FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ

COLÉGIO: Instituto de Educação Carmela Dutra

PROFESSORA: Vanda Reis Rodrigues Nóbrega

MATRÍCULA: 0950242-8

SÉRIE: 3° ano do Ensino Médio

TUTOR: Leandro Mendonça

AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 1

NÚMEROS COMPLEXOS

<u>PONTOS POSITIVOS</u>

Ao elaborar o plano de trabalho sobre números complexos pude ampliar as metodologias para apresentação do tema aos alunos. Optei por introduzir o conceito dos números complexos fazendo uma abordagem histórica, desta forma os alunos puderam ampliar a visão sobre o tema e sua importância.

O uso de algumas atividades dos roteiros de ação elaborado pelo curso de aperfeiçoamento e as pesquisas que realizei permitiram uma abordagem diferenciada dos números complexos em sala de aula. Através desse plano de trabalho consegui motivar os alunos a participarem das aulas, tornando-as mais dinâmicas, o que proporcionou o desenvolvimento dos conteúdos de forma mais significativa.

<u>PONTOS NEGATIVOS</u>

Um imprevisto atrapalhou a aplicação da Atividade 2 do plano de trabalho, o laboratório de informática entrou em obras e o datashow não estava funcionando. Além disso, na aplicação da Atividade 3 alguns alunos tiveram dificuldade em resolver algumas questões por não terem conhecimento de matérias anteriores, como multiplicação de polinômios, produtos notáveis, regra de sinais, cálculo de raiz. Por isso, precisei empregar algumas aulas com o objetivo de esclarecer dúvidas e/ou ensinar conteúdos do Ensino Fundamental.

IMPRESSÕES DOS ALUNOS

Posso afirmar que tive uma boa aceitação por parte dos alunos. Os alunos através do relatório que fizeram em sala de aula puderam expressar suas opiniões a respeito das atividades realizadas e das dificuldades encontradas, e muitos relataram que nunca haviam realizado um trabalho nesse estilo. Outros, que a aula estava mais interessante e atrativa.

ALTERAÇÕES - MELHORAS A SEREM IMPLEMENTADAS

Pelo que percebi na reação dos alunos e habilidades adquiridas, não faria mudanças no Plano de Trabalho 1 – Números Complexos. Apenas gostaria muito de ter tempo para antes da aplicação do Plano de Trabalho revisar conteúdos anteriores,o que facilitaria a aplicação das atividades. Desta forma, acredito que não seja necessário fazer nenhuma alteração.

Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3° Ano – 3° Bimestre/2012

Plano de Trabalho

NÚMEROS COMPLEXOS

Tarefa 1
Cursista: Vanda Reis Rodrigues Nóbrega
Tutor: Leandro Mendonça

S U M Á R I O

1- ***INTRODUÇÃO***

Atualmente, o ensino dos números complexos no Ensino Médio baseia-se numa abordagem tradicional, onde o aluno memoriza formulas, regras e procedimentos algébricos. Isso pode levar a várias consequência, tais como:

- ✓ O aluno permanece com uma visão formal e algebrizaste, onde estão ausentes o significado e as aplicações destes números;

- ✓ Dificilmente o aluno conseguirá aplicar os números complexos a problemas de Geometria.

Neste sentido, o nosso plano de trabalho tem por objetivo propor uma abordagem alternativa ao estudo dos Números Complexos.

A abordagem escolhida para introduzir os números complexos é a sua história – Atividade 1, onde o aluno passa a compreender um pouco mais sobre esses números desconhecidos e a sua importância na matemática e áreas afins.

A partir daí, iremos demonstrar a representação geométrica dos números complexos através de construções no computador com o auxílio do software GeoGebra. Para isso, nosso plano de trabalho abordará ambas as interpretações: algébrica e geométrica.

Na Atividade 2 apresentaremos o plano de Argan-Gauss e a representação geométrica dos números complexos. Em contrapartida na Atividade 3 iremos abordar a parte algébrica, onde o aluno irá efetuar operações com os números complexos em sua forma algébrica.

2- DESENVOLVIMENTO

Atividade 1: Um pouco da História dos Números Complexos
✓ Pré-requisito: --- ✓ Tempo de Duração: 30 minutos ✓ Recursos Educacionais Utilizados: Ficha 01 – Um pouco de historia, texto retirado do livro adotado pela escola: Matemática – Ensino Médio: volume 3 das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, ed. Saraiva.. ✓ Organização da Turma: Individual. ✓ Objetivos: Introduzir o tema mostrando aos alunos os aspectos históricos dos Números Complexos e o seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. ✓ Metodologia adotada: Quando começamos a iniciar o estudo dos números complexos os alunos logo perguntam para que aprender isso? Apresentando um pouco da história dos números complexos veremos que esse conhecimento nasce na Matemática para a resolução de equações e que sua aceitação, compreensão, e utilização ocorreram de maneira lenta e gradual. Podemos também mostrar algumas profissões que fazem uso deste conhecimento.

FICHA01: UM POUCO DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Um pouco de história

Por volta da primeira metade do século XVI, alguns matemáticos italianos (Tartaglia e Cardano) descobriram um modo para resolver equações do tipo $x^3 + ax + b = 0$.

Em sua obra *Ars magna*, Jerônimo Cardano (1501-1576) apresentou pela primeira vez a fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

como solução de uma equação do tipo $x^3 + ax + b = 0$, onde $a > 0$ e $b > 0$.

Essa fórmula só se aplicava quando $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \geqslant 0$, pois na época não se extraíam raízes quadradas de números negativos.

Na mesma época, outro matemático, de nome Bombelli, resolvendo a equação $x^3 - 15x = 4$, chegou a um impasse.

Por cálculo direto, ele verificou que 4 era uma raiz do polinômio, pois $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$, e tentou verificar se encontrava a raiz 4 aplicando a fórmula de Cardano. No entanto, para a equação $x^3 = 15x + 4$, tem-se $a = -15 < 0$ e $b = -4 < 0$, o que resultou em:

$$x = \sqrt[3]{+\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{+\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{+2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{+2 - \sqrt{-121}}$$

Por causa desse resultado, Bombelli acreditava que a equação não devia ter solução, pois $\sqrt{-121}$ não é um número real. No entanto, ele sabia que $x = 4$ era uma das raízes da equação.

Para superar esse problema, Bombelli tentou encontrar regras para trabalhar com raízes quadradas de números negativos.

Resolveu considerar $\sqrt{-1}$ como um número qualquer e, usando as mesmas regras da Álgebra elementar, conseguiu mostrar que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ era a raiz da equação que ele estava tentando resolver.

Bombelli passou a desenvolver regras para operar com esses novos "números" chamando-os de números "fictícios", "impossíveis", "místicos" ou "imaginários".

A partir daí, os matemáticos passaram a estudar e a trabalhar com raízes quadradas de números negativos de forma cada vez mais sistematizada. Nesse trabalho, sempre que possível, usavam as mesmas propriedades dos números reais em relação à adição, à subtração, à multiplicação...

- 1629 – Albert Girard (1590-1633) escreve as raízes quadradas de números negativos na forma $a + b\sqrt{-1}$; assim, $2 + \sqrt{-16} = 2 + 4\sqrt{-1}$.
- 1637 – dada a notação $a + b\sqrt{-1}$, René Descartes (1596-1650) chama *a* de "parte real" e *b* de "parte imaginária".
- 1748 – Leonhard Euler (1707-1783) usa a letra **i** para representar $\sqrt{-1}$. Assim, uma expressão do tipo $4 + 3\sqrt{-1}$ passou a ser escrita como $4 + 3i$.

Mas foi no final do século XVIII e início do século XIX, especialmente a partir dos trabalhos do matemático Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que se passou a chamar os números da forma $a + bi$ de **complexos** e que esses números ganharam o *status* de campo numérico, merecendo todo um estudo organizado em torno de suas aplicações dentro e fora do interesse da ciência Matemática.

Mas, afinal, o que são números complexos?

Atividade 2: Representação Geométrica dos Números Complexos
✓ Pré-requisito: Esta atividade pedagógica destina-se a turmas da 3ª série do ensino médio. Sua aplicação pré-supõe que os alunos tenham o conhecimento prévio de Números Complexos e suas operações. ✓ Tempo de Duração: 100 minutos ✓ Recursos Educacionais Utilizados: Ficha 02- Representação Geométrica dos Números Complexos , Software GeoGebra, Notebook e Datashow. ✓ Organização da Turma: Das atividades aqui propostas estão previstas para serem desenvolvidas em um laboratório de informática ou em sala de aula com o uso do noteboook e do datashow. ✓ Objetivos: A ideia central do trabalho é demonstrar a representação geométrica do conjunto dos Números Complexos para que os alunos, com o auxílio do Software GeoGebra. ✓ Metodologia adotada: Estas atividades foram elaboradas com base no Registro das práticas pedagógicas bem sucedidas retirado do site: http://pt.scribd.com/doc/85278656/Representacao-Geometrica-dos-Numeros-Complexos-3%C2%BA-ano-Registro-Pratica-Pedagogica. As atividades devem ser desenvolvidas em duplas de alunos, pois o debate entre eles é uma das estratégias pedagógicas aqui utilizadas. As atividades são, de forma geral, estruturadas da seguinte maneira: a) representar no Plano de Gauss dos números complexos; b) compreender as operações com números complexos em sua forma algébrica c) tirada de conclusões pelos alunos, com a orientação do professor.

FICHA02: REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Nome: ____ **n°:** _____ **Turma:**

____ **n°:** _____

<u>Iniciando:</u> Abra o programa GeoGebra.

<u>Atividade 1</u>:

a) Digite na “entrada” um número complexo z qualquer clique “enter”. Observe o que acontece e descreva no quadro abaixo o número complexo que você digitou e a relação que há entre este número e as coordenadas.

b) Crie no plano de Gauss os números complexos abaixo:

- Z1 = 3 + 2i
- Z2 = -2 + i
- Z3 = 1 – 3i
- Z4 = 4
- Z5 = 5i

c) Cole sua construção no GeoGebra abaixo:

Obs.: Faça print screen da tela do GeoGebra e cole no Word, depois faça o recorte da imagem usando recursos disponíveis no programa .

<u>Atividade 2</u>:

a) Abra um novo arquivo e digite na “entrada” o número complexo $\boxed{Z1=1+3i}$ e clique “enter”. Selecione a ferramenta “Segmento definido por dois pontos”  e clique sobre a origem e o ponto Z1. Faça o mesmo procedimento para o número complexo $\boxed{Z2=3+i}$.

b) Na entrada digite: $\boxed{Z3=Z1+Z2}$ e enter. Com a ferramenta “Segmento definido por dois pontos”  faça um segmento de reta ligandos Z1 a Z3 e Z2 a Z3. Escreva abaixo o que você observou sobre a adição de números complexos geometricamente.

c) Crie outros números complexos e faça subtrações. Escreva abaixo o que você observou sobre a subtração.

<u>Atividade 3</u>:

a) Abra um novo arquivo e digite na “entrada” o número complexo $\boxed{Z1=2+3i}$ e clique “enter” e o número complexo $\boxed{Z2=1+i}$ e clique “enter”.

b) Na entrada digite: $\boxed{Z3=Z1*Z2}$ e “enter”. Observe as coordenadas do resultado. Escreva abaixo os números que você escolheu e o resultado da multiplicação:

c) Calcule no quadro abaixo esta multiplicação através da propriedade distributiva e compare com o resultado do computador.

Atividade 3: Operações com números complexos
✓ Pré-requisito: Conhecimento prévio de Números Complexos e suas operações. ✓ Tempo de Duração: 100 minutos ✓ Recursos Educacionais Utilizados: Ficha 03- Operações com Números Complexos, Notebook e Datashow . ✓ Organização da Turma: Pequenos grupos de dois ou três alunos cada. ✓ Objetivos: Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica. ✓ Metodologia adotada: Estas atividades foram elaboradas com base no Roteiro de Ação 3. As atividades devem ser desenvolvidas de forma que os alunos tenham total compreensão das operações básicas com números complexos. Para isto, uma estratégias pedagógicas que poderá ser utilizada é a interação das atividades propostas com as telas desenvolvidas no software GeoGebra.

FICHA03: OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Nome: ____ **n°:** _____ **Turma:**

____ **n°:** _____

Atividade 01

- **Soma e Subtração de Números Complexos**

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?

Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$?

Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uní-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma $ax + b$.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$

$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1. Agora efetue as somas z + w abaixo:

a. z = 3; w = 5

____

b. z = 2i; w = 4i

____

c. z = 5; w = 3i

d. $z = 2 + 3i$; $w = 3$

e. $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$

Como você pôde perceber, somar números complexos pode ser tratado de modo semelhante à soma de expressões algébricas. Na verdade, descobriremos mais à frente que a relação entre estes dois assuntos é ainda mais estreita.

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2. Agora, efetue $z - w$ nos casos abaixo:

a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 - 4i$

b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 - 5i$

c. $z = 3 - 5i$; $w = -2 + 4i$

Como vimos, o procedimento para soma e subtração de números complexos pode ser resumido a operar com a parte real e com a parte imaginária separadamente e, em seguida, juntar as partes para formar um novo número complexo.

As atividades que você acabou de realizar levaram em conta apenas valores inteiros para as partes real e imaginária dos números complexos. Mas os números complexos são muito mais que isso!

Na realidade, os valores podem ser quaisquer números reais e, para realizar a soma/subtração em cada caso, basta seguir o mesmo procedimento que você realizou anteriormente, só que agora com quaisquer complexos.

3. Tente agora efetuar as seguintes operações:

a. **$z = 1,5 + 5,4i$; $w = -3,1 - 1,2i$. Sendo assim, determine $z + w$.**

____

b. **$z = -\pi + 5,17i$; $w = 8,9 + 3,6i$. Sendo assim, determine $w - z$.**

____

Dica: Tente fazer usando $\pi = 3,14$. Depois, calcule usando a representação π, sem aproximações.

c. **$z = 44,3 - 1,8i$; $w = 4,2 + 2,7i$; $v = -i$. Sendo assim, determine $z - w + v$.**

____

Pronto! Agora você já é capaz de realizar somas e subtrações entre números complexos quaisquer!

Vamos adiante?

Atividade 02

- **<u>Multiplicação e Divisão</u>**

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra da “racionalização do denominador de uma fração”? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1. Inicialmente, tente efetuar a operação z * w, com z = 3 + 2i e w = 4.

____

2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação z * w, com z = 2 + 4i e w = 3i. Não se esqueça que, como i = √-1, podemos considerar que i^2 = -1.

____

____

3. Efetue z * w, com z = 2 – 3i e w = 5 – i.

____

____

A partir deste ponto, você já deve estar em condições de efetuar o produto entre dois complexos na forma algébrica. Mas, e a divisão?

4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: z : w, com z = 6 – 4i e w = 2.

____

____

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:

5. z : w, com z = -9i e w = 3i.

____

____

6. z : w, com z = 6 – 4i e w = 2i.

____

____

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.

A divisão de números complexos na forma a + bi pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.

Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta idéia:

7. z : w, com z = 4 – 3i e w = 2 + i

___

___

Com isto você já tem condições de trabalhar com as 4 operações básicas dentro do conjunto dos números complexos.

Uma nota final ainda cabe. Quando você aprendeu sobre a potenciação, provavelmente ouviu falar nela como “multiplicar repetidas vezes”. Na verdade, você pode notar que elevar um número complexo qualquer a uma dada potência pode ser entendido como resolver um caso de Binômio de Newton.

Mas antes, você deve saber como trabalhar com as potências da unidade imaginária.

Responda a sequência abaixo:

8. Qual o valor de i^2?

___

9. Você pode, a partir do valor de i^2, obter o valor de i^3? Como?

___

___

10. Agora que você tem o valor de i^3, é capaz de calcular i^4? Como?

___

___

11. O que aconteceu no momento em que calculou o valor de i^4? Você consegue explicar o motivo?

____

____

12. Obtenha os valores de i^5, i^6, i^7 e i^8.

____

____

____

____

Notou algo "estranho"? Acontece que as potências de i formam uma sequência que percorre um ciclo de valores: i, -1, -i, 1. Com isto, para saber o valor de qualquer potência de i, basta verificar em que ponto da sequência a potência desejada se encontra.

Vamos verificar?

13. Calcule i^{10}.

____

____

Você já viu que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. Se continuarmos com a sequência, logo notamos que i10 deve ser igual a -1. Mas e se quiséssemos o valor de i^{135}? É necessário encontrar um modo de não precisar escrever a sequência completa todas as vezes... E há um modo!!

Verificando os resultados das potências de i, podemos notar uma relação entre os expoentes e os valores dos resultados.

14. Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.

Uma dica: esta relação refere-se ao "tempo" que leva até que um valor seja repetido.

____

____

15. Encontre o valor das seguintes potências de i:

a) i^{21}

b) i^{87}

c) i^{221}

d) i^{1024}

Agora você já pode calcular potências de números complexos em geral.

16. Efetue $(2 + 3i)^2$

No caso do item 16, você pode ter optado por utilizar o produto notável "quadrado da soma".

17. Efetue:

a. $(2 + 3i)^3$

b. $(1 – i)^3$

Em a), perceba que basta multiplicar o resultado do item 16 por (2 + 3i) para obter o cubo. Já em b) você começa a ter um pouco mais de trabalho.

18. Agora, efetue $(2 – 3i)^4$**.**

Bem mais complicado, certo? Para este caso, você pode:

..multiplicar (2 – 3i) quatro vezes;

..fazer (2 – 3i)2 e depois multiplicar por ele mesmo;

..resolver direto (2 – 3i)4, via expansão do Binômio de Newton.

19. Agora que você já sabe como efetuar multiplicações, divisões e potenciações, efetue as operações solicitadas:

a) z * w, sendo que z = -1 + i; w = 3 + 5i

b) z : w, sendo que z = 5 + 4i; w = -i

c) w : z, sendo que z = 2 - 2i; w = 5 + 2i

d) z * w, sendo que z = 2 + 2i; w = 2 - 2i

e) $w : z$, sendo que $z = 4$; $w = 4 + 3i$

f) z^3, sendo que $z = 3 - i$

g) z^2, sendo que $z = 4 + 2i$

3- <u>AVALIAÇÃO</u>

- Serão avaliadas as participações dos alunos nas aulas durante o desenvolvimento das atividades propostas. Neste momento usarei um relatório feito pelo grupo comentando a participação e o empenho de cada integrante do grupo para o desenvolvimento da tarefa e suas anotações e inferências para o desenvolvimento do conteúdo proposto (4,0 pontos)

- Farei uma prova com consulta a anotações do próprio aluno feitas anterior a data da prova. (4,0 pontos)

- Teremos também a prova do SAERJINHO aplicada pela SEE. (2,0 pontos)

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Este plano de trabalho foi elaborado levando em consideração o tempo disponível de aulas para as turmas 3004, 3005 e 3006 do I.E. Carmela Dutra no ano letivo em curso (2012) e o grau de conhecimento dos alunos.

Caso o tempo permita, iremos acrescer outras atividades visando uma aprendizagem prazerosa e significativa do aluno.

4- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto – Matemática: Ensino Médio: volume único – Ed. Ática – São Paulo, 2008.

Portal Só matemática, disponível no site: http://www.somatematica.com.br/acessado em 20 de agosto de 2012.

Registro das práticas pedagógicas bem sucedidas, disponível no site: http://pt.scribd.com/doc/85278656/Representacao-Geometrica-dos-Numeros-Complexos-3%C2%BA-ano-Registro-Pratica-Pedagogica acessado em 21 de agosto de 2012.

ROTEIROS DE ACAO 3 –Números Complexos – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3° ano do Ensino Medio – 3° bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 20 de agosto de 2012.

SMOLE, Kátia Stocco e Maria Ignês Diniz – Matemática: Ensino Médio: volume 3 – Ed. Saraiva – São Paulo, 2010.