**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**
**Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ**
**Plano de trabalho - Números Complexos**
**Matemática - 3ª série – Ensino Médio**
**3º bimestre/2012**
**Professora Cursista: Selma Figueiredo Pontes**
**Tutor: Edeson dos Anjos Silva**
**Grupo: 4**

# AVALIAÇÃO DA EXECUÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 1 – NÚMEROS COMPLEXOS

## Pontos positivos

Entendemos que este Plano de Trabalho certamente servirá para ampliar o horizonte de nosso conhecimento a respeito dos números complexos, na medida em que nos faz refletir sobre a contribuição em sala de aula com alunos, como um todo. Temos consciência de que nem tudo que é trabalhado em sala de aula tem necessariamente uma aplicação imediata, todavia não se pode pensar num ensino em que, a cada momento, se possa visualizar sua aplicabilidade, por isso foi importante, ressaltar a formação do ser humano em sua integralidade e não apenas nos objetivos de aprendizagem, para despertar o interesse dos alunos

Um ponto extremamente positivo nesse processo foi a motivação e a entrega dos alunos durante as atividades, principalmente a dos monitores dos grupos.

Para mim, enquanto profissional foi muito interessante o uso do Geogebra, não deixarei mais de fazer uso desse recurso, com certeza. Também fiz uso de algumas atividades do roteiro de ação que muito enriqueceu as minhas aulas.

## Pontos negativos

Alguns alunos apresentam pouco interesse e a maioria deles não apresenta a construção de conhecimentos em: potências, equações do 2º grau, Plano Cartesiano Ortogonal, produtos notáveis, regra de sinais, etc, fazendo-se necessário provocar a motivação nos alunos; recordar e explicar esses conteúdos, num espaço curto de tempo - quatro horas/aula semanais- pois os mesmos não fazem reforço escolar. Por isso, fiquei com o tempo muito limitado.

**Alterações**

Pude perceber pelos resultados dos exercícios propostos em grupo, pela atividade individual e pela fala de alguns alunos, a necessidade de reservar mais aulas para desenvolvimento de atividades, por isso sempre estou voltando ao assunto, acrescentei mais exercícios contextualizados, assim como, resolução de problemas envolvendo leitura, interpretação e produção de textos matemáticos relativos aos conceitos abordados; e elaboração de problemas usando argumentação consistente, para atrair e dar mais significado ao ensino-aprendizagem.

**Impressões dos alunos**

Ao introduzir o assunto observei certa má vontade. Logo depois a reação foi boa, empolgados resolveram bem os exercícios. Mas num dado momento, pude constatar que necessitavam de mais atividades. Tiveram dificuldade na resolução de exercícios envolvendo divisão. Mesmo baseado nas dificuldades apresentadas, e entendendo que a ausência de pré-requisitos é evidente, o objetivo era verificar que conhecimentos eles tinham construídos, posso dizer, portanto, que tais objetivos foram alcançados.

# Plano de Trabalho
# Números Complexos

## INTRODUÇÃO

Números complexos é objeto de muitos questionamentos a respeito da melhor maneira de apresentá-los em sala de aula, bem como de suas aplicações e conexões com outros tópicos da matemática. Podemos observar que um dos grandes fatores que contribuem para que o estudo de números complexos não apresente aplicabilidade no dia-a-dia, vem da forma de como aprendemos e ensinamos a matemática. Por esta razão, é muito importante conhecermos os problemas que envolveram o seu surgimento e o seu desenvolvimento.

A descoberta do número como abstração de quantidades observadas no cotidiano foi o primeiro, e talvez o mais importante, feito matemático da humanidade.

Este Plano de Trabalho de números complexos tem por objetivo permitir que os alunos conheçam um pouco da história de como a Matemática foi se construindo pelas mãos dos seres humanos, em sua cultura e tempo, bem como possam rever e aprofundar os conhecimentos que possuem sobre as operações e suas aplicações na resolução de equações. Possam também, aprender a representá-los geometricamente em um plano e resolver esse e outros problemas.

É importante que os alunos tenham construído conhecimento em potências, equações do 2º grau, Plano Cartesiano Ortogonal e produtos notáveis.

## DESENVOLVIMENTO

Nesta etapa, espera-se que os alunos compreendam o contexto histórico que envolve o surgimento e reconhecimento dos números complexos da Matemática; identifique os números complexos em sua forma algébrica, bem como compreenda sua representação geométrica; resolva equações do 2º grau cujas raízes são números complexos; estabeleça relações entre os números complexos e a geometria analítica. A habilidade relacionada é **H-36-** efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

A duração prevista deverá ser de **dez horas/aula** (**quinhentos minutos**), aproximadamente, três semanas. E, os Recursos utilizados serão o livro didático, projetor multimídia, vídeos do youtube; Software Geogebra.

A turma deverá ser organizada, primeiramente de forma individual e, a seguir, dividida em pequenos grupos (dois ou três alunos).

No primeiro momento **( 2 aulas = 100 minutos)** será contada a História de Electro Man, a seguir, a introdução do conceito e a história dos números complexos, usando o vídeo. Posteriormente, serão abordados os tópicos apresentados abaixo.

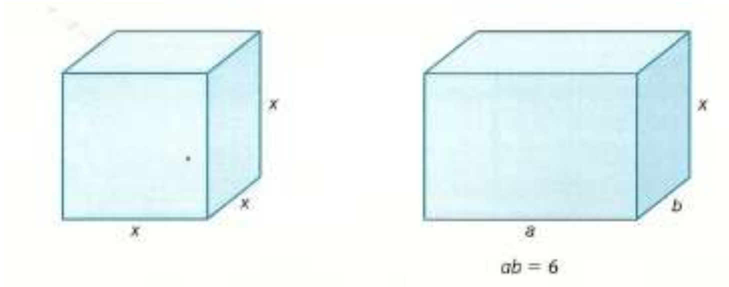
### ✓ A DESCOBERTA DE UM NOVO NÚMERO

**( 2 aulas = 100 minutos)**

O problema a seguir mostrará a insuficiência dos números reais diante de certas situações concretas ou abstratas.

*Um engenheiro projetou duas caixas-d`água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 6 $m^2$ de área da base. O volume da caixa cúbica deve ter 4 $m^3$ a menos que o* *volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metro, da aresta da caixa cúbica?*

Indicando por x a medida da aresta da caixa cúbica, temos:




Assim, o valor de x é raiz da equação $x^3 = 6x - 4$, que é equivalente a $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Essa equação pode ser resolvida pelo método proposto por volta de 1535 pelo matemático italiano Niccolo Fontana, conhecido como Tartaglia. Tal método consiste em substituir x por u – v, de modo que o produto uv seja igual à terça parte do coeficiente de x, isto é:

$$\begin{cases} (u - v)^3 - 6(u - v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + 4 = 0 & \text{(I)} \\ v = -2/v & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), chegamos à equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$, cuja resolução pode ser feita através da mudança de variável $u^3 = t$, com a qual obtemos a equação do 2º grau:

$t^2 + 4t + 8 = 0$

em que $\Delta = -16$ e, portanto,

$t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.8}}{2.1}$, da qual concluímos que: $u^3 = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$

Nesse momento poderíamos ser levados a concluir que a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ não possui raiz real, pois não existe no conjunto dos números reais o número $\sqrt{-16}$. Porém, essa conclusão é equivocada, pois o número real 2 é raiz da equação, como se constata pela substituição de x por 2:

$$2^3 - 6.2 + 4 = 0$$

Essa espantosa constatação nos leva a admitir a existência do número “não real” $\sqrt{-16}$.

Historicamente, Gerônimo Cardano, médico e matemático italiano, após ter aprendido com Tartaglia o método descrito anteriormente, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais, durante a resolução de uma equação cúbica. Após tal descoberta um matemático contemporâneo de Cardano, Raphael Bombelli, teve o que considerou uma “ideia louca”: começou a operar com os números não reais estudados por Cardano. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade:

$$2 + \sqrt{-\mathbf{1}} + 3 - \sqrt{-\mathbf{1}} = 5$$

Dando, assim, subsídios para o início da construção de um novo conjunto de números: o conjunto dos números complexos.

Responsável pela legitimação de toda teoria estudada nos dias de hoje, Johan Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro matemático a ter uma ideia mais clara sobre os chamados números imaginários e a perceber as vantagens que os matemáticos do século XIX poderiam obter através do aprendizado de sua representação geométrica.

Em 1835, o matemático irlandês William R. Hamilton (1805-1866) elaborou uma teoria aritmética dos números complexos, a qual consistia em considerá-los como pares ordenados de números reais e em definir a soma e o produto de tais pares.

## ✓ Conjunto dos números complexos **( 3 aulas = 150 minutos)**

Habilidade relacionada H36 (C1,C2,C3 e C4) efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Chama-se conjunto dos números complexos o conjunto C de todos os pares ordenados de números reais para os quais valem as seguintes definições:

Igualdade: (a, b) = (c, d) ↔ a = c e b = d

Adição: (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)

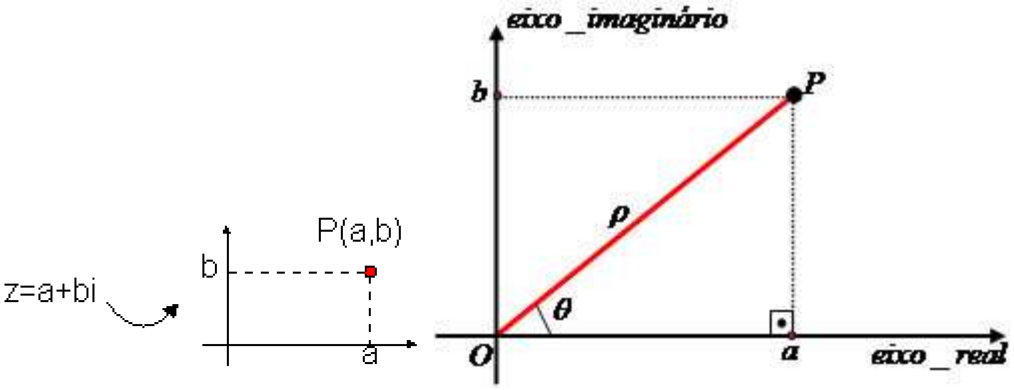
Multiplicação: (a, b) . (c, d) = (ac – bd, ad + bc)

Unidade imaginária é indicada pela letra **i**, sendo que seu valor é ( 0, 1), onde se realizarmos $i^2$ teremos i.i = ( 0, 1). ( 0, 1) = ( 0.0 – 1.1, 0.1 + 1.0 ) = (–1,0). Assim temos a notação usual que $i^2 = -1$. E que i = $\sqrt{-1}$.

Tomando-se um número z = ( a, b), teremos que z = a + bi. Portanto, se assim considerarmos termos que a é **a** parte real de z e **b** a parte complexa de z.

A cada número complexo ***z = a + bi***, podemos associar um ponto P no plano cartesiano. No complexo podemos representar a parte real por um ponto no eixo real, e a parte imaginária por um ponto no eixo vertical, denominado eixo imaginário.

A este ponto P, correspondente ao complexo ***z = a +bi***, chamamos de imagem ou afixo de z. Observe a representação da interpretação geométrica os números complexos:




Atualmente, o plano dos números complexos é conhecido como plano de Argand-Gauss.

Operações

.Adição

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Exemplo: Dados os números complexos $z_1 = 5 + 8i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 2 – 3i$, calcule:

$z_1 + z_2 = (5 + 8i) + (1 + 2i) = (5 + 1) + (8 + 2)i = 6 + 10i$

Subtração

A subtração é feita de forma análoga.

$z_1 – z_2 = (a + bi) – (c + di) = (a – c) + (b – d)i$

Exemplo:

$(5 + 8i) – (1 + 2i) = (5 – 1) + (8 – 2)i = 4 + 6i$

Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2$$

Como sabemos, $i^2 = – 1$.

Logo,

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = ac + adi + cbi - bd$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo:
$(5+8i)\cdot(1+2i) = (5\cdot1-8\cdot2)+(5\cdot2+1\cdot8)i$
$(5+8i)\cdot(1+2i) = (5-16) + (10+8)i = -11+18i$

Conjugado de um número complexo. ( $\bar{z}$ )
Se $z = a + bi$ então $\bar{z} = a - bi$.

Para a **Divisão** de números complexos devemos proceder da seguinte forma.

Assim temos, $z = a + bi$ , $\bar{z} = a - bi$ e $z_1 = c + di$

Para calcularmos a razão entre $z_1$ e z devemos: $\frac{z_1}{z} = \frac{z_1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}}$

Exemplo

$$\frac{5+8i}{1+2i} = \frac{(5+8i)}{(1+2i)} \cdot \frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{21-2i}{5} = \frac{21}{5} - \frac{2i}{5}$$

**Potências da unidade imaginária**.

Para um resto **r** igual a **0**, **1**, **2** ou **3**, temos uma potência igual a **1**, **i**, **-1** ou **-i** respectivamente:

| | |
|---|---|
| 0 | $i^0 = 1$ |
| 1 | $i^1 = i$ |
| 2 | $i^2 = -1$ |
| 3 | $i^3 = -i$ |

Por exemplo, para o expoente **8** temos que $\mathbf{i^8 = 1}$, pois o resto da divisão de **8** por **4** é igual **0**, já que **oito é divisível por quatro**, e segundo a tabela acima, para um resto igual a **0** temos que a potência $\mathbf{i^8}$ é igual a **1**:

- ✓ **Exercícios propostos ( 3 aulas = 150 minutos)**

1. Calcular as seguintes somas:
a) (2 + 5i) + (3 + 4i)
b) i + (2 - 5i)

2. Calcular as diferenças:
a) (2 + 5i) - (3 + 4i)
b) (1 + i) - (1 - i)

3. Calcular os seguintes produtos:
a) (2 + 3i) . (3 - 2i)
b) (1 + 3i) . (1 + i)

4. Escrever os conjugados dos seguintes números Complexos:
a) 3 + 4i
b) 3 + i
c) 1- i
d) 2 + 5i

5. Efetuar as seguintes divisões de números Complexos:
a) (10 + 15i) / (2 - i)
b) (1 + 3i) / (1 + i)

6.O percurso realizado por um móvel em uma região plana pode ser representado no plano cartesiano pelo segmento de reta CD. Sabendo que os pontos C e D correspondem, respectivamente, às representações geométricas dos números complexos $z_1 = 9 + i$ e $z_2 = 1 - 7i^{23}$. Calcule $z^1 – z^2$.

7.Resolva as equações:
a) $x^2 + 6x + 13 = 0$
b) $4x^2 - 4x + 7 = 0$

8. Elabore um problema envolvendo representação gráfica e afixo de número complexo.

9. Crie uma equação para ser resolvida em C cuja solução seja $\{ -3i; 3i \}$.

10. Os números complexos $z_1 = -1 – 3i$, $z_2 = -2 + bi$, com $b > 0$, e $z_3 = 4 + 2i$, em que i é a unidade imaginária, representados geometricamente no plano de Argand-Gauss, definem, respectivamente, o triângulo isósceles ABC, de base BC. A área desse triângulo, em unidades de área, é
(a) 15
(b) 20
(c) 25
(d) 30
(e) 35

11. (UF-RN) Um *quadrado mágico* é um quadriculado com $n^2$ quadrados menores que contêm números de forma que a soma desses números em cada linha, em cada coluna e nas duas diagonais é a mesma.
Para responder às solicitações propostas, considere o número complexo $i = \sqrt{-1}$ e o quadrado abaixo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| i | $I^2$ | $I^3$ | $I^4$ |
| $I^5$ | $I^6$ | $I^7$ | $I^8$ |
| $I^9$ | $I^{10}$ | $I^{11}$ | $I^{12}$ |
| $I^{13}$ | $I^{14}$ | $I^{15}$ | $I^{16}$ |

a) Verifique se o quadrado acima é mágico. Justifique.
b) Calcule a soma de todos os números que compõem o quadrado acima.

## AVALIAÇÃO

Durante as atividades pude observar se o aluno consegue representar graficamente, no plano cartesiano, um número complexo e identificar as suas partes reais e imaginárias, seu conjugado e seu módulo. Na atividade proposta através da pesquisa, observei que além de saber trabalhar com números complexos no plano de Argand-Gauss, os alunos perceberam também a utilidade desse conceito em situações reais.

Espera-se também que seja possível avaliar o conhecimento dos alunos em relação: ao reconhecimento e a representação de um número complexo na forma algébrica; bem como, a capacidade de resolver problemas envolvendo a igualdade, a soma, a subtração e a multiplicação de números complexos e finalmente, resolver potências.
Durante as atividades em grupo, será escolhido um monitor, para melhor desenvolvimento dos exercícios. Também será aplicada uma atividade individual. Os alunos serão observados quanto ao interesse, participação, assiduidade e a integração no decorrer das aulas.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**


BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias: Ensino Médio. Brasília.

Currículo Mínimo

DANTE, L. R, **Matemática.** São Paulo: Ática, 2005. (Série Novo Ensino Médio).

GIOVANNI, José Ruy & BONJORNO, José Roberto. *Matemática Completa. 2ed.v.3*São Paulo: FTD,2005BRASIL, Ministério da Educação.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilze de.  Matemática: ciência e aplicações, 3: Saraiva, 6°ed. São Paulo, 2010.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2001.v.3.

PAIVA, Manoel. (2009) Matemática - Paiva. 1a ed. 3 vols. São Paulo: Moderna.

MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática.** São Paulo: Ática, 2003.

RIBEIRO, Jackson. *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia.Vol.3.*  São Paulo: Scipione, 2011.

ROTEIROS DE AÇÃO – Geometria Analítica – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CEDERJ/CECIERJ.

SMOLE, Kátia C. S. Matemática – 6ª Ed. São Paulo: Saraiva.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. A educação matemática em revista, n. 1, 1993.

SOUZA,Joamir. *Coleção Novo Olhar*. *Vol.3.* São Paulo: FTD,2010.

Sites:
http://www.youtube.com/watch?v=o5h3PntqfNM

http://www.brasilescola.com/matematica/adicao-subtracao-multiplicacao-numero-complexo.htm

http://www.mundovestibular.com.br/articles/4619/1/NUMEROS-COMPLEXOS/Paacutegina1.html