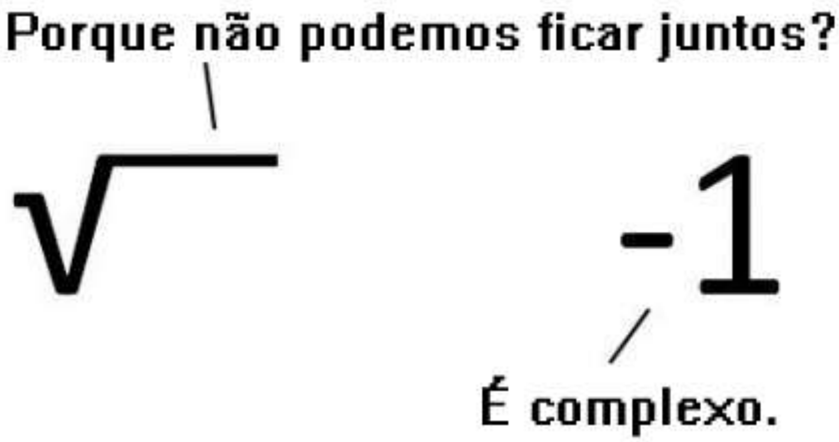
Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 3º Ano – 3º Bimestre /2012

Plano de Trabalho



Números Complexos

Cursista: Renata Cano Mendonça C. de Paula

Tutor: Cláudio Rocha de Jesus

Sumário

Introdução

Este trabalho nasceu através de uma proposta da formação continuada, onde professores além de se atualizar, são incentivados a procurar meios de ensinar os conteúdos de forma mais atraente e dinâmica, onde não seja apenas um professor apresentando um tema para seu aluno e sim convidando a participar e construir o conhecimento do mesmo.

O objetivo é abordar números complexos de forma que leve o aluno a ter interesse pelo estudo, de forma mais dinâmica e não apenas mais uma matéria

Antes de elaborar esse plano de trabalho, os mesmos tiveram acesso a um rico material sobre o tema, e podemos ajustá-lo a nossa realidade e necessidade. O trabalho foi iniciado com o Revisitando – Um encontro inesperado com os números complexo, roteiro disponibilizado pelos organizadores deste curso, e desenvolvido com outros planos de ação que serão desenvolvidos ao longo do trabalho.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1 – Números complexos: Um encontro inesperado.

- Duração Prevista: 100 minutos.
- Área de Conhecimento: Matemática
- Assunto: Números Complexos
- Objetivo: Apresentar os números Complexos como mais uma ferramenta matemática.
- Pré-requisitos: Operações elementares dom números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica; determinação das raízes de uma função a partir de sua representação algébrica. Produtos notáveis.
- Material necessário: Folhas de atividades.
- Organização da classe: Individualmente.
- Descritores Associados: H – 36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.
- Metodologia Adotada:

Números Complexos

Um pouco de história:

G. Cardano e R. Bombelli, ao resolverem equações algébricas polinomiais cúbicas. Estes italianos estavam preocupados com a resolução de equações do tipo: $x^3 = ax + b$,

Utilizando técnicas, tais como a fórmula de Cardano-Tartaglia, depararam-se com raízes quadradas de números negativos.

A fórmula de Cardano-Tartaglia é uma fórmula para solução de equações incompletas de grau 3, análoga à famosa fórmula para equações de grau 2, erroneamente atribuída a Bhaskara. Veja a fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Cardano, em 1545, ao tentar resolver a equação $x^3 = 4 + 15x$, utilizando a fórmula acima, chegou à seguinte solução:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Como esta equação é de grau ímpar, ela necessariamente possui pelo menos uma raiz real. Além disso, nesse caso específico x = –4 é uma raiz real fácil de ser identificada. No entanto, diante de grandezas desconhecidas, nesse caso $\sqrt{-121}$, Cardano desiste, deixando de lado o fato de que essa expressão, apesar de envolver um número "impossível", gera um número natural.

Bombelli, algum tempo depois, teve a idéia louca de operar com números da forma a + b $\sqrt{-1}$, onde a, b, $\in$ R, utilizando as propriedade dos números reais como se $\sqrt{-1}$ fosse apenas uma incógnita com a propriedade $(\sqrt{-1})^2 = -1$

Desta forma, Bombelli verificou que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ e } (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$$

Utilizando a propriedade distributiva, sintetizada no produto notável

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

, Bombelli conclui, então, que:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 2+2=4$$

Ou seja, mesmo sem conhecer o "valor" de $\sqrt{-1}$, assim como Cardano, Bombelli consegue operar com ele e chegar a solução esperada!

Agora Vamos ao que interessa!

Números Complexos:

Z = a + bi, onde a é a parte real e b a parte imaginária.

Classificação:

- Se a = 0, chamamos de imaginário puro e tem a formação z = bi;
- Se b = 0, chamamos de real e tem a formação z = a;

Igualdade entre números complexos

Dois números complexos são iguais se, e somente se, apresentam simultaneamente iguais a parte real e a parte imaginária. Assim, se z_1=a+bi e z_2=c+di, temos que:

$z_1=z_2$<==> a=c e b=d

Potências de i

Se, por definição, temos que i = - $(-1)^{1/2}$, então:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2=-1.-1=1$

$i^5 = i^4. 1=1.i= i$

$i^6 = i^5. i =i.i=i^2=-1$

$i^7 = i^6. i =(-1).i=-i$ ......

Observamos que no desenvolvimento de i^n (**n** pertencente a ***N***, com **n** variando, os valores repetem-se de **4** em **4** unidades. Desta forma, para calcularmos i^n basta calcularmos $\mathbf{i^r}$ onde**r** é o resto da divisão de **n** por **4**.

Exemplo:

i^{63} => 63 / 4 dá resto 3, logo $i^{63}=i^3=-i$

Multiplicação de números complexos

Para multiplicarmos dois números complexos basta efetuarmos a multiplicacão dois dois binômios, observando os valores das potência de **i**. Assim, se z_1=a+bi e z_2=c+di, temos que:

$z_1.z_2$ = a.c + adi + bci + bdi^2

$z_1.z_2$= a.c + bdi^2 = adi + bci

$z_1.z_2$= (ac - bd) + (ad + bc)i

Observar que : i^2= -1

Conjugado de um número complexo

Dado z=a+bi, define-se como conjugado de z (representa-se por z^-) ==> z^-= a-bi

Exemplo:

z=3 - 5i ==> z^- = 3 + 5i

z = 7i ==> z^- = - 7i

$z = 3 \implies \bar{z} = 3$

Divisão de números complexos

Para dividirmos dois números complexos basta multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Assim, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$z_1 / z_2 = [z_1.\bar{z_2}] / [z_2\bar{z_2}] = [\ (a+bi)(c-di)\ ] / [\ (c+di)(c-di)\ ]$

Exercícios para praticar !!!!

1. Calcule as seguintes somas:
   a) (2 + 5i) + (3 + 4i) b) i + (2 - 5i)

2. Calcule as diferenças:
   a) (2 + 5i) - (3 + 4i) b) (1 + i) - (1 - i)

3. Calcule os seguintes produtos:
   a) (2 + 3i) (3 - 2i) b) (1 + 3i) (1 + i)

4. Escreva os conjugados dos seguintes números complexos:
   a) 3 + 4i b) 1 - i

5. Efetue as seguintes divisões de números complexos:
   a) $\dfrac{-10+15i}{2-i}$ b) $\dfrac{1+3i}{1+i}$

6. Calcule as potências:
   a) $(1 + i)^2$ b) $(-2 + i)^2$

7. Sendo $\mathbf{z = (m^2 - 5m + 6) + (m^2 - 1).i}$, determine **m** de modo que **z** seja um imaginário puro.

8. Determine a parte real do número complexo $z = (1 + i)^{12}$.

9. Calcule o número complexo $i^{126} + i^{-126} + i^{31} - i^{180}$
10. A soma de um número complexo z com o triplo do seu conjugado é igual a (-8 - 6i). Calcule $\bar{z}$.
11. (FESP/UPE) - Seja z = 1+ i , onde i é a unidade imaginária. Calcule a potência z^8.

AVALIAÇÃO

Esta tem que ser feita durante toda a aplicação do roteiro de ação. O professor tem que observar como seus alunos reagem ao contexto histórico e todo o embasamento teórico que o conteúdo requer.

Na página 07 deste trabalho, tem um exemplo de uma atividade prática para ser realizada, a intenção é aplicá-la após ter sido feito vários exercícios sobre o descrito H-36. A atividade deve ser individual e deve ter duração de 100 minutos.

Depois da avaliação o professor deverá perceber se as competências necessárias para desenvolver o conteúdo foram alcançadas. Caso não aconteça o previsto cabe a este procurar uma ferramenta para levar o seu aluno a recuperar e desenvolver tal competência.

Avaliação da implementação em sala de aula

Pontos positivos:

- Melhora na abordagem nas aulas;
- Melhora na dinâmica;
- Plano de aulas mais organizado;

Pontos Negativos:

- Falta de estrutura na escola para determinadas aplicabilidades.

Alterações:

- Não faria nenhuma alteração.

Impressões dos alunos:

- Depois que comecei a fazer as aulas no padrão da proposta, senti os alunos mais motivados e interessados, além do desempenho ter melhorado muito.

Referências Bibliográficas:

ROTEIROS DE ACAO –Números Complexos – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3o ano do Ensino Médio – 3o bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br.

Endereços eletrônicos acessados:

http://www.faculdadecatuai.com.br/downloads/Normas.pdf

http://www.mundovestibular.com.br/articles/4619/1/NUMEROS-COMPLEXOS/Paacutegina1.html