MATEMÁTICA 3º ANO – 3º BIMESTRE/ 2012

PLANO DE TRABALHO REMODELADO.
CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC – RJ.
Colégio: **ESTADUAL PADRE ANCHIETA**
Professor: **JOSÉ DE DEUS DE LIMA**
Matrícula: **08374100**
Série: **3º ANO – ENSINO MÉDIO**.
Tutor**: EDESON DOS ANJOS SILVA.**

Avaliação da Execução do plano de Trabalho.

A remodelagem deste plano de trabalho tem com objetivo acrescentar e incluir mais exercícios e figuras que possam de alguma forma apresentar as aplicações dos números complexos no dia a dia de nossas vidas.

Avaliação da implementação do plano de trabalho.

Pontos positivos: a abordagem de aplicações dos números complexos, fez com que os alunos percebessem que a matemática é importante nas avaliações externas e deram como exemplo o **SAERJINHO**. Os alunos participaram com muitos questionamentos e como seria interessante utilizarmos de recursos tecnológicos para facilitar o entendimento das aplicações. Percebi que muitos dos meus alunos ficaram mais interessados pelas aulas.

Pontos Negativos: foram poucos, o que mais atrapalhou foi a falta de alguns alunos, porque na aula seguinte quando chegava não conseguia acompanhar o assunto tratado e falto de os alunos conheceram muita tecnologia, mas desconhecem a verdadeira importância dela, que usar para sua educação (dele).

Alterações: inclusão de mais exercícios e figuras.

Impressões dos alunos: foi melhor do que eu esperava, pois, os alunos foram fundamentais no cumprimento da execução das aulas, ficaram muito interessados com o uso do GEOGEBRA para a construção de gráficos.

Introdução: o assunto, apresentei com um exemplo de aplicação real, que foi o exemplo do paraquedista e em seguida um pouca da História dos números complexos e como pré-requisito fiz uma revisão de resolução de equação do segundo grau.

Desenvolvimento: pela reação e a empolgação dos alunos fique convencido que a clareza da aula atingiu o objetivo esperado. A metodologia foi apresentada com uso de exemplos que tivessem aplicações no dia a dia. Os recursos foram apresentados e utilizados, inclusive os alunos na semana seguinte a nossa aula utilizaram da tecnologia (computadores e o projetor de multimídia) para apresentar os gráficos de informações geográfica da região Sudeste. (Projeto "O CEPA TEM A CARA DO BRASIL").

Avaliação: quando apresentei meu critério de avaliação, os alunos que falaram, disseram que tinham entendido. Assim, executei as avaliações com apresentei.

Minha conclusão foi de muita empolgação com o curso de formação continuada.

Abaixo, segue o plano remodelado.

MATEMÁTICA 3º ANO – 3º BIMESTRE/ 2012

PLANO DE TRABALHO REMODELADO
CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC – RJ.
Colégio: **ESTADUAL PADRE ANCHIETA**
Professor: **JOSÉ DE DEUS DE LIMA**
Matrícula: **08374100**
Série: **3º ANO – ENSINO MÉDIO**.
Tutor**: EDESON DOS ANJOS SILVA**

INTRODUÇÃO

Este presente trabalho tem como objetivo fazer com que os alunos percebam que a Matemática é uma ferramenta de inúmeras aplicações e compreendam como os números complexos têm muitas aplicações na vida diária deles, tentando apresentar o assunto de maneira contextualizado sempre que poder. Dando como exemplos de aplicações: a Engenharia Elétrica e os números complexos e circuitos monofásicos.

Como sabemos que nossos alunos apresentam uma grande defasagem no domínio de conhecimentos matemática, tanto no raciocino lógico quanto na interpretação de texto para equacionar soluções - problemas. Por isso, é instigante mostrar as áreas de aplicação do conteúdo estudado. Com isto, mostra que o estudo de matemática transforma a vida nossa de cada dia.

Para garantir o bom desenvolvimento do conteúdo precisa de uma revisão de: equações do primeiro grau, marcar ponto no plano cartesiano, função do primeiro grau, equações e função do segundo grau e a construção de gráficos. Esta revisão será realizada durante o percurso e quando necessária, podendo ser feita com a resolução de exercícios. Tempo que preciso seis (6) tempos de cinquenta minutos para execução do conteúdo e exercícios de fixação e complementares (incluindo dois tempos para aplicação de avaliação escrita).

1- Desenvolvimento:

Atividade 1 – Uma aplicação da função do segundo grau com raízes reais.

a) **Habilidade relacionada(H46)**: reconhecer números reais em diferentes contextos.

b) **Pre-requisitos:** revisão das operações elementares com números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica e marcar ponto no plano cartesiano.
c) **Tempo de Duração:** 100 minutos.
d) **Recursos educacionais utilizados:** folha de atividades, os computadores (a Escola tem um laboratório) com Geogebra instalado e o Data show, livro didático, quadro branco, uma ficha resumo e canetas.
e) **Organização da classe:** para apresentação do assunto individual e em grupo de três quando forem usar os computadores e resolver os exercícios.
f) **Objetivos:** Apresentar os números complexos como mais uma ferramenta matemática.
g) **Metodologia adotada:**

Começar o assunto apresentando um exemplo que tenha uma relação com aplicações reais:

Função quadrática

Paraquedista em queda livre.

A função quadrática.
É chamada queda *livre* o movimento na vertical que os corpos, soltos a partir do repouso, sofrem pela ação da gravidade, desprezando-se a resistência do ar.
Um paraquedista, conhecendo seu tempo de queda – isto é, do momento em que salta da aeronave até o momento em que abre o paraquedas –, pode determinar a distância que percorreu por meio de uma função. A distância percorrida Δs (em metros) pelo paraquedista em queda livre, depois de um intervalo de tempo t (medido em segundo a partir do zero), pode ser modelada pela função: $\Delta s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. a constante g corresponde à aceleração da gravidade que, nas proximidades da superfície da Terra, mede cerca de $9{,}8m/s^2$. Assim: $\Delta s(t) = 4{,}9t^2$.
Asse sentença é um exemplo de lei de formação de uma função quadrática.

Apresentado a situação do paraquedista acima. Fazer a definição de função do segundo grau:

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \epsilon \mathbb{R}$.

Exemplos de funções do 2º grau:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$, em que $a = 1,\ b = 5\ e\ c = 4$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$, em que $a = 2,\ b = 0\ e\ c = 0$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + 12$, em que $a = -3,\ b = 0\ e\ c = 12$

SITUAÇÕES QUE RECAEM EM UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA.
Como já dissemos, há várias situações para as quais é possível criar modelo matemático, muitas delas recaem em funções quadráticas. Vamos analisar uma.

Uma situação da Física

Considere a situação do paraquedista.
A função do paraquedista acima é definida por: $\mathbf{\Delta s(t) = \frac{1}{2}gt^2}$**.**
A distância percorrida $\Delta \boldsymbol{s}$ (em metros) pelo paraquedista em queda livre. E **t** é o intervalo de tempo (medido em segundo a partir do zero). A constante **g** corresponde à aceleração da gravidade que, nas proximidades da superfície da Terra, mede $\mathbf{9{,}8m/s^2}$.
Assim, $\boxed{\Delta s(t) = 4{,}9t^2}$

a) Qual foi a distância percorrida pelo paraquedista se o tempo livre foi **15s**? E se esse tempo fosse **20s**, que distância ele teria percorrido?
Resolução: considere a função: $\mathbf{\Delta s(t) = 4{,}9t^2}$
1) Para $t = 15$, temos $\Delta s(15) = 4{,}9(15)^2 = 1.102{,}5$. Após 15s de queda livre, o paraquedista estava a 1.102,5m de onde fez o salto. **(o aluno pode utilizar a calculadora cientifica para fazer os cálculos)**

2) Para $t = 20$, temos: $\Delta s(20) = 4{,}9\ (20)^2 = 1960$. Então, se o tempo de queda livre fosse 20s, o paraquedista estaria a 1.960m do ponto em que saltou, ou seja, estaria mais próximo da superfície da Terra do com 15s de que livre.

Observação: o **t** (tempo em segundos pode ser apresentado com eixo dos **x**: horizontal) e o Δs (espaço percorrido pode ser apresentado com dos **y**: vertical)

b) Um paraquedista planeja cair 4.410 m antes de abrir seu paraquedas. Quanto tempo ele ficará em queda livre?
Consideremos a lei, $\Delta s(t) = 4.410$ e calculamos o valor de t:
$4{,}9t^2 = 4.410 \ \rightarrow t^2 = \frac{4.410}{4{,}9} \ \rightarrow t^2 = 900 \ \rightarrow t = -30 \ \ ou \ \ t = 30$. Como t representa o tempo de queda livre, consideramos apenas o valor positivo de t.
Assim, o tempo em que livre do paraquedista será de 30 segundos.

Exercícios propostos em duplas.

1) As funções em ℝ abaixo, são funções quadráditicas, escreva no seu caderno o valor de **a**, **b** e **c**.
a) $f(x) = x^2 - 4x - 3$;
b) $f(x) = x^2 - 9$;
c) $f(x) = 6x^2$;
d) $f(x) = -3x^2 + 2x$.

Respostas esperadas:
a) $a = 1;\ \ b = -4; c = -3$
b) $a = 1;\ \ b = 0;\ \ c = -9$
c) $a = 6;\ \ b = 0;\ \ c = 0$
d) $a = -3;\ \ b = 2;\ \ c = 0$

2) Dada a função $f(x) = -x^2 + 5x + 6$, calcule os valores de:
a) $f(-1)$
b) $f(\sqrt{2})$
c) $f\left(-\frac{4}{5}\right)$

Valores esperados:
a) 0
b) $4+5\sqrt{2}$ c) $\frac{34}{25}$

3) Observe a foto de uma gota em queda livre. Nesta foto, foi utilizado um metódo que permite visualizar as posições de uma gota em queda livre de acordo com a variação do tempo.

Esse tipo de fotografia é chamado de estroboscópica. A lei que relaciona a posição (em metro) do objeto em função do tempo (em segundo) é $s(t) = 4{,}9\ \times t^2$. Calcule a posição s da gota para $t = 1;\ \ t = 2\ e\ \ t = 3$

Resposta: $s(1) = 4{,}9\ m;\ \ S(2) = 19{,}6\ m\ e\ \ s(3) = 44{,}1\ m$

4) Em certa fase de um campeonato, os times jogam turno e returno, ou seja, cada time jogou duas vezes com cada um dos outros times: uma partida no próprio campo e outra no campo do adversário. Sabendo que nessa fase houve 56 jogos, quantos eram os times?

Resposta:
Número de times x,
$x(x-1) = 56$.
X=8, 8 times

Podemos perceber que os exercícios 3 e 4 são de muita importância para serem feito e discutido com a turma, pois tem aplicações prática e cotidiana.

Atividade 2 - conjunto dos Números Complexos

a) **Habilidade relacionada**: Identificar e representar o unidade imaginária, identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.

b) **Pré-requisitos**: revisão de calculo de raízes de uma equação do segundo grau e operações algébricas.

c) **Tempo de duração :** 240 minutos.

d) **Recursos Educacionais Utilizados:** livro didático, computador (laboratório de informática), calculadora cientifica e de celulares, batalha naval, quadro e materiais que escola tem disponível.

e) **Organização da turma:** individual para a exposição de conteúdo, em duplas para a realização de atividade e na hora de fazer os exercícios complementares.

f) **Metodologia adotada.** Apresentar um pouco da Historia dos números complexos e suas aplicações, logo em seguindo apresentar a unidade imaginária e como ela e necessária para a resolução de equações que não tem raízes reais.

Números complexos

Nicolo Tartaglia
(cerca de 1500 – 1557)

Descobriu uma fórmula geral para resolver equações do tipo $x^2 + px + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$. Porém, não publicou sua obra.

Gerônimo Cardano
1501-1576

Quebrando um solene juramento de silêncio feito a Tartaglia, publicou a obra intitulada Ars Magna (Arte maior), na qual apresenta a fórmula descoberta por Tartaglia. A primeira dificuldade surgiu quando Cardona aplicou essa fórmula na resolução da equação $x^3 - 15x = 4$, chegando à solução: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Nela, aparece a raiz quadrada de um número negativo, o que era considerado inexistente na época. Parem Cardano já sabia que $x = 4$ era uma solução da equação $x^3 - 15x = 4$, pois: $4^3 - 15 \times 4 = 4 \Longrightarrow 64 - 60 = 4$. Isso fez com que surgisse um impasse, pois Cardano não conseguiu compreender como aplicar a fórmula nesse caso.

Raphael Bombelli
(cerca de 1526 - 1573

Prosseguiu com solução encontrada por Cardano e, usando aquilo que chamou de “ideia louca”, considerou $\sqrt{-1}$ um número “imaginário” e desenvolveu regras para trabalhar com esse tipo de número. A partir de então, outros matemáticos trabalharam com esses números.

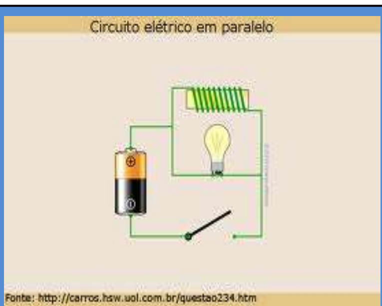
Leonard Euler
(1707 - 1783)

Usou pela primeira vez o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$.

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Em 1801 usou o símbolo i, criado por Euler e, após seu uso, esse símbolo se tornou amplamente aceito.
Em 1831, fez um estudo, independentemente de Argand, sobre representação geométrica dos números complexos.
Em 1832 Gauss introduziu a expressão **número complexo**.

Como você pode observa, na linha do tempo acima, o surgimento dos números complexos está relacionado com as resoluções de equações de 3º grau, em que apareceram raízes de números negativos. A existência de um “novo tipo de números” foi de difícil aceitação, mas, com tempo, diversos matemáticos trabalharam com esses números. Seu maior desenvolvimento somente se deu após a descoberta de aplicações em outras áreas.
Hoje em dia, aplicações desses novos números adquiriram uma enorme importância no campo da Engenharia (por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Aerodinâmica (no cálculo da força de sustentação da asa de um avião), na Geometria fractal em sistemas dinâmicos (por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia) e entre outras.



Após esta breve apresentação Histórica, começa a parte de definição da Unidade imaginária.

O número i tal que $i^2 = -1$ é chamado de unidade imaginária

Exemplo: vamos resolver a equação do 2º grau $x^2 + 9 = 0$.
Note que: $x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = -9$, no universo real, essa equação não tem solução, pois não existe número real que levado ao quadrado resulte em -9. Mas, se considerarmos que existe um número i, não real, tal que $i^2 = -1$, temos:
$x^2 = -9 \rightarrow x^2 = (-1)9 \rightarrow x^2 = 9i^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{9i^2} \rightarrow x = \pm 3i$.

Exercícios propostos.

1) Resolva, no conjunto do s números complexos, as equações de 2º grau.
   a) $x^2 + 4 = 0$
   b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   c) $x^2 - 6x + 13 = 0$
   d) $x^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = 0$

Respostas esperadas: a) $(-2i; 2i)$ b) $(2; 3)$
c) $(3 - 2i;\ 3 + 2i)$ d) $\left(-\sqrt{2};\ -3\sqrt{2}\right)$

2) Verifique se o número complexo $z_1 = 1 - i$ é raiz da equação $z^2 - 2z + 2 = 0$

Resposta: é raiz

Os números complexos, na forma algébrica.

Todo número complexo pode ser escrito na forma $\mathbf{z = a + bi}$, em que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, e i é unidade imaginário.

Essa é a chamada **forma algébrica** do número complexo z.
O coeficiente **a** é a **parte real** de z, representada por Re(z), e o coeficiente b é a **parte imaginaria** de z, representada por Im(z).
Exemplos:

a) z = 4 − 3i é um número complexo com $Re(z) = 4\ e\ Im(z) = -3$
b) $z = 3 = 3 + 0i$ é um número complexo com $Re(z) = 3\ e\ Im(z) = 0$. Neste caso, z é um número real, pois a parte imaginária de z é nula.
c) $z = 4i = 0 + 4i$ é um número complexo com $Re(z) = 0\ e\ Im(z) = 4$. Neste caso, z é chamado de **imaginário puro**, pois a parte real de z é nula, e a parte imaginária é não nula.

Igualdade de números complexos

Dados dois números complexos $z = a + bi\ e\ w = c + di$, com $a, b, c\ e\ d \in \mathbb{R}$, definimos a igualdade $z = w$ quando Re (z) = Re (w) e Im(z)=Im(w), ou seja:
$z = w \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c\ e\ b = d$

Exemplo.

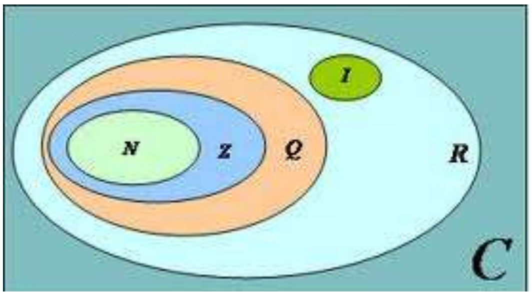
Os números complexos $z = 8 + bi$ e $w = a - \sqrt{2}i$ são iguais se, e somente se:

Re (z) =Re (w) $\Longrightarrow 8 = a \quad Im(z) = Im(w) = -\sqrt{2}$

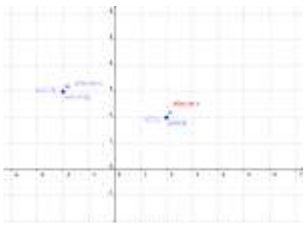
O conjunto dos números complexos

O surgimento dos números complexos levou a uma ampliação dos conjuntos numéricos, tendo sido criado, então, o **conjunto dos números complexos**, representado por $\mathbb{C}$, que pode ser definido por:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z | z = a + bi, com\ a, b\ \in \mathbb{R}\ e\ i^2 = -1\ \}}$$



Sendo $z = a + bi$, podemos representar z como um par ordenado: $z(a, b)$, que também é chamado de **afixo** (ponto móvel) de z. Veja na figura abaixo.



Destacando que $\mathbf{z(2;\ \ 2)}$ **e** $\mathbf{w(-2; 3)}$ são os afixos de z e w.

Operações com números complexos.

Adição e subtração de números complexos.

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, podemos definir as operações de adição e subtração entre z e w da seguinte forma:

Adição: $z + w = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

Subtração: $z - w = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$

Exemplo: sejam os números complexos $\boldsymbol{z = 1 + 3i}$ ***e*** $\boldsymbol{w = 4 - 5i}$. Calcular:

a) $\mathbf{z + w = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - i}$.

b) $\boldsymbol{z - w = 1 + 3i - (4 - 5i) = 1 + 3i - 4 + 5i = -3 + 8i}$.

Multiplicação de números complexos.

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, podemos efetuar a multiplicação entre z e w aplicando a propriedade distributiva:

$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$. Como $i^2 = -1$, temos:

$zw = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplo: seja os complexos $z = 1 + i$ e $w = 4 - 2i$, calcular:

a) $zw = (1 + i)(4 - 2i) = 4 - 2i + 4i - 2i^2 = 4 + 2i - 2(-1) = 6 + 2i$.
b) $z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
c) $z^2w = 2i(4 - 2i) = 8i - 4i^2 = 8i - 4(-1) = 8i + 4 = 4 + 8i$

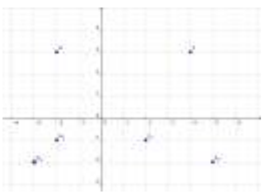
Exercícios propostos.

1) Efetue em seu caderno:
   a) $(4 + i) + (3 + 3i)$.
   b) $(5 - 2i) - (2 - 6i)$.
   c) $(7 - 2i) + (5 + 3i) - (8 - i)$.
   d) $(2 - 3i)(2 - 4i)$.

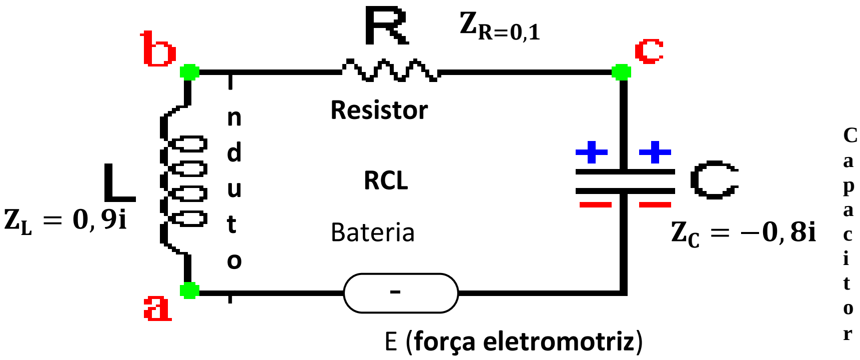
Resultados esperados:
a) $7 + 4i$ d) $-8 - 14i$
b) b) $3 + 4i$
c) $4 + 2i$

2) Calcule os valores reais de x e y para que a igualdade se verifique:
   $(3x^2 + 4xyi) - (x^2yi) = 8 + 3i$
   Resposta: $x = 2$ e $y = \frac{3}{7}$ ou $x = -2$ e $y = -\frac{1}{3}$
3) Observando os afixos dos números complexos na figura abaixo. Escreve estes no seu caderno.

Respostas esperadas:
$z = 4 + 3i$
$z_1 = 2 - i$
$z_2 = 5 - 2i$
$w = -2 + 3i$
$w_1 = -2 - i$
$w_2 = -3 - 2i$



4) Um circuito RCL contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RCL è chamada de **impedância** (Z) e é expressa por um número complexo. Num circuito RCL de série, a impedância equivalente (Z_{eq}) é dada por:$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C$. Ache Z_{eq} no circuito RCL, em série, abaixo:



Resolução do exercício 4:
Temos: $Z_R = 0{,}1;\ Z_L = 0{,}9i\ \ e\ Z_C = -8i$
Calculando $Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C$, obtemos:
$Z_{eq} = 0{,}1 + 0{,}9i + (-8i) = 0{,}1 + 0{,}1\ i$

Avaliação: É feita com as seguintes divisões:

1) Observações da participação dos alunos se estão fazendo os exercícios propostos; ajudando os colegas que venham precisar de apoio e respeito com as diferenças. (**pontuação de zero a dois pontos**)
2) Teste escrito: pontuação (**de zero a três pontos**)
3) Prova escrita: pontuação (**de zero a cinco pontos**)

Fontes de Pesquisa:

1) ROTEIRA DE AÇÃO – Conjuntos dos números complexos – Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do ensino Médio – 3º bimestre.
2) Conexões com a Matemática volume 1.
Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

3) Conexões com a Matemática volume 3.
Organizadora: Editora Moderna.
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

4) Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. (pág. 254 e pág. 259).

5) **Sites pesquisados**:

a) http://www.google.com.br/search?hl=pt-BR&cp=27&gs_id=36&xhr=t&q=imagem+de+Nicolau+Tartaglia&bav=on.2,or.r

b) http://www.google.com.br/search?num=10&hl=pt-BR&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1440&bih=775&q=imagem+de+circuito+eletrico&oq=imagem+de+cir&gs_l=img.1.5.0l10.1722.11071.0.16095.15.12.1.2.2.0.350.2085.5j1j4j2.12.0...0.0...1ac.1.-d6OoKzEqSY

c) http://www.google.com.br/search?hl=pt-BR&q=imagem+de+dentro+de+um+aviao&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.r_qf.&biw=1440&bih=775&um=1&ie=UTF-8&tbm=isch&source=og&sa=N&tab=wi&ei=N_ZgUNTGH-OeywHv2IHwCw

d) http://www.google.com.br/search?num=10&hl=pt-BR&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1440&bih=775&q=imagem+de+linha+de+transmiss%C3%A3o+de+energia&oq=imagem+de+linha+de+transmiss%C3%A3o+de+energia&gs_l=img.12...2415.33738.0.35432.49.10.4.35.39.0.293.946.7j0j3.10.0...0.0...1ac.1.gM6UFQ6Dvao

e) http://www.google.com.br/search?num=10&hl=pt-BR&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1440&bih=775&q=imagem+de+linha+de+transmiss%C3%A3o+de+energia&oq=imagem+de+linha+de+transmiss%C3%A3o+de+energia&gs_l=img.12...2415.33738.0.35432.49.10.4.35.39.0.293.946.7j0j3.10.0...0.0...1ac.1.gM6UFQ6Dvao#hl=pt-BR&site=imghp&tbm=isch&sa=1&q=imagem+do+conjunto+dos+n%C3%BAmeros+complexos+&oq=imagem+do+conjunto+dos+n%C3%BAmeros+complexos+&gs_l=img.12...5545750.5565336.0.5566972.66.49.0.1.1.13.965.11343.0j28j13j4j6-2.47.0...0.0...1c.1.Enwax-sGxmI&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.r_qf.&fp=3b9c380bee511ff1&biw=1440&bih=775