Formação Continuada em MATEMÁTICA
Fundação CICIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3º ano – 3º Bimestre/2012

Plano de Trabalho

Números complexos

Tarefa: 3

Cursista: Roberto monteiro Barata

Tutor: Claudio Rocha de Jesus

Pré requisito: A noção de conjuntos, equação do 2º grau, plano cartesiano, noções de trigonometria.

Metodologia: Turma dividida em grupos de dois alunos, trabalho em grupo e avaliação também em grupo. Aula em laboratório de informática com o uso do geogebra.

Avaliação: Sempre feita ao final de cada aula, e no final do bimestre com uma prova.

Introdução

A construção dos números complexos passou por diversos obstáculos, que levaram em média 300 anos para serem vencidos, desenvolvendo, assim, teorias referentes a esse conjunto numérico. Hoje em dia os números complexos são empregados na física, na engenharia e diversas outras situações.

Desenvolvimento

RAJ MOHAN, O “ELECTRO MAN”

Aos 7 anos de idade, o indiano Raj Mohan teve de enfrentar a morte de sua mãe. Sua tristeza e desesperança foram tantas que decidiu acabar com a própria vida. Para sua sorte, escolheu uma forma de suicídio que garantiria sua sobrevivência e, mais tarde, sua fama mundo afora: agarrou-se a fios de alta tensão desencapados. Esperou, e nada. Nem um choque pequenino, daqueles sustos que tomamos em chuveiros sem fio-terra.

Raj Mohan descobriu então seu enorme poder: tem alta resistência à eletricidade. Na verdade, sua capacidade de ser imune ao efeito nocivo da eletricidade é explicada por uma combinação de fatores muito sutis: capacitância, indutância, resistência, entre outros conceitos explicados por uma área da Física chamada Eletromagnetismo. Raj Mohan Nair, nascido na cidade de Kollam, tem um talento sobre-humano. É conhecido, hoje, como “Electro-Man”.

Stan Lee, o autor de quadrinhos de super heróis famosos no mundo inteiro, tais como “Homem Aranha”, “Quarteto Fantástico”, “Hulk”, “X-Men”e “Homem de Ferro”, apresentou um programa na TV History Channel chamado “Os super humanos de Stan Lee”. Neste show, apareceram pessoas com estranhos poderes, e um deles foi Raj Mohan. Segundo o programa, Raj Mohan é pelo menos dez vezes mais resistente à eletricidade do que os seres humanos comuns. Ele leva um choque de alta potência e não sente coisa alguma. Ele se conecta a tomadas e acende lâmpadas com as mãos.

Reiterando que Raj Mohan Nair não é um ser humano como os outros, podendo agarrar fios de alta tensão e colocar os dedos nas tomadas sem risco para a própria vida, deixamos o aviso: se usar esse exemplo em sua aula de aula, lembre seus alunos de que esse é um caso especial!

Fonte: http://blogs.estadao.com.br/jt-variedades/os-super-herois-estao-entre-nos-de-verdade/

Mas qual seria a relação entre a história de Raj Mohan Nair e os números complexos?

O que está por trás desta incrível história de resistência “sobrenatural” à eletricidade são conceitos de Eletromagnetismo aplicados na Engenharia Elétrica, tais como: impedância, reatância, corrente, indutância, entre outros. É interessante pensar que a compreensão de tais fenômenos e a manipulação das grandezas envolvidas é possível graças aos números complexos.

Algumas destas grandezas físicas como, por exemplo, a velocidade instantânea de uma partícula, são representadas como vetores no plano cartesiano, o que nos dá exatamente a representação de um número complexo no **plano de *Argand-Gauss*.**

O plano de Argand-Gauss é o plano cartesiano, utilizado para representar os números complexos geometricamente. O eixo das abscissas corresponde à parte real e o eixo das ordenadas, à parte imaginária. Esse plano também recebe o nome de Plano Complexo ou Diagrama de Argand.

Conjunto dos números Complexos

O conjunto dos números complexos é representado por C, e definido como o conjunto dos pares ordenados compostos por números reais, onde são definidas a adição e a multiplicação e a igualdade.

• Adição: (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).
• Multiplicação: (a, b) . (c, d) = (ac – bd, ad + bc).
• Igualdade: (a, b) = (c, d) , onde a = c, b = d.

Representação Algébrica

- Um número complexo representa-se por **z = a + ib** com a, b $\in$ R. Diz-se que:

  a é a **parte real** de z e escreve-se **Re(z) = a**;

  b é a **parte imaginária** de z e escreve-se **Im (z) = b**.

- Diz-se que:

  O complexo z é um **número real** se e só se Im(z) = 0.

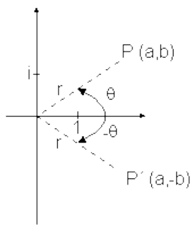
  O complexo z é um **imaginário puro** se e só se Re (z) = 0 e Im(z) $\neq$ .0

  O complexo z é **nulo** se e só se Re (z) = Im (z) = 0.

Conjugado de um Número Complexo

- O **conjugado** do complexo z = a + ib é o número complexo

  z = a - ib.



Re z = Re z

Im z = -Im z

|z| = |z|

arg z = -arg z

Soma e Subtração de Números Complexos

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?

Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$?

Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uní-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma $ax + b$.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$

$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1. Agora efetue as somas $z + w$ abaixo:

a. $z = 3$; $w = 5$

b. $z = 2i$; $w = 4i$

c. $z = 5$; $w = 3i$

d. $z = 2 + 3i$; $w = 3$

e. $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2. Agora, efetue $z - w$ nos casos abaixo:

a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 - 4i$

b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 - 5i$

c. $z = 3 - 5i$; $w = -2 + 4i$

Multiplicação e Divisão

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra da "racionalização do denominador de uma fração"? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1 . Inicialmente, tente efetuar a operação z * w, com z = 3 + 2i e w = 4.

2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação z * w, com z = 2 + 4i e w = 3i. Não se esqueça que, como i=$\sqrt{-1}$, podemos considerar que i^2 = -1.

Multiplicação de números complexos

Para multiplicarmos dois números complexos basta efetuarmos a multiplicacão dois dois binômios, observando os valores das potência de **i**. Assim, se z_1=a+bi e z_2=c+di, temos que:

$$z_1.z_2 = a.c + adi + bci + bdi^2$$
$$z_1.z_2 = a.c + bdi^2 = adi + bci$$
$$z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$\text{Observar que : } i^2 = -1$$

Potências de i

Se, por definição, temos que i = - $(-1)^{1/2}$, então:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$
$i^4 = i^2.i^2=-1.-1=1$
$i^5 = i^4.\ 1=1.i= i$
$i^6 = i^5.\ i =i.i=i^2=-1$
$i^7 = i^6.\ i =(-1).i=-i$ ......

Observamos que no desenvolvimento de i^n (**n** pertencente a ***N***, com **n** variando, os valores repetem-se de **4** em **4** unidades. Desta forma, para calcularmos i^n basta calcularmos $\mathbf{i}^{\mathbf{r}}$ onde **r** é o resto da divisão de **n** por **4**.

Exemplo:
i^{63} => 63 / 4 dá resto 3, logo $i^{63}=i^3=-i$

Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Um número complexo possui forma geométrica igual a z = a + bi, onde a recebe a denominação de parte real e b parte imaginária de z. Por exemplo, para o número complexo z = 3 + 5i, temos a = 3 e b = 5 ou Re(z) = 3 e Im(z) = 5. Os números complexos também possuem uma forma trigonométrica ou polar, que será demonstrada com base no argumento de z (para z≠0).

Considere o número complexo z = a + bi, em que z ≠ 0, dessa forma temos que: **cosϴ = a/p** e **senϴ = b/p**. Essa relações podem ser escritas de outra forma, acompanhe:

cosϴ=a/p→**a=p.cosϴ**

senϴ = b/p → **b = p.senϴ**

Vamos substituir os valores de a e b no complexo z = a + bi.

z=p.cosϴ+p.senϴi→***z=p.(cosϴ+i.senϴ)***

Essa forma trigonométrica é de grande utilidade nos cálculos envolvendo potenciações e radiciações.

Exemplo 1

Represente o número complexo z = 1 + i na forma trigonométrica.

Resolução:

Temos que a=1 e b = 1

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

$$\rho = \sqrt{1+1}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

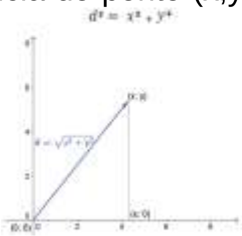
$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

$$sen\,\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

A forma trigonométrica do complexo z = 1 + i é ***z = √2.(cos45º + sen45º . i)***.

VETORES NO PLANO

Como dissemos na seção anterior, nesta seção promovemos um aprofundamento sobre o assunto de número complexo. Esse aprofundamento vai um pouco além do Currículo Mínimo. Iniciaremos o assunto, fazendo uma rápida revisão sobre o conceito de Vetores no plano.

Um vetor do plano cartesiano (x,y) satisfaz a seguinte propriedade: se d é a medida da distância do ponto (x,y) à origem do plano, então, pelo Teorema de Pitágoras, temos 

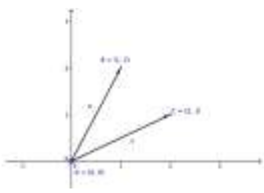
Daí, temos que a distância, sendo um número positivo, pode ser tomada como d = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Nesse caso, estamos usando as chamadas coordenadas retangulares. Mas estas podem ser um empecilho para a fácil descrição de algumas curvas e gráficos. Para contornar tais dificuldades, uma possibilidade é a introdução das coordenadas polares, que são um modo prático de descrever tais vetores.

Um vetor no plano, visto como objeto geométrico (a “seta” muito útil para estudo na Física, por exemplo), pode ser determinado, usando-se somente duas características particulares de cada um:

(i) Seu comprimento, isto é, o número d, distância de (x,y) a O, exibido acima;(ii) O ângulo que o vetor faz com um dos eixos cartesianos, que são nossa referência. Como convenção, usamos o eixo Ox. Isto determina o que comumente chamamos sua direção e sentido.

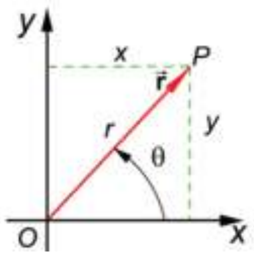
Nas figuras abaixo, exibimos alguns exemplos de vetores com mesmo comprimento e direções diferentes, e vetores com mesma direção e sentido, e comprimentos diferentes:



FORMA POLAR DE UM VETOR NO PLANO CARTESIANO

Considerando que a notação que usamos deve ser, sempre que possível, de fácil memorização, a seguir, mudamos a notação de d para r, apenas porque o comprimento do vetor determina o raio de um círculo com centro na origem do plano. Assim, o conjunto de vetores de mesmo comprimento d = r forma um círculo de centro em O.

Considere θ o ângulo formado entre o eixo positivo de x, OX, e o vetor no sentido anti-horário. Ou seja, o ângulo θ começa a ser medido na parte positiva do eixo das abscissas e termina no vetor percorrendo esse caminho de forma anti-horária e varia entre 0 e 2π.



Observando a figura 4 e aplicando as definições de seno e cosseno, obtemos:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r\cos\theta$$

Observemos que $r^2 = x^2 + y^2$ é satisfeita pelas descrições acima:

$x^2 + y^2 = (r\ cos\ \theta)^2 + (r\ sen\ \theta)^2 = r^2 [(cos\ \theta)^2 + (sen\ \theta)^2] = r^2$, já que $(cos\ \theta)^2 + (sen\ \theta)^2 = 1$.

Esta relação permite a construção da forma polar. Ela é a base de tudo. Sendo, assim, vamos seguir em frente.

Os exercícios utilizados em sala de aula são extraídos do livro texto da turma em que estou trabalhando. Livro: Dante ensino médio.

Também oriento meus alunos a assistirem vídeo aulas do youtube como por exemplo:

Disponibilizo um vídeo para que os alunos revisem o assunto em casa. http://www.pensevestibular.com.br/vestibular/aula-sobre-numeros-complexos-forma-algebrica

Avaliação em grupo de quatro alunos após a apresentação e execução dos exercícios.

Duração das aulas: três semanas.

Bibliografia: Roteiros de ação, textos base .