equação e param aí. Provam só a primeira relação, mas não provam a segunda parte.*

Terceira Etapa
Fique por dentro!

Atividade • As alianças de um matemático!

25 MINUTOS

Objetivo

Escrever uma equação geral de uma circunferência.

Descrição da atividade

O objetivo desta etapa é a determinação de uma equação geral da circunferência. A título de despertar a curiosidade do estudante, vamos usar a encomenda estranha das alianças para um casamento. O problema proposto ao ourives era o de desvendar o raio das alianças encomendadas.

Questão

Um ourives recebeu de um matemático a seguinte encomenda de alianças:

Por favor, faça um par de alianças, a da minha noiva satisfazendo à equação:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

e a minha satisfazendo a:

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0,$$

com x e y em centímetros.

A sorte do ourives é que o filho dele, Ouromar, estava na 3ª série do Ensino Médio. Ouromar leu essas equações e ficou atrapalhado. Estas não são equações reduzidas de circunferências. Será que elas são mesmo equações de circunferências? E, se forem, como calcular o tamanho de cada uma delas? Quais são seus raios?

Você vai ajudar Ouromar a desvendar essas questões, em alguns passos.

1º passo: Desenvolva a equação reduzida da circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$, que você encontrou na Segunda Etapa.

Resposta

O aluno deve, portanto, partir da equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ e desenvolver os quadrados: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$.

• • • • •

2º passo: Escreva essa mesma equação, com os termos em ordem decrescente do grau e com segundo membro igual a 0.

Resposta

O aluno deve chegar à seguinte forma dessa equação:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$

• • • • •

3º passo: Você obteve uma equação geral da circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$. Voltando às alianças, Ouromar viu que bastava comparar a equação dada com a fórmula que ele acabava de aprender. Faça você essa comparação e dê o raio que deve ter a aliança da noiva.

Resposta

Ao comparar as duas equações,

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad e \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$,

o aluno vai perceber que, se os coeficientes de x2 e de y2 são os mesmos nas duas equações, os demais devem ser também os mesmos. Vai, então, encontrar as seguintes relações entre os demais coeficientes:

$-2a = 4 \;;\; -2b = -2 \quad e \quad a^2 + b^2 - r^2 = 4.$

Donde se tira: $a = -2 \;;\; b = 1$ *e* $4 + 1 - r^2 = 4$ *ou* $r^2 = 1$ *e, como* $r > 0$*, a resposta é que o raio da aliança da noiva deve ser igual a 1 cm (Gorda noiva!).*

• • • • •

<u>4º passo</u>: Ouromar não soube fazer o mesmo com a aliança do noivo, pois a equação não começava por $x^2 + y^2$, como a equação geral que ele já conhecia. Foi, então, procurar o professor de Matemática que lhe respondeu:

– Veja, a equação geral da circunferência que você conhece tem o segundo membro igual a 0. Você pode, então, multiplicar ou dividir o primeiro membro dessa equação por qualquer número diferente de 0, e suas soluções continuam as mesmas.

Faça você o que Ouromar deve fazer para encontrar o raio da aliança do noivo.

Resposta

O problema será reduzido ao caso anterior, se o primeiro membro da equação for dividido por 4:

$4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0$ *se transforma em:* $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$

e, agora, é possível identificar os coeficientes com a equação geral obtida na etapa anterior:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad e \quad x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$

dando:

$-2a = 1 \;;\; -2b = -2 \quad e \quad a^2 + b^2 - r^2 = -1$

e, daqui:

$a = -\frac{1}{2} \;;\; b = 1 \;\; e \;\; (\frac{1}{2})2 + 1 - r^2 = -1$ *, donde se tira:* $\frac{1}{4} + 1 + 1 = r^2$ *ou* $r^2 = \frac{9}{4}$

e, como $r > 0$*,* $r = \frac{3}{2}$ *ou* $r = 1{,}5$.

E a aliança do noivo tem 1,5 cm de raio (Noivo gordo também!).

• • • • •

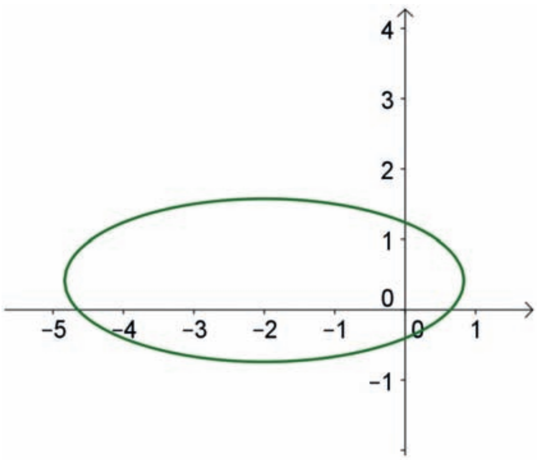
Na semana seguinte, o ourives recebeu uma encomenda de alianças satisfazendo às seguintes equações:

$$x^2 + 6y^2 + 4x - 5y - 3 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$$

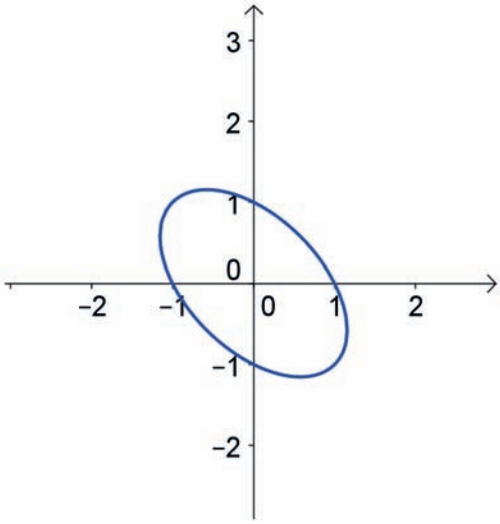
e foi ao Ouromar pedindo o valor do raio. Ouromar recorreu ao seu professor de novo e ouviu a seguinte explicação:

– Diga ao seu pai que isso é uma "pegadinha", pois essas não *são equações de uma circunferência. Com efeito, a primeira tem 1 como coeficiente de x^2 e 6 como coeficiente de y; você não consegue multiplicá-la por um número para passar a uma equação com $x^2 + y^2$, como é a equação geral na forma vista no 2º passo. E a segunda tem um termo xy, que também não aparece naquela equação.*

E o professor de Ouromar tinha razão. Veja os gráficos dessas equações, obtidos no *software* gratuito Geogebra:



$x^2 + 6y^2 + 4x - 5y - 3 = 0$



$x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$

Esta dinâmica, como você está vendo, tem início e fim. Por que, então, o seu título? O que é que não tem início nem fim?

É a circunferência! E dizem que é por isso que as alianças têm essa forma.

Recursos necessários:

- Encarte do Aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Os grupos devem continuar os mesmos e os cálculos devem ser discutidos no grupo e registrados individualmente.*
- *O acompanhamento da história das encomendas das alianças, conforme o tamanho da turma, será mais rápido e eficiente se for feito coletivamente, entremeando os intervalos para os cálculos.*

Intervenção Pedagógica

Professor,

- *O cálculo das distâncias de dois pontos foi revisto nesta dinâmica. Um outro pré-requisito para esta etapa é o desenvolvimento do quadrado de um binômio. Este desenvolvimento foi revisto em dinâmica recente. Se for necessária, fica a seu cargo fazer esta revisão no grupo que precisar ou, se for o caso, coletivamente.*
- *O contexto utilizado é completamente fictício e inverossímil. Foi usado aqui para quebrar um pouco a rigidez do tema.*
- *Analogamente ao caso das equações da reta, a equação reduzida de uma circunferência é uma só, mas a equação geral, por ter o segundo membro igual a 0, pode ser qualquer uma obtida de outra pela multiplicação por um número real diferente de 0.*
- *A determinação do centro e do raio da circunferência a partir de uma equação geral não consta do currículo mínimo, por isso foi só feita aqui por identificação de coeficientes. Uma alternativa seria o completamento de quadrados como está feito na Etapa Flex deste Encarte.*

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão:

Uma equação geral da circunferência de centro no ponto (– 2, 3) e que passa pelo ponto (1, – 3) é:

a. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

d. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

e. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 32 = 0$

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

O aluno pode perceber que se a circunferência tem centro em (– 2, 3) e passa pelo ponto (1, – 3), seu raio r é a distância entre esses dois pontos. E, como foi revisto nesta dinâmica, o quadrado dessa distância é calculado por:

$r^2 = (-2-1)2 + [3-(-3)]^2 = (-3)^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45.$

A equação reduzida desta circunferência será, portanto:

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 45$ *que, desenvolvida dá:* $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 45 = 0$

ou: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3^2 = 0$ *e* ***a opção (e) é a correta****.*

Um outro modo de chegar a esta equação seria usar a informação de que o centro é o ponto (– 2, 3), o que já conta que o 1º membro da equação reduzida é

$(x+2)^2 + (y-3)^2.$

Sabendo que a circunferência passa pelo ponto (1, – 3), é possível calcular o 2º membro da equação reduzida por substituição das coordenadas desse ponto no 1º membro, já que o ponto pertence à circunferência. Fazendo, então, x = 1 e y = – 3, em $(x+2)^2 + (y-3)^2$*, obtém-se:* $(1+2)^2 + (-3-3)^2 = 9 + 36 = 45$ *e conclui-se que este é o 2º membro da equação reduzida. A partir daqui, o desenvolvimento é o mesmo. Observe que substituir as coordenadas do ponto pelo qual a circunferência passa no 1º membro da equação reduzida é o mesmo que calcular o quadrado do seu raio como distância do ponto ao centro. Pois foi assim que a equação reduzida foi obtida.*

Erros possíveis

Neste caso, os erros mais comuns são as trocas de sinal no caso das coordenadas negativas ou no desenvolvimento do quadrado dos binômios. As outras opções são resultantes de erros desse tipo.

Na opção (a), o primeiro membro foi calculado erradamente como se o centro da circunferência fosse (– 2, – 3), ao invés de (– 2, 3), como pede o problema:

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13.$$

Ora, se fosse este o 1º membro, o 2º membro da equação reduzida deveria ser:

$$1^2 + (-3)^2 + 4 \times 1 + 6\,(-3) + 13 = 1 + 9 + 4 - 18 + 13 = 9 \text{ e a equação seria}$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 9 \text{ ou } x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0, \text{ como em (a).}$$

Nas duas opções seguintes, o 1º membro da equação reduzida foi calculado erradamente como se o centro fosse no ponto (2, – 3), ao invés de (– 2, 3), como pede o problema:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13.$$

E, mesmo que fosse esse, o cálculo do 2º membro também apresentou erro de sinal na opção (c), pois, para x = 1 e y = – 3, esta expressão vale:

$$1^2 + (-3)^2 - 4 \times 1 + 6\,(-3) + 13 = 1 + 9 - 4 - 18 + 13 = 1, \text{ então, a equação deveria ser:}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0,$$

como está na opção (b) e não $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$, como está na opção (c).

Na opção (d), o 1º membro da equação reduzida foi calculado acertadamente

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13.$$

O erro ficou no cálculo do quadrado do raio que foi calculado como a distância do centro ao ponto (– 1, 3), ao invés do ponto (1, – 3), como pediu o problema:

$$(-1)^2 + (-3)^2 + 4\,(-1) - 6 \times 3 + 13 = 1 + 9 - 4 - 18 + 13 = 1 \text{ e}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 1 \text{ dá } x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0, \text{ como em (d).}$$

• • • • •

Etapa Flex

Para saber +

1. Uma primeira observação é sobre o processo de completar quadrados para achar centro e raio de uma circunferência dada por sua equação geral. No caso das alianças, por exemplo, dada a equação:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0 ,$$

os termos em x: $x^2 + 4x$ sugerem o quadrado de $(x + a)$, em que $4x$ seria o dobro do produto ax, logo $a = 2$; os termos em y: $y^2 - 2y$, pelo mesmo raciocínio sugerem o quadrado de $(y - 1)$. Ora,

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5$,

donde, o 1º membro da equação é:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = (x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5) - 5 + 4 =, (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 5 + 4$,

e a equação pode, então ser escrita como

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$ ou, na forma reduzida:

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$,

onde fica evidente que o centro dessa circunferência é o ponto $(-2, 1)$ e o raio é igual a $\sqrt{1} = 1$.

Analogamente, a equação da aliança do noivo, $4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0$ poderia ser simplificada para $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$ e "completada" como:

$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 - \frac{1}{4} - 1 - 1 = 0$ ou $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$,

o que deixa claro que o centro dessa circunferência é o ponto $(-\frac{1}{2}, 1)^2$ e o raio $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

2. Uma consequência importante do processo de completar quadrados é que fica clara a condição para que uma equação do 2º grau em x e y, em que os coeficientes de x^2 e de y^2 sejam iguais e diferentes de 0 e em que não haja termo em xy, seja a equação de uma circunferência. De fato, analogamente aos exemplos numéricos, a equação

$ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0$, pode ser escrita como:

$$(x + \frac{b}{a})^2 + (y + \frac{c}{a})^2 - (\frac{b}{a})^2 - (\frac{c}{a})^2 + \frac{d}{a} = 0$$

ou

$$(x + \frac{b}{a})^2 + (y + \frac{c}{a})^2 = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 - \frac{d}{a}$$

e, nessas condições fica claro que a distância de todos os pontos (x, y) que satisfazem a essa equação distam do ponto $(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a})$ a mesma distância r, em que

$r^2 = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 - \frac{d}{a}$.

Para que essa equação defina, de fato, uma circunferência, é preciso que r seja positivo (e, portanto, real positivo), donde se deve ter também $r^2 > 0$. Ora:

$$(\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 - \frac{d}{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 > \frac{d}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 > ad.$$

Esta última equivalência decorre do fato de que $a \neq 0$ e, portanto $a^2 > 0$ e a desigualdade multiplicada por a^2 mantém o sinal estrito.

A conclusão é que a equação:

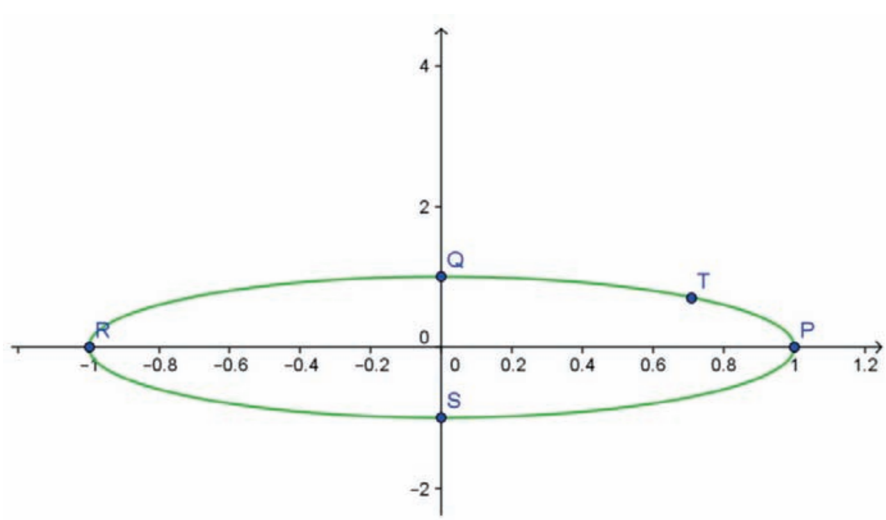
$ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0$, em que $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 > ad$

é equação de uma circunferência de centro $(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a})$ e

raio $r = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{d}{a}}$.

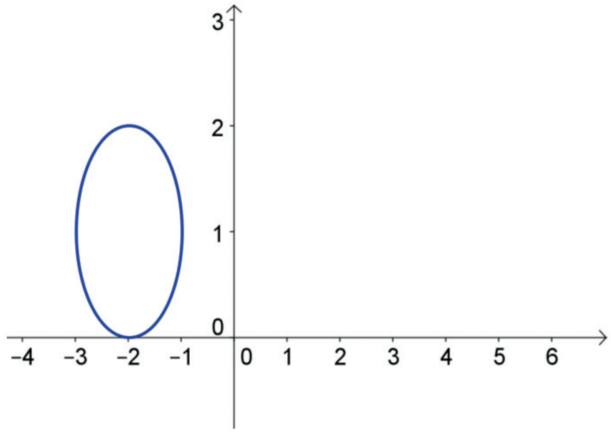
3. Uma outra observação importante é sobre as unidades nos eixos. A figura da circunferência está ligada à distância entre pontos no plano. Isto, em coordenadas, significa que os argumentos aqui utilizados são válidos quando a unidade nos dois eixos seja a mesma. Com efeito, vejamos o que acontece com o gráfico de algumas equações aqui estudadas em sistemas de coordenadas com unidades diferentes em cada um dos eixos.

A equação $x^2 + y^2 = 1$, num sistema cartesiano em que a unidade no eixo x seja igual a 5 vezes o comprimento da unidade no eixo y, tem o seguinte gráfico:



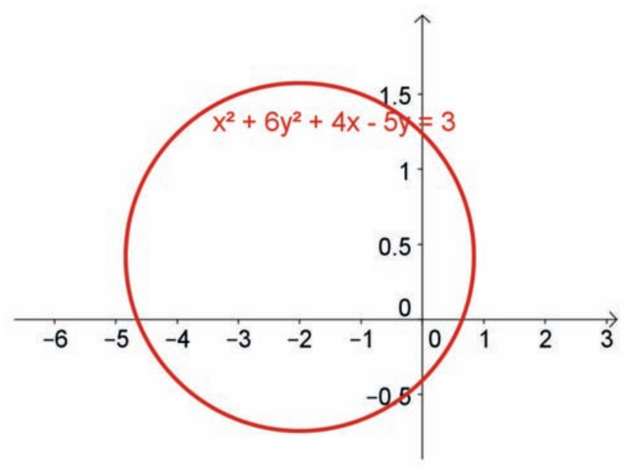
Professor

A aliança da noiva, num sistema de coordenadas em que a unidade no eixo y tivesse o dobro do comprimento da unidade no eixo x, teria a seguinte forma:



$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

Ou, o que era elipse, como a "pegadinha" que passaram no Ourives, pode virar uma circunferência por uma mudança de unidades nos eixos:



4. Para rever o assunto, você pode indicar ao seu aluno as duas partes da Aula 47, do Novo Telecurso para o Ensino Médio, que apresenta a equação da circunferência numa conversa entre operários e engenheiro durante uma obra em:

http://www.youtube.com/watch?v=OxD2lUXHFus

e

http://www.youtube.com/watch?v=fG_iZfCEXhE

5. E para resolver mais alguns exercícios, seu aluno pode acessar

- http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2012/12/exercicios-resolvidos-equacao-geral-da.html

onde ele encontra também as resoluções.

Agora, é com você!

1. (*Saerjinho, 2ª série, 1º bimestre de 2011*) Observe as circunferências a seguir:

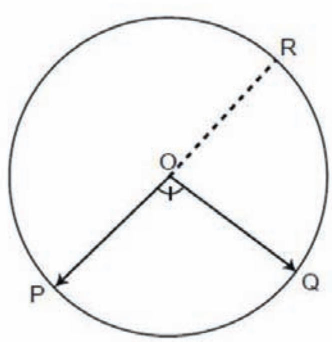


Figura 1

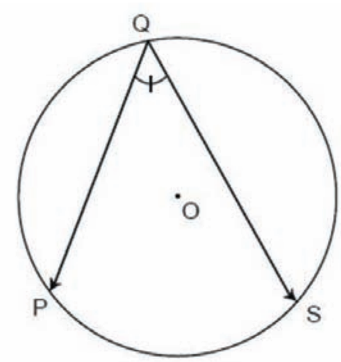


Figura 2

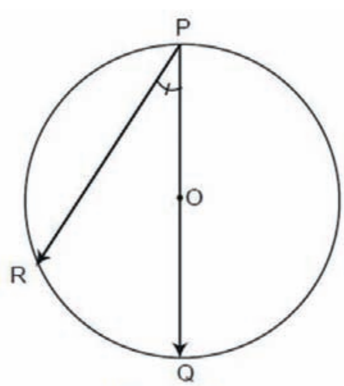


Figura 3

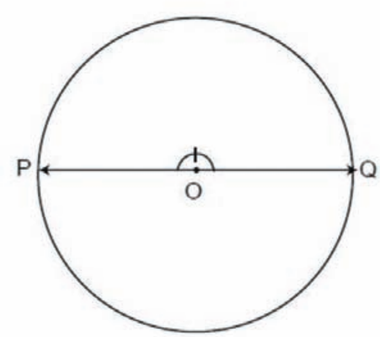


Figura 4

O segmento PQ é diâmetro nas circunferências:

a. 1 e 2

b. 2 e 3

c. 3 e 4

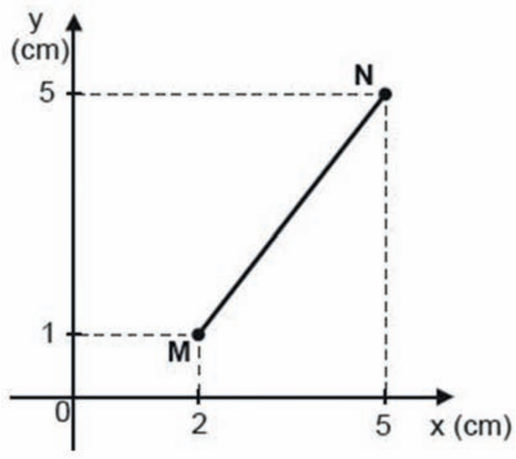
d. 4 e 2

Resposta

A opção correta é (c) porque em todas as circunferências os pontos P e Q são pontos da circunferência, mas só nas circunferências das figuras 3 e 4, o segmento PQ passa pelo centro.

• • • • •

2. (*Saerjinho, 3ª série, 3º bimestre de 2012; adaptada.*) Observe os pontos M e N no plano cartesiano a seguir:



a. Qual é a medida do segmento MN?

b. Seja P o ponto médio do segmento MN. As coordenadas do ponto P são as médias aritméticas das coordenadas de M e de N, respectivamente. A abscissa de P é a média aritmética das abscissas de M e de N e a ordenada de P é a média aritmética das ordenadas de M e de N. (*Traçando paralelas aos eixos pelos pontos M, P e N, você vai poder usar o Teorema de Tales sobre os segmentos determinados em transversais por retas paralelas para verificar isso.*) Encontre as coordenadas de P.

c. Qual a equação da circunferência que contém os pontos M e N e tem centro em seu ponto médio?

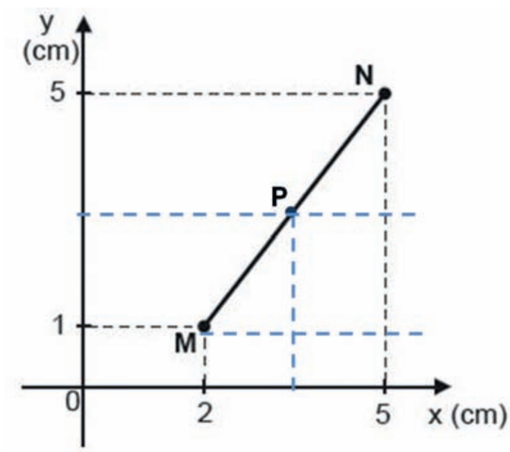
Resposta

a. A medida do segmento MN é igual à distância entre os pontos M e N e, pelo que foi visto, o quadrado dessa distância é:

$(5 – 2)^2 + (5 – 1)^2 = 9 + 16 = 25$, donde a medida procurada é igual a 5 cm.

Matemática

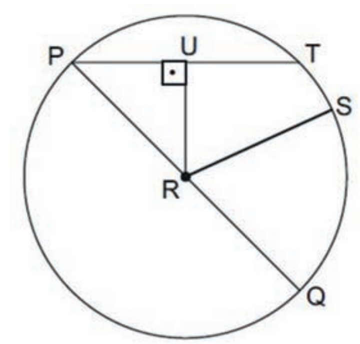
b. Traçando as paralelas aos eixos pelos pontos M, N e P, é possível verificar que, se P é o ponto médio do segmento MN, então os segmentos MP e PN têm a mesma medida. Então, as paralelas ao eixo y que passam pelos pontos M, N e P determinam segmentos iguais no eixo x e a abscissa do ponto P será também o número que está exatamente no meio entre 2 e 5; este número é a média aritmética entre 2 e 5: ou seja, se P = (a, b), a = $\frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$.



Analogamente, as paralelas ao eixo x determinam no eixo y segmentos de mesma medida e a ordenada de P deve estar exatamente no meio entre 1 e 5, logo $b = \frac{1+5}{2} = 3$. Isto é, P = ($\frac{7}{2}$; 3).

c. Pronto, agora, já temos o centro e o raio da circunferência que é a metade do seu diâmetro, calculado na parte (a). A circunferência tem centro em P = ($\frac{7}{2}$; 3) e raio igual a $\frac{5}{2}$, logo, sua equação reduzida é:$(x - \frac{7}{2})^2 + (y - 3)^2 = (\_)^2$ e uma equação geral é:$x2 - 7x + \frac{49}{4} + y2 - 6y + 9 - \frac{25}{4} = 0$ ou $4x2 + 4y2 - 28x - 24y + 60 = 0$.

3. (*Saerjinho, 2ª série, 3º bimestre de 2011.*) A medida do raio da circunferência a seguir é 10 cm e seu centro é R.



Qual é a medida do segmento PQ?

a. 5 cm

b. 10 cm

c. 15 cm

d. 20 cm

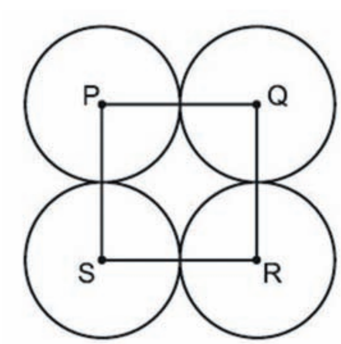
e. 60 cm

Resposta

A opção correta é (d), pois P e Q pertencem à circunferência e o segmento de extremidades P e Q passa pelo centro R. Logo PQ é um diâmetro e sua medida é o dobro do raio que mede 10 cm, logo a medida de PQ é 20 cm. Essa é, certamente, uma "pegadinha", pois há muita informação a mais na questão.

• • • • •

4. (*Saerjinho, 1ª série, 1º bimestre de 2011.*) Os vértices P, Q, R e S do quadrado a seguir correspondem aos centros de quatro circunferências iguais e tangentes.



Matemática

Sabendo que o lado desse quadrado mede 2 cm, qual é a medida do raio de cada uma dessas circunferências?

a. 1 cm

b. 2 cm

c. 4 cm

d. 8 cm

e. 10 cm

Resposta

A resposta correta é 1 cm, do item (a), pois. sendo tangentes às circunferências, os segmentos ligando os centros passam pelos pontos de tangência e, portanto, sendo 2 o lado do quadrado, o raio, que é a metade, é igual a 1.

• • • • •

5. (*FUVEST, 1991 – adaptada*) As extremidades de um diâmetro de uma circunferência são (– 3, 1) e (5, – 5).

Resposta

Embora com um enunciado ligeiramente diferente, esta questão é a mesma questão 2, já resolvida. Com efeito, dado um diâmetro, o centro da circunferência será o ponto médio desse diâmetro. O centro C desta circunferência será, portanto, o ponto de abscissa igual a $\frac{-3+5}{2} = 1$ *e ordenada igual a* $\frac{1+(-5)}{2} = -2$ *e o raio será a metade da distância entre os pontos (– 3, 1) e (5, – 5). O quadrado desta distância calcula-se como:* $(-3-5)^2 + [1-(-5)]^2 = 64 + 36 = 100$*. Logo, a distância é 10 e o raio é 5. A equação reduzida da circunferência é:*

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

e uma equação geral é:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$

• • • • •

Professor

Ponto P $(1, 0)$	**Ponto Q** $(0, 1)$	**Ponto R** $(-1, 0)$	**Ponto S** $(0, -1)$	**Ponto T** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Ponto P $(2, 0)$	**Ponto Q** $(0, 2)$	**Ponto R** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	**Ponto S** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	**Ponto T** $(1, \sqrt{3})$
Ponto P $(3, 0)$	**Ponto Q** $(0, 3)$	**Ponto R** $(1, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(2, \sqrt{5})$	**Ponto T** $(-2, \sqrt{5})$
Ponto P $(4, 0)$	**Ponto Q** $(0, 4)$	**Ponto R** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(\sqrt{8}, -\sqrt{\ })$	**Ponto T** $(-3, \sqrt{7})$
Ponto P $(5, 0)$	**Ponto Q** $(0, 5)$	**Ponto R** $(4, 3)$	**Ponto S** $(3, -4)$	**Ponto T** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

Ponto P (1, 0)	**Ponto Q** (0, 1)	**Ponto R** (– 1, 0)	**Ponto S** (0, – 1)	**Ponto T** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Ponto P (2, 0)	**Ponto Q** (0, 2)	**Ponto R** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	**Ponto S** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	**Ponto T** $(1, \sqrt{3})$
Ponto P (3, 0)	**Ponto Q** (0, 3)	**Ponto R** $(1, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(2, \sqrt{5})$	**Ponto T** $(-2, \sqrt{5})$
Ponto P (4, 0)	**Ponto Q** (0, 4)	**Ponto R** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$	**Ponto T** $(-3, \sqrt{7})$
Ponto P (5, 0)	**Ponto Q** (0, 5)	**Ponto R** (4, 3)	**Ponto S** (3, – 4)	**Ponto T** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

Ponto P $(1, 0)$	**Ponto Q** $(0, 1)$	**Ponto R** $(-1, 0)$	**Ponto S** $(0, -1)$	**Ponto T** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Ponto P $(2, 0)$	**Ponto Q** $(0, 2)$	**Ponto R** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	**Ponto S** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	**Ponto T** $(1, \sqrt{3})$
Ponto P $(3, 0)$	**Ponto Q** $(0, 3)$	**Ponto R** $(1, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(2, \sqrt{5})$	**Ponto T** $(-2, \sqrt{5})$
Ponto P $(4, 0)$	**Ponto Q** $(0, 4)$	**Ponto R** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$	**Ponto T** $(-3, \sqrt{7})$
Ponto P $(5, 0)$	**Ponto Q** $(0, 5)$	**Ponto R** $(4, 3)$	**Ponto S** $(3, -4)$	**Ponto T** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

Ponto P (1, 0)	**Ponto Q** (0, 1)	**Ponto R** (– 1, 0)	**Ponto S** (0, – 1)	**Ponto T** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Ponto P (2, 0)	**Ponto Q** (0, 2)	**Ponto R** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	**Ponto S** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	**Ponto T** $(1, \sqrt{3})$
Ponto P (3, 0)	**Ponto Q** (0, 3)	**Ponto R** $(1, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(2, \sqrt{5})$	**Ponto T** $(-2, \sqrt{5})$
Ponto P (4, 0)	**Ponto Q** (0, 4)	**Ponto R** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$	**Ponto T** $(-3, \sqrt{7})$
Ponto P (5, 0)	**Ponto Q** (0, 5)	**Ponto R** (4, 3)	**Ponto S** (3, – 4)	**Ponto T** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

Anexo I

Ponto P $(1, 0)$	**Ponto Q** $(0, 1)$	**Ponto R** $(-1, 0)$	**Ponto S** $(0, -1)$	**Ponto T** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Ponto P $(2, 0)$	**Ponto Q** $(0, 2)$	**Ponto R** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	**Ponto S** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	**Ponto T** $(1, \sqrt{3})$
Ponto P $(3, 0)$	**Ponto Q** $(0, 3)$	**Ponto R** $(1, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(2, \sqrt{5})$	**Ponto T** $(-2, \sqrt{5})$
Ponto P $(4, 0)$	**Ponto Q** $(0, 4)$	**Ponto R** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$	**Ponto S** $(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$	**Ponto T** $(-3, \sqrt{7})$
Ponto P $(5, 0)$	**Ponto Q** $(0, 5)$	**Ponto R** $(4, 3)$	**Ponto S** $(3, -4)$	**Ponto T** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$