# AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO TP1

**Pontos positivos:**

− Houve colaboração entre os participantes e muito entusiasmo nas atividades.
− Os alunos já possuíam alguma habilidade com as ferramentas do programa Cabri Geomètric, assim desenvolveram com tranqüilidade as atividades na sala de informática.

− A turma é pequena, onze alunos, onde fica tranqüilo todos se ajudam e isso reflete no sucesso das atividades.

− Como o PT foi elaborado de acordo com a estrutura do colégio, não tive problemas em executá-lo. Tendo sido muito prazeroso acompanhar as tarefas desenvolvidas pelos alunos.

− Objetivos iniciais foram alcançados na realização das atividades.

**Pontos negativos:**

− Estamos sem técnico na sala de informática e isso prejudicou, pois alguns computadores não estão com o programa instalado, assim ficaram menos máquinas preparadas para a atividade.
− A falta de uma boa interpretação de textos, por vezes, perguntavam sobre os questionamentos feitos nos roteiros.

− Um dos meus alunos está com problemas de saúde e não está freqüentando as aulas, outro falta muito, é repetente, mas quando vem, participa das atividades. Por isso o aproveitamento da turma não é de 100%.

− Houve um feriado e uma atividade interdisciplinar nos meus dias de aula, com isso o roteiro não teve uma continuidade com seria esperado.

**Impressões dos alunos:**

− Os alunos gostaram das atividades: na sala de informática e do roteiro. Desenvolveram as atividades de forma bem integrada. Alguns alunos com mais habilidades na sala de informática, se ofereceram para auxiliarem aos demais.
−Acharam muito interessante as conclusões que chegaram. Isso demonstra um aprendizado do conteúdo básico que é realizar as operações. O que facilita avançar para as demais etapas.
− Os alunos se mostraram interessados em usar o programa Geogebra alegando ser um software livre e que poderiam praticar em casa.

**Melhoras a serem implementadas:**

− Para atender ao pedido dos alunos, vou instalar o programa Geogebra na sala de informática do colégio. Acredito que seja uma ferramenta valiosa para o aprendizado de futuros conteúdos. Também não limita o aluno em praticar as atividades apenas no colégio.
− Achei que o tempo de execução foi pouco, já que um dos itens de avaliação é o capricho com o trabalho e alguns grupos pediram para terminar em outra aula.

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ**

**COLÉGIO:** ANTÔNIO PINTO DE MORAES

**PROFESSOR:** MAGALI CATARINA BASTOS

**MATRÍCULA:** 912610-3 / 916315-5

**SÉRIE:** 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

**TUTOR (A):** THIAGO JORDEM PEREIRA

# PLANO DE TRABALHO SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

magalicbastos@yahoo.com.br

## 1. Introdução:

Tradicionalmente, no ensino da matemática, os números complexos são abordados com a seguinte definição: "um número complexo é um objeto da forma a + bi, onde $i^2 = -1$, a e b são reais, ficam mantidas as leis operatórias da Álgebra", assim o iniciante pode multiplicar e dividir complexos sem dificuldade, porém ao estudar os complexos como entes geométricos e utilizando um programa com possibilidade de tais construções, percebemos que a sua ligação à geometria nos dá uma perspectiva mais rica dos métodos geométricos típicos: coordenadas, vetores e transformações geométricas. Temos descoberto que o papel da tecnologia na exploração deste assunto ultrapassa muito a utilização da calculadora.

Os números Complexos nasceram no século XVI, na resolução de equações de 3º e 4º graus, não na resolução de equações do 2º grau tal como por vezes falaciosamente se considera. Um grande passo no estudo dos números complexos foi a sua representação visual. O matemático Caspar Wessel, em 1797, foi o primeiro a representar geometricamente os números complexos, estabelecendo uma correspondência bijetiva entre números complexos e pontos do plano cartesiano. Este trabalho foi inicialmente fadado ao esquecimento, por ter sido publicado em dinamarquês.

Em 1806 o matemático Jean Robert Argand criou a mesma representação, e a publicou em francês. Representação esta, que ficou ligada ao seu nome até os dias de hoje.

Foi o matemático Karl Friedrich Gauss que divulgou e muito usou essa representação e provou que os números complexos são necessários e suficientes para a Álgebra (Teorema Fundamental da Álgebra). A expressão *número complexo* foi introduzida por Gauss em 1832.

2. **Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:**

A abordagem conceitual de Números Complexos será feita inicialmente com o vídeo: Série - Jornal Numeral - A Matemática na História Episódio 3 do Projeto Condigital. Ainda com o auxílio da tecnologia vou mostrar com o laptop e um projetor de multimídia uma projeção de slides, sobre fractais na natureza e usando recursos tecnológicos, com observação da Matemática envolvida.

O plano está organizado em duas atividades:

A primeira atividade, após uma aula relembrando algumas ferramentas do programa Cabri-Geomètric, pois já conhecem o softerware de outras atividades. Mostrarei como os números complexos se comportam geometricamente e algumas de suas operações. Em seguida proponho um problema contextualizado para que resolvam com o auxílio do programa.

A Segunda atividade serão exercícios que terão a finalidade de criar habilidades nos alunos, não apenas de cálculos, mas também de interpretação para resolução de questões, de acordo a realidade no nosso aluno. Para isso, segui em parte o ROTEIRO DE AÇÃO 3 deste curso.

Os roteiros foram elaborados de forma a incentivar os alunos a estudar o conteúdo de forma tradicional e virtual. O uso do programa Cabri-Geomètric, permite construir e explorar de forma interativa os objetos da geometria e fazer uma ponte com o tradicional universo do lápis e papel.

- **Habilidade relacionada:**

- Identificar e conceituar a unidade imaginária.

- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.

- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.

- Calcular potências de expoente inteiro da unidade imaginária.

- **Pré-requisitos:**

– Alguma habilidade com as ferramentas do programa Cabri.

– Identificar um ponto no plano através das suas coordenadas.

– Conhecimento das leis operatórias da Álgebra.

- **Tempo de Duração:**

– Duração prevista para 200 minutos.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

− Projetor, para apresentação de vídeo, slides e demonstração do uso das ferramentas que podem ser usadas com o programa Cabri.

− Folha de atividade, computador com software Cabri-Geomètric instalado e datashow.

- **Organização da turma:**

− A classe disposta em grupos de três a quatro alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo. Porém cada aluno deverá fazer o seu próprio trabalho.

- **Objetivos:**

− Diminuir a resistência que os alunos têm em relação à geometria com atividades variadas, utilizando vários recursos para melhor fixação do conceito.

− Compreender e efetuar operações com números complexos em sua forma algébrica.

− Encontrar as potências da unidade imaginária, sem efetuar grandes cálculos, apenas por observação de recorrências.

- **Metodologia adotada:**

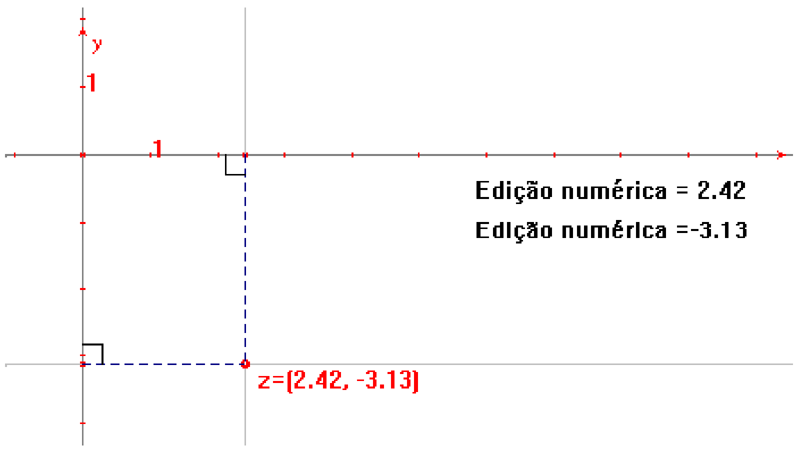
− Começar a aula com uma apresentação de slides mostrando formas geométricas encontradas no cotidiano e um breve comentário sobre fractais na natureza, no desenho geométrico e com o uso da tecnologia. O procedimento adotado para o desenho de fractais, desperta a curiosidade do processo iterativo que as formas são submetidas, requerendo lógica e raciocínio geométrico.

− Entregar para os alunos os roteiros com procedimentos da atividade, orientando para que siga os passos abaixo, para posteriormente responder a avaliação.

**Atividade 1:** Na sala de informática, farei uma aula com o auxílio do programa Cabri-Geomètric sobre Números Complexos.

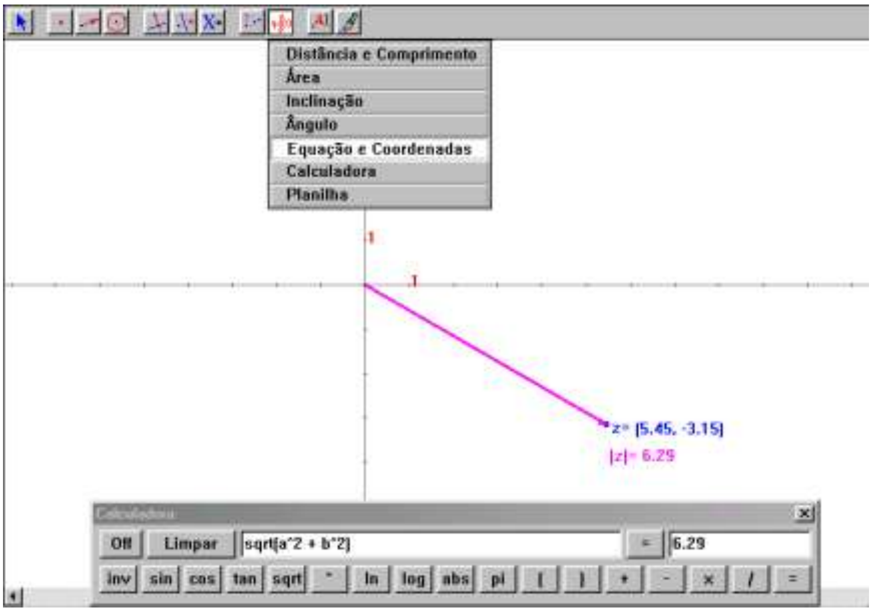
1. Complexos como par ordenado (a;b): Geometricamente, um complexo pode ser visto, como um ponto ou como um vetor no plano cartesiano. Vamos representar este ponto através do par ordenado (a;b).

1.1. Com a ferramenta edição numérica, arbitramos um valor para **a** e para **b**, transferindo as medidas para os eixos. O complexo z será a interseção das perpendiculares aos eixos que passam por **a** e **b**.




Para modificar a posição do ponto já construído, devemos alterar os valores da edição numérica. O mesmo será determinado de acordo com suas novas coordenadas. Caso queira mais que um ponto num mesmo gráfico, devem-se abrir outras edições numéricas repetindo o procedimento anterior.

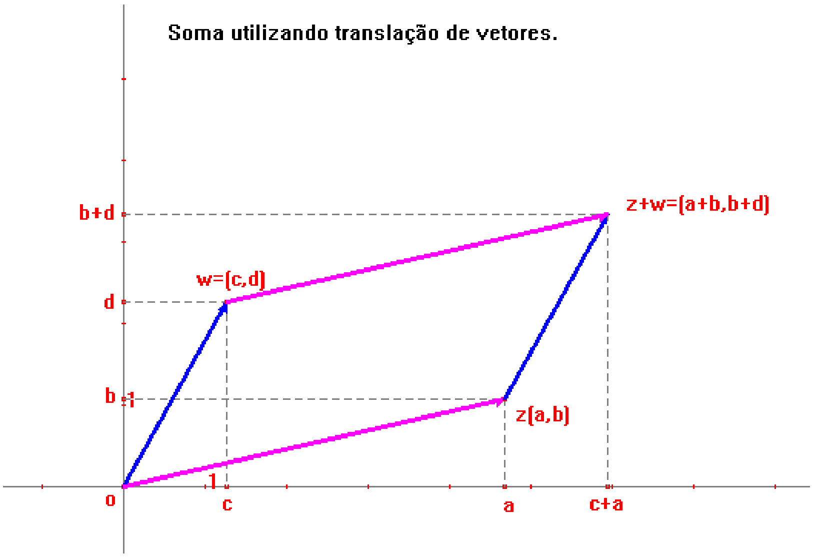
2.Módulo, ou valor absoluto, de um complexo: Módulo é a distância do complexo à origem, ou seja: se z=(x; y), então |z|= $\sqrt{x^2 + y^2}$




2.1. Para obtermos |z|= $\sqrt{x^2 + y^2}$ geometricamente, pedimos as coordenadas de z e com a ferramenta calculadora do próprio programa obtemos |z|, que é a distância entre a origem e z.

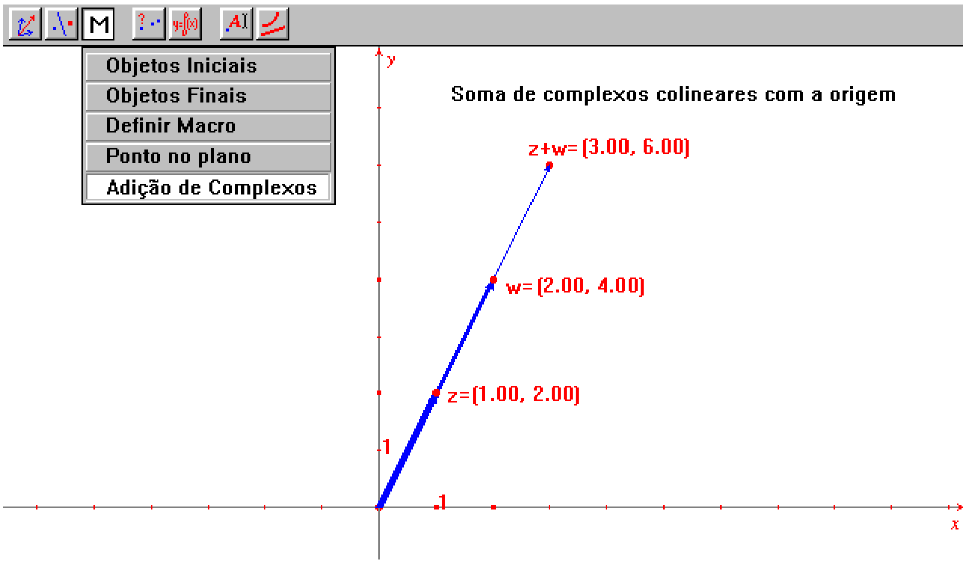
3. Adição de complexos:

A adição de complexos é a adição usual de vetores no plano, ou seja: por definição, (a;b)+(c;d)=(a+c;b+d).



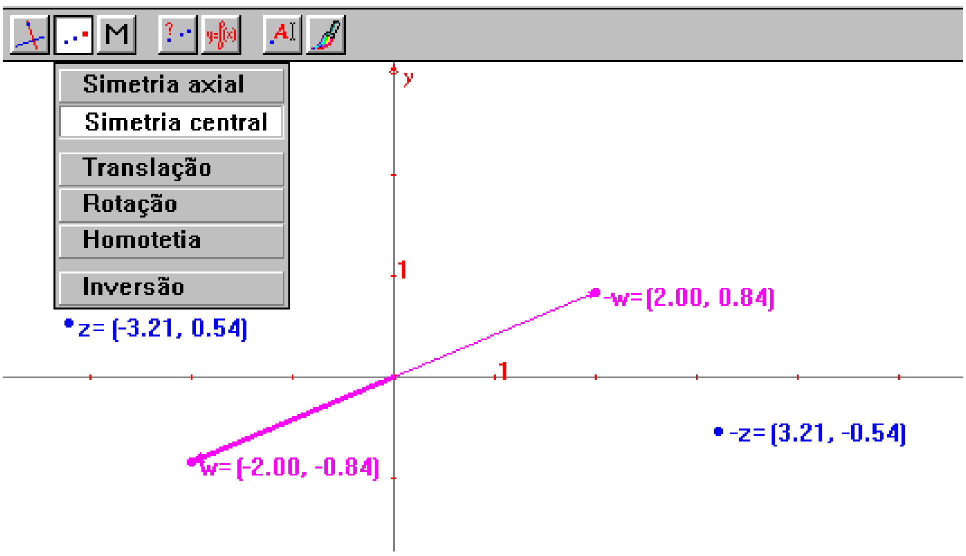

De acordo com esta interpretação, o complexo z+w=(a+c;b+d) pode ser obtido transladando o ponto z=(a;b) pelo vetor w=(z,d), obtendo então o conhecido paralelogramo.

3.1. Podemos observar que o paralelogramo se reduz a um segmento de reta, quando os pontos são colineares com a origem. Verificaremos com a soma dos complexos z=(1;2), e w=(2;4), utilizamos a macro Adição de complexos para tal construção.

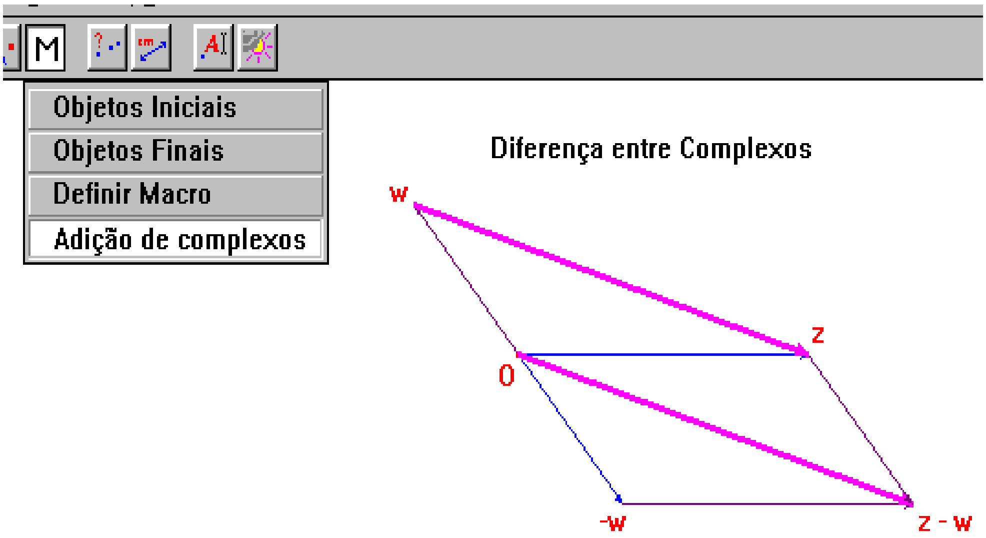



3.2. Também podemos encontrar z+w com a ferramenta soma de vetores, para isto basta indicar os vetores que desejamos somar.

3.3. Cada complexo w=(a;b) tem um simétrico que é –w=(- a; -b). Podemos fazer o simétrico de um ponto ou de um vetor em relação a origem utilizando a ferramenta “simetria central”, repare que as coordenadas têm seus sinais trocados.

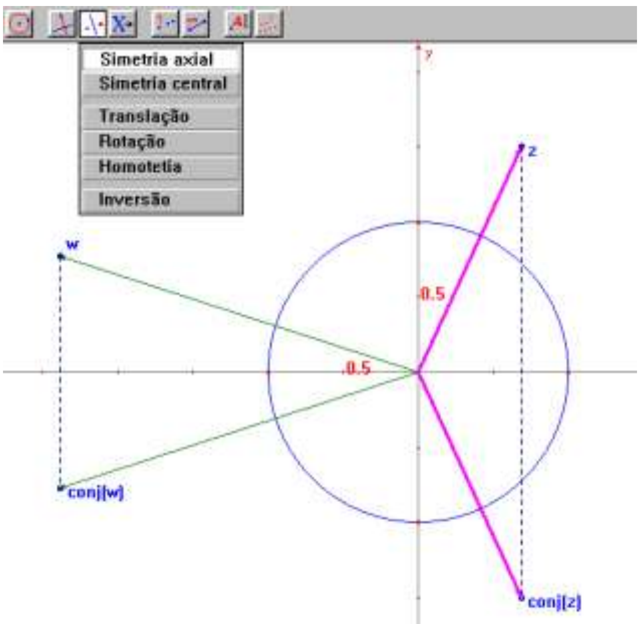


3.4. Podemos representar geometricamente a diferença z - w entre complexos como z+ (-w), podendo visualizar que |z – w| corresponde a distancia entre **w** e **z.**




4. Conjugado:

Sendo z=(a;b), o conjugado de z é (a;-b), utilizamos a simetria axial do complexo em relação ao eixo das abscissas.



Agora, apresentarei de um problema contextualizado para que o aluno possa com o auxílio do programa de geometria dinâmica, visualizar o número complexo com um par ordenado no plano, reconhecer o seu simétrico e conjugado pois serão de grande valia para operações como subtração e divisão.

Um engenheiro localizou onde deveria perfurar o solo para realização de sondagens em um terreno. Formou um quadrado cujo um dos vértices é dado pelas imagens geométricas do número complexo z=$\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ , e seus outros vértices são $\bar{z}$, $-z$ e $\overline{-z}$.
Construindo este quadrado no plano, podemos afirmar que:

a) $\bar{z} = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$

b) $-z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

c) $\overline{-z} = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

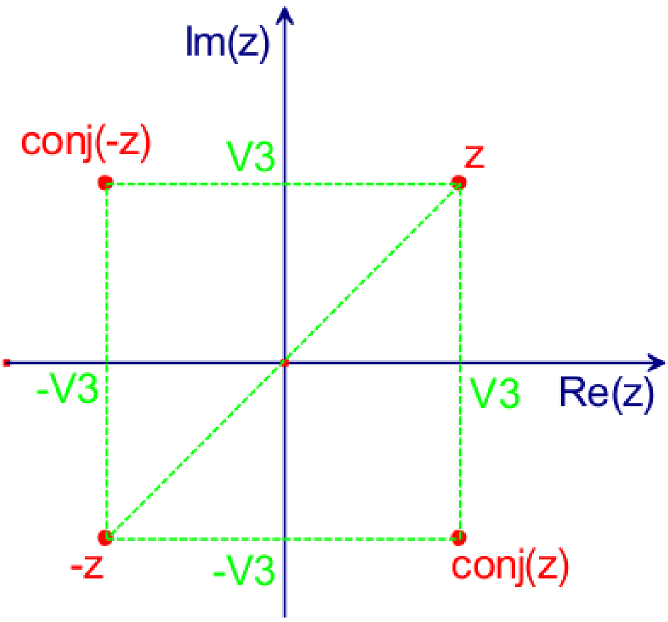
d) z = $\overline{-z}$

e) $\bar{z}$ = $-z$

**Solução:**

1. Construir um plano com o eixo dos reais e eixo dos imaginários.
2. Localizar o número complexo z=$\sqrt{3} + \sqrt{3}i$.
3. Localizar $\bar{z}$, sendo z = (a;b), o conjugado de z é (a;-b), utilizamos a simetria axial do complexo em relação ao eixo das abscissas. A resposta correta deveria ser: $\bar{z} = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$
4. Localizar – z, cada complexo z = (a;b) tem um simétrico que é – z = (- a; -b).

   Podemos fazer o simétrico de um ponto ou de um vetor em relação à origem, repare que as coordenadas têm seus sinais trocados. Onde o resultado correto seria: $-\mathrm{z} = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$
5. Localizar $\overline{-z}$, que é o conjugado do simétrico. Basta para isso fazer a simetria axial de – z em relação ao eixo das abscissas. Assim teremos: $\overline{-z} = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ conforme a letra c da questão.
6. Assim teremos no plano:




Obs: considere V3 = $\sqrt{3}$ , pois o programa não oferece o radical.

Atividade 2) **Já que o procedimento da soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma ax + b.**

**Sob esta ótica, temos, por exemplo:**

**z = 2 + 3i; w = 5 + 2i**

**z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i**

1) Agora efetue as somas z + w abaixo:

a. z = 3; w = 5

b. z = 2i; w = 4i

c. z = 5; w = 3i

d. z = 2 + 3i; w = 3

e. z = 3 + 5i; w = 3 + 2i

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2. Agora, efetue $z – w$ nos casos abaixo:

a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 – 4i$

b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 – 5i$

c. $z = 3 – 5i$; $w = -2 + 4i$

3. Tente agora efetuar as seguintes operações:

a. $z = 1,5 + 5,4i$; $w = -3,1 - 1,2i$. Sendo assim, determine $z + w$.

b. $z = - \pi + 5,17i$; $w = 8,9 + 3,6i$. Sendo assim, determine $w - z$.

Dica: Tente fazer usando $\pi = 3,14$. Depois, calcule usando a representação $\pi$, sem aproximações.

c. $z = 44,3 - 1,8i$; $w = 4,2 + 2,7i$; $v = -i$. Sendo assim, determine $z - w + v$.

Pronto! Agora você já é capaz de realizar somas e subtrações entre números complexos quaisquer!

Multiplicação e Divisão

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como

uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra da “racionalização do denominador de uma fração”? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1. Inicialmente, tentem efetuar a operação z * w, com z = 3 + 2i e w = 4.

2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação z * w, com z = 2 + 4i e w = 3i. Não se esqueça que, como i = $\sqrt{-1}$ , podemos considerar que $i^2 = -1$.

3. Efetue z * w, com z = 2 – 3i e w = 5 – i.

A partir deste ponto, você já deve estar em condições de efetuar o produto entre dois comple-xos na forma algébrica. Mas, e a divisão?

4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: z : w, com z = 6 – 4i e w = 2.

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:

5. z : w, com z = -9i e w = 3i.

6. z : w, com z = 6 – 4i e w = 2i.

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.

A divisão de números complexos na forma a + bi pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.

Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta idéia:

5. z : w, com z = 4 – 3i e w = 2 + i

Com isto você já tem condições de trabalhar com as 4 operações básicas dentro do conjunto dos números complexos.

Uma nota final ainda cabe. Quando você aprendeu sobre a potenciação, provavelmente ouviu falar nela como “multiplicar repetidas vezes”. Mas antes, você deve saber como trabalhar com as potências da unidade imaginária.

Responda a seqüência abaixo:

8. Qual o valor de $i^2$?

9. Você pode, a partir do valor de $i^2$, obter o valor de $i^3$? Como?

10. Agora que você tem o valor de $i^3$, é capaz de calcular $i^4$? Como?

11. O que aconteceu no momento em que calculou o valor de $i^4$? Você consegue explicar o motivo?

12. Obtenha os valores de $i^5$, $i^6$, $i^7$ e $i^8$.

Notou algo "estranho"? Acontece que as potências de i formam uma sequência que percorre um ciclo de valores: i, -1, -i, 1. Com isto, para saber o valor de qualquer potência de i, basta verificar em que ponto da sequência a potência desejada se encontra.
Vamos verificar?

13. Calcule $i^{10}$.

Você já viu que $i^0$ = 1, $i^1$ = i, $i^2$ = -1, $i^3$ = -i, $i^4$i= 1, $i^5$ = i, etc. Se continuarmos com a sequência, logo notamos que $i^{10}$ deve ser igual a -1. Mas e se quiséssemos o valor de $i^{135}$? É necessário encontrar um modo de não precisar escrever a sequência completa todas as vezes... E há um modo!!
Verificando os resultados das potências de i, podemos notar uma relação entre os expoentes e os valores dos resultados.

14. Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.
Uma dica: esta relação refere-se ao "tempo" que leva até que um valor seja repetido.

15. Encontre o valor das seguintes potências de i:

a) $i^{21}$

b) $i^{87}$

c) $i^{221}$

d) $i^{1024}$

Agora você já pode calcular potências de números complexos em geral.

16. Efetue $(2 + 3i)^2$

No caso do item 16, você pode ter optado por utilizar o produto notável “quadrado da soma”.

17. Agora que você já sabe como efetuar multiplicações, divisões e potenciações, efetue as operações solicitadas:

a) z * w, sendo que z = -1 + i; w = 3 + 5i

b) z : w, sendo que z = 5 + 4i; w = -i

c) w : z, sendo que z = 2 - 2i; w = 5 + 2i

d) z * w, sendo que z = 2 + 2i; w = 2 - 2i

e) w : z, sendo que z = 4; w = 4 + 3i

g) $z^2$, sendo que z = 4 + 2i

18. Faça um breve comentário da opinião do grupo sobre as atividades feita. Aspectos positivos e negativos.

## 3. Avaliação:

Os critérios de avaliação adotados serão através de:

− Observação da participação em grupo e atitude diante das dificuldades (20%).
− Organização e capricho na apresentação dos trabalhos (10%).
− Respostas de questionários com coerência (30%).
− Resolução correta das questões (40%).

## 4. Referências:

Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MC/SEF, 1998.

Bastos, Magali C. *Complexos no Cabri*, Monografia do curso de Especialização em Aprendizagem Matemática: UERJ, 2004.

ROTEIROS DE AÇÃO – Números Complexos – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 25/08/2012.

Pereira, Ana Paula C. & Pereira, Vinicius M. C. *Estudando Geometria através do Cabri-Geometre II*. Bahia: Anais IX ENEM, Universidade de Belo Horizonte, 2007.

Barroso, Juliane M. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2010.

Name, Miguel Assis. *Tempo de Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil, 1996.

Paiva, Manoel. *Matemática Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009.

Smole, Kátia S. & Diniz, Maria Ignez. *Matemático Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva, 2008.

**Endereços eletrônicos acessados de 15/08/2012 a 02/09/2012, citados ao longo do trabalho:**

http://www.portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=31019

http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal

http://www.cabri.com.br/index.php