

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
PROFESSOR: RAFAEL SANCHES BORGES

AVALIAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 1 –

NÚMEROS COMPLEXOS

Todas as atividades do Plano de trabalho 1 foram executadas com certa facilidade por todos os alunos. Estes se mostraram bem empolgados na realização das tarefas. Os objetivos foram alcançados de maneira satisfatória. Pude notar que os alunos se mostram mais interessados e participativos quando trabalhamos de forma prática, com atividades mais concretas e dentro de suas realidades.

Na atividade do vídeo, os alunos se interessaram bastante, pois puderam notar que o números complexos pode ser utilizada para resolver situações-problema do dia-a-dia. Pude notar que os discentes construíram o conceito e aprenderam o conteúdo exigido por esta atividade. Sempre trabalhei com vídeos e isso facilitou o bom andamento da aula, pois não era nenhuma novidade e os alunos participaram de modo adequado.

A atividade seguinte também foi muito produtiva. Os alunos se mostraram motivados e empolgados em realizá-la. Foi um momento muito gostoso e de grande importância para o aprendizado. Notei nesta atividade que os alunos possuem muita dificuldade na interpretação de problemas, muitas vezes tive que ler parte por parte da situação-problema para que eles conseguissem montar a fórmula que representasse tal situação. Todos os grupos conseguiram realizar as atividades, alguns com facilidade outros com bastante dificuldade, mas todos demonstraram vontade em aprender e acertar e isso é fundamental para que haja aprendizado.

Achei válida a experiência e, com certeza, me utilizarei de atividades mais dinâmicas para abordar todos os outros conteúdos. É meio utópico querer que todos os alunos aprendam e participem de forma ativa de todas as atividades, mas fico feliz em ver que a grande maioria se mostrou interessada, participativa e com vontade de aprender.

PLANO DE TRABALHO SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

1. Introdução:

Historicamente, os números complexos começaram a ser estudados graças à grande contribuição do matemático Girolamo Cardano (1501-1576). Esse matemático mostrou que mesmo tendo um termo negativo em uma raiz quadrada era possível obter uma solução para a equação do segundo grau: $x^2 - 10x + 40 = 0$. Essa contribuição foi de grande importância, pois até então os matemáticos não acreditavam ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. A partir dos estudos de Girolamo Cardano, outros matemáticos estudaram sobre esse impasse na matemática, obtendo uma formalização rigorosa com Friedrich Gauss (1777-1855).

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

Portanto, nessa seção serão abordados assuntos como: concepções básicas do número complexo, operações aritméticas com números complexos, operações trigonométricas com os números complexos, o Plano de Argand-Gauss, entre outros artigos que se relacionam com os números complexos – números de grande importância e aplicabilidade.

Um pré-requisito básico para se aprender operações com números complexos na forma algébrica são : operações com números inteiros , equações do 2º grau e plano cartesiano.

Atividade 1: Vídeo: Sistema de equação

- **Habilidade relacionada:**

- **H 36** – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

- **Pré-requisitos:**

- operações com números inteiros
- equações do 2º grau
- plano cartesiano.
- **Tempo de Duração:** 4aulas/200 min
- **Recursos Educacionais Utilizados:**
- Vídeo;
- Power Point;
- Lista de situações-problemas.
- **Organização da turma:**

Pequenos grupo de 2 ou 3 alunos;

▪ **Objetivos:**

- Efetuar a adição de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
- Efetuar a subtração de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
- Efetuar a multiplicação de dois ou mais números complexos na forma algébrica;

▪ **Metodologia adotada:**

Exibição do vídeo: Números Complexos – Parte 1

http://www.youtube.com/watch?v=XdrACgjuaNM&feature=player_detailpage

Após a exibição do vídeo, debater com os alunos sobre a importância dos números complexos

Em seguida, dividir a turma em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos. Cada grupo receberá uma situação-problema para ser resolvida e após, compartilhada com os demais grupos.

Lista de situações problemas:

Adição

Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao adicionarmos teremos:

$$z_1 + z_2$$

$$(a + bi) + (c + di)$$

$$a + bi + c + di$$

$$a + c + bi + di$$

$$a + c + (b + d)i$$

$$(a + c) + (b + d)i$$

Portanto $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Ex: Dado dois números complexos $z_1 = 6 + 5i$ e $z_2 = 2 - i$, calcule a sua soma:

$$z_1 + z_2$$

$$(6 + 5i) + (2 - i)$$

$$6 + 5i + 2 - i$$

$$6 + 2 + 5i - i$$

$$8 + (5 - 1)i$$

$$8 + 4i$$

Portanto, $z_1 + z_2 = 8 + 4i$.

Subtração

Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao subtraímos teremos:

$$z_1 - z_2$$

$$(a + bi) - (c + di)$$

$$a + bi - c - di$$

$$a - c + bi - di$$

$$(a - c) + (b - d)i$$

$$\text{Portanto, } z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

Ex:Dado dois números complexos $z_1 = 4 + 5i$ e $z_2 = -1 + 3i$, calcule a sua subtração:

$$(4 + 5i) - (-1 + 3i)$$

$$4 + 5i + 1 - 3i$$

$$4 + 1 + 5i - 3i$$

$$5 + (5 - 3)i$$

$$5 + 2i$$

$$\text{Portanto, } z_1 - z_2 = 5 + 2i.$$

Multiplicação

Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao multiplicarmos teremos:

$$z_1 \cdot z_2$$

$$(a + bi) \cdot (c + di)$$

$$ac + adi + bci + bdi^2$$

$$ac + adi + bci + bd(-1)$$

$$ac + adi + bci - bd$$

$$ac - bd + adi + bci$$

$$(ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{Portanto, } z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Ex:Dado dois números complexos $z_1 = 5 + i$ e $z_2 = 2 - i$, calcule a sua multiplicação:

$$(5 + i) \cdot (2 - i)$$

$$5 \cdot 2 - 5i + 2i - i^2$$

$$10 - 5i + 2i + 1$$

$$10 + 1 - 5i + 2i$$

$$11 - 3i$$

$$\text{Portanto, } z_1 \cdot z_2 = 11 - 3i.$$

A resolução de uma equação do 2º grau consiste em determinar os possíveis valores da incógnita em relação ao valor do discriminante. As condições para a determinação do conjunto solução são as seguintes:

$\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas, $x' \neq x''$.

$\Delta = 0$, a equação possui raízes reais iguais, $x' = x''$.

$\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Observe que as condições foram determinadas dentro do conjunto dos números reais, e nesse conjunto numérico quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes. Isso ocorre porque o valor do discriminante é aplicado na fórmula resolutiva de Bháskara dentro de uma raiz quadrada, veja:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Pelo conjunto dos números reais e pela regra operatória de raízes quadradas, não existe solução quando o radicando é um número negativo, isto é, não existe raiz quadrada de números negativos, pois não existe número elevado ao quadrado que resulta em negativo. Nesse caso, quando deparamos com uma equação do 2º grau, na qual o cálculo do discriminante resulta em número negativo, dizemos que não existe solução da equação pertencente aos números reais.

Essas equações, somente terão conjunto solução dentro do conjunto dos números complexos, pois nesse espaço utilizamos uma unidade imaginária, representada por $i^2 = -1$. Portanto, caso o discriminante seja negativo, utilizamos essa técnica dos números complexos. Observe:

$$\begin{aligned}\sqrt{-4} &= \sqrt{(-1) * 4} = \sqrt{i^2 * 4} = \sqrt{4i^2} = 2i \\ \sqrt{-25} &= \sqrt{(-1) * 25} = \sqrt{i^2 * 25} = \sqrt{25i^2} = 5i \\ \sqrt{-100} &= \sqrt{(-1) * 100} = \sqrt{i^2 * 100} = \sqrt{100i^2} = 10i \\ \sqrt{-225} &= \sqrt{(-1) * 225} = \sqrt{i^2 * 225} = \sqrt{225i^2} = 15i\end{aligned}$$

Vamos utilizar essa característica referente à unidade imaginária dos números complexos na determinação das raízes da seguinte equação do 2º grau: $4x^2 - 4x + 2 = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-4)^2 - 4 * 4 * 2 \\ \Delta &= 16 - 32 \\ \Delta &= -16\end{aligned} \quad \begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-16}}{2 * 4} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 * (-1)}}{8} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 * i^2}}{8} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 4i}{8} \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{4 + 4i}{8} = \frac{1 + i}{2} \\ x'' &= \frac{4 - 4i}{8} = \frac{1 - i}{2} \end{aligned} \right.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x' = \frac{1+i}{2}; x'' = \frac{1-i}{2} \right\}$$

EXERCÍCIOS

- 1) Determine o valor de x , de modo que o número complexo seja um número real : $Z = -5 + (3x + 18)i$
- 2) Calcule o valor de y , de modo que o número complexo seja um número imaginário puro : $Z = (y^2 - 7y + 10) + 2i$
- 3) Simplifique as expressões :
 - a) $i^{12} + i^{22} - i^{102}$
 - b) $i^{63} - i^{92} + i^{1001}$
 - c) $(1+i)^{12}$
 - d) $(1-i)^{18}$
- 4) Resolva as seguintes equações em \mathbb{C} (números complexos)
 - b) $3x^2 - 6x + 30 = 0$
 - c) $3x^2 + 79 = 4$
- 5) Resolva as operações com números complexos sendo :

$Z_1 = 3 - 2i$

$Z_2 = 2 + 5i$

$Z_3 = -2 - i$

 - a) $Z_1 + Z_2$
 - c) $Z_1 \cdot Z_2$
 - b) $Z_1 - Z_3$
 - d) $Z_1 \cdot Z_2$

Atividade 2:

Habilidade relacionada:

- **H 36** – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Pré-requisitos:

- Operações com Números Inteiros
- Operações com Números Racionais
- **Tempo de Duração:** 4 aulas/200 min

Recursos Educacionais Utilizados:

- Folha branca;
- Quadro branco e pincel.

Organização da turma:

Pequenos grupo de 2 ou 3 alunos;

Objetivos:

- Efetuar a multiplicação de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
- Efetuar a divisão de dois ou mais números complexos na forma algébrica.

▪ **Metodologia adotada:**

Exibição do vídeo: Números Complexos – Parte 2

http://www.youtube.com/watch?v=XdrACgjuaNM&feature=player_detailpage

Após a exibição do vídeo, debater com os alunos sobre a importância dos números complexos

Dividir a turma em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos. Cada grupo deverá criar uma situação-problema para ser resolvida utilizando números complexos. Em seguida, os grupos trocarão os problemas criados para que possam ser resolvidos por outro grupo.

2. Avaliação:

Atividade 1 – Os alunos serão avaliados em dois momentos. De forma escrita, na resolução da situação-problema sugerida e de forma oral, na explicação da resolução do problema para os outros alunos na lousa. Também será avaliada a participação no debate relativo ao vídeo proposto.

Atividade 2 – A avaliação será escrita e individual com resolução de problemas.

3. Referências:

- PAIVA, Manoel; Matemática Paiva . Volume 3 1ª edição . São Paulo: Editora Moderna , 2009.
- Vídeos Youtube. Disponível em:< <http://www.youtube.com/watch?v=gWkuLFT6jgg>
> acesso em 29/08/2012.
- BENIGNO Barreto Filho, Claudio Xavier da Silva . Matemática Aula Por Aula ..1ª edição Volume Único .São Paulo: Editora FDT, 2000.
- GIOVANNI, José Rui;; GIOVANNI JR., José Rui. Matemática Completa . 3ª série do Ensino Médio. 2ª edição. São Paulo: FTD, 2009.