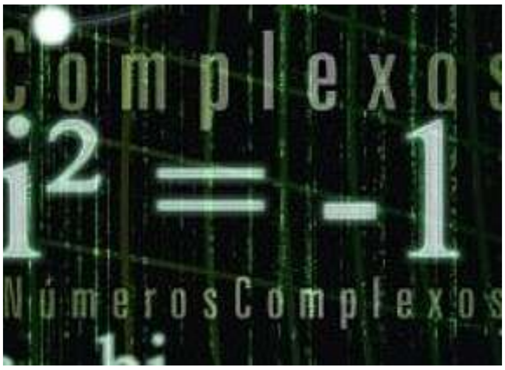
Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 3º Ano / 3º Bimestre

Plano de Trabalho

Números Complexos



Tarefa 3 – Reelaboração do PT1

Cursista : Anderson Ribeiro da Silva

Tutora : **Edna da Rosa Vetromille**

S U M Á R I O

Introdução

Uma das maiores contribuições da álgebra, a fórmula resolutiva de equações cúbicas de Tartagila-Cardano, não tinha grandes aplicações práticas, sendo mais eficiente a resolução dessas equações por meio do método de aproximações sucessivas. Porém, do ponto de vista lógico, a fórmula proposta por esses matemáticos trouxe grandes contribuições, promovendo discussões que culminaram no desenvolvimento dos números complexos.

A publicação da fórmula que permite determinar o conjunto-solução de equações cúbicas ocorreu em 1545, na obra *Ars Magna,* matemático Girolamo Cardano (1501-1576), na qual o autor faz referencia a um novo tipo de número, que determinou "quantidade fictícia". Tais quantidades eram na realidade raízes quadradas de números negativos, hoje tratadas como números imaginários.

Dentre os conjuntos numéricos já conhecidos , tínhamos inicialmente o conjunto dos números naturais:

N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Devido a necessidade do homem esse conjunto foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros:

Z = { ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

Para que também a divisão fosse possível, do conjuntos Z foi aumentado e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com exceção da divisão por zero.

$$Q = \left\{x = \frac{a}{b}, com\ a \in Z, b \in z\ e\ b \neq \mathbf{0}\right\}$$

Em Q, a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}\ e\ x = -\sqrt{2}$ não podem ser representados por uma fração $\frac{a}{b}$, com b ≠0 e a e b pertencentes a Z. $\sqrt{2}\ e - \sqrt{2}$, são exemplos dos números chamados de irracionais (Ir) .

Da união dos racionais com os irracionais surgem os números reais (R):

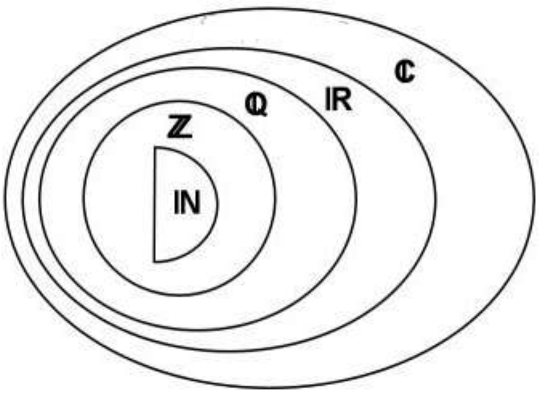
$$R = Q\ U\ Ir$$

Portanto, podemos identificar **N** como uma parte de **Z**, **Z** como ima parte de **Q** e **Q** como uma parte de **R** e escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \Re$$

Sabemos que, se x $\in$ $\Re$, então $x^2 \geq 0$. Assim a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\Re$, pois: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

e não existe um número real x que, elevado ao quadrado resulte – 1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos I.



DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

- **HABILIDADE RELACIONADA**: Identificar e conceituar a unidade imaginária, identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica, resolução de equações envolvendo números complexos.

- **PRÉ-REQUISITOS**: Equações do 2º grau, operações envolvendo números inteiros e operações com monômios polinômios.

- **TEMPO DE DURAÇÃO**: **200 minutos**

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS**: Vídeo no youtube : http://www.youtube.com/watch?v=pOCUumUAkhA

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA**: **Em dupla para um trabalho mais cooperativo**.

- **OBJETIVOS**: Identificar reconhecer números complexos, resolver equações que envolvam números complexos.

- **METODOLOGIA ADOTADA**: Apresentar o vídeo com o objetivo de apresentar o conteúdo a ser trabalhado. Depois abordar o assunto da seguinte forma;

Já vimos que no conjunto do números reais, uma equação do tipo $x^2 + a = 0$, com $a \neq 0$, não possui solução , pois não existe um número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo.

$x^2 + a = 0 \Rightarrow x^2 = -a \Rightarrow x = \pm\sqrt{-a}$

Para solucionar esse problema criada uma extensão para os números reais denominados números complexos, e indicado por ₵.

Um número complexo pode ser representado da seguinte forma ;

$$Z = x + yi \quad \begin{cases} x \text{ é a parte real} \\ y \text{ é a parte imaginária} \end{cases}$$

Em um número complexo a parte imaginária for zero, dizemos que é o número real e se a parte real for zero, dizemos que é imaginário puro.

A unidade imaginária i é que indica a raiz de índice par de um número negativo no conjunto ₵.

Exemplo:

Na equação $x^2 + 9 = 0$, temos:

$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{9i^2} \Rightarrow x = \pm 3i \begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3i \end{cases}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Utilizar exercícios de fixação através do livro didático no mesmo dia e na aula seguinte um teste em dupla para fixar o que foi compreendido (AVALIAÇÃO).

ATIVIDADE 2

- **HABILIDADE RELACIONADA**: (H36) Efetuar a adição e subtração de números complexos na forma algébrica.

- **PRÉ-REQUISITOS**: Operações de adição e subtração com números reais, operações de adição e subtração de polinômios.

-**TEMPO DE DURAÇÃO**: **200 minutos**.

-**<u>RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS</u>**: Livro didático e vídeo.

- **<u>ORGANIZAÇÃO DA TURMA</u>**: Individual.

- **<u>OBJETIVOS</u>**: Tornar o aluno capaz de desenvolver cálculos de adição e subtração envolvendo números complexos.

- **<u>METODOLOGIA ADOTADA</u>**: Iniciei com uma revisão sobre adição e subtração de números inteiros, utilizando exemplos envolvendo dinheiro utilizando o extrato abaixo:

Banco Aplicação				
Extrato de conta corrente				
João Sobrinho	conta: 102.203.452/10			
Dia	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
1/jan	Depósito		500	500
3/jan	Cheque	50		450
5/jan	Saque	600		– 150
10/jan	Depósito		300	150
15/jan	Depósito		200	350
17/jan	Cheque	600		– 250
24/jan	Depósito		1000	750
26/jan	Saque	400		350
28/jan	Cheque	380		– 30

Depois passei para exemplos com polinômios usando o vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=8AJ7wjzpMRU

Após essa revisão passei para as operações com números complexos através de aula expositiva.

Exemplos:

1) $(3 + 4i) + (- 4 – 2i) = (3 – 4) + (4 – 2)i = - 1 + 2i$
2) $(2 – 5i) + (3 – 7i) = (2 + 3) + (-5 – 7)i = 5 – 12i$
3) $(4 + 6i) – (2 – 2i) = 4 + 6i – 2 + 2i = (4 – 2) + (6 + 2)i = 2 + 8i$
4) $(- 3 + 5i) – (- 4 + 7i) = - 3 + 5i + 4 – 7i = (- 3 + 4) + (5 – 7)i = 1 – 2i$

Para terminar, uma Lista de Exercícios valendo ponto na média. Avaliação feita através do aproveitamento na construção das soluções (AVALIAÇÃO).

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. **Calcule as seguintes somas:**

   a) $(2 + 5i) + (3 + 4i)$ b) $i + (2 - 5i)$

2. **Calcule as diferenças:**

   a) $(2 + 5i) - (3 + 4i)$ b) $(1 + i) - (1 - i)$

3. **Calcule os seguintes produtos:**

   a) $(2 + 3i)(3 - 2i)$ b) $(1 + 3i)(1 + i)$

4. **Escreva os simétricos dos seguintes números complexos:**

   a) $3 + 4i$ b) $-3 + i$ c) $1 - i$ d) $-2 + 5i$

5. **Escreva os conjugados dos seguintes números complexos:**

   a) $3 + 4i$ b) $1 - i$

6. **Efetue as seguintes divisões de números complexos:**

   a) $\dfrac{-10+15i}{2-i}$ b) $\dfrac{1+3i}{1+i}$

7. **Calcule as potências:**

   a) $(1 + i)^2$ b) $(-2 + i)^2$

8. **Sendo $z = (m^2 - 5m + 6) + (m^2 - 1).i$, determine m de modo que z seja um imaginário puro.**

9. Determine a parte real do número complexo $z = (1 + i)^{12}$.

10. Calcule o número complexo $i^{126} + i^{-126} + i^{31} - i^{180}$

11. Sendo $z = 5i + 3i^2 - 2i^3 + 4i^{27}$ e $w = 2i^{12} - 3i^{15}$, calcule Im(z).w + Im(w).z .

12. (UCMG) - O número complexo 2z, tal que $5z + \bar{z} = 12 + 6i$ é:

13. (UCSal) - Para que o produto (a+i). (3-2i) seja real qual deve ser o valor de "a"?

14. (UFBA) - Sendo a = -4 + 3i , b = 5 - 6i e c = 4 - 3i , calcule o valor de a.c + b.

15. (Mackenzie-SP) – Calcule o valor da expressão $y = i + i^2 + i^3 + ... + i^{1001}$.

16. Determine o número natural n tal que $(2i)^n + (1 + i)^{2n} + 16i = 0$.

17. (UEFS-93.2) - Se m - 1 + ni = (3 + i).(1 + 3i), calcule os valores de m e n.

18. A soma de um número complexo z com o triplo do seu conjugado é igual a (-8 - 6i). Calcule $\bar{z}$.

19. (FESP/UPE) - Seja z = 1+ i , onde i é a unidade imaginária. Calcule a potência z^8.

20. (UCSal) - Sabendo que $(1+i)^2 = 2i$, então calcule o valor da expressão $y = (1+i)^{48} - (1+i)^{49}$.

ATIVIDADE 3

HABILIDADE RELACIONADA: (H36) Efetuar a multiplicação e divisão de números complexos na forma algébrica.

- **PRÉ-REQUISITOS**: Operações de multiplicação e divisão com números inteiros, operações de multiplicação e divisão de polinômios.

-**TEMPO DE DURAÇÃO**: **200 minutos**.

-**RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS**: Livro didático e vídeo.

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

- **OBJETIVOS**: Tornar o aluno capaz de desenvolver cálculos de multiplicação e divisão envolvendo números complexos.

- **METODOLOGIA ADOTADA**: Iniciei com uma revisão sobre multiplicação e divisão de números inteiros, depois passei para multiplicação e divisão de polinômios.

Após essa revisão passei o vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=IUqzW1dfF7c&playnext=1&list=PL93B4DC732BFF9BAE&feature=results_video

Após o vídeo continuei no quadro reforçando o entendimento e tirando dúvidas utilizando o quadro abaixo:

$$i^2 = -1; \qquad ai = ia$$
$$a + bi = c + di \quad \text{significa} \quad a = c \text{ e } b = d;$$
$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Então passei exercícios de aprendizagem contidos no livro didático que foram realizados em sala de aula.

Trabalho em dupla envolvendo os conteúdos trabalhados.

PONTOS POSITIVOS

Os alunos acharam, por ser uma matéria do 3º ano, mais fácil do que muitos conteúdos até então estudados.

PONTOS NEGATIVOS

Por não ser um conteúdo presente na matriz de referência do ENEM alguns bons alunos não se aplicaram como na construção de outras competências.

ALTERAÇÕES

Para facilitar a visualização as alterações foram colocadas em **AZUL**.

IMPRESSÕES DOS ALUNOS

Citadas no pontos positivos e negativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE ACAO – Números Complexos – Curso de Aperfeicoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do
Ensino Medio – 3º bimestre/2012 –
http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 01/09/2012.

Exemplo de tarefas 1

Dante, Luiz Roberto, Matemática, Volume Único, 1. Ed. São Paulo: Ática, 2005.

Souza, Joamir Roberto de, Novo Olhar Matemática, 1. Ed. São Paulo: FTD, 2010 (Coleção Novo Olhar; v.3)

Endereços eletrônicos acessados de 28/05/2012 a 28/05/2012, citados
ao longo do trabalho:

http://www.youtube.com/watch?v=pOCUumUAkhA

http://www.youtube.com/watch?v=8AJ7wjzpMRU

http://www.youtube.com/watch?v=IUqzW1dfF7c&playnext=1&list=PL93B4DC732BFF9BAE&feature=results_video