

Formação Continuada em Matemática  
Fundação CECIERJ/CEDERJ

Matemática – 2º ano – 3º Bimestre/2012  
PLANO DE TRABALHO



# MATRIZES E DETERMINANTES

Tarefa 1

Cursista: Aline Gabry Santos

Tutor: Flávia Cristina e Silva Henriques

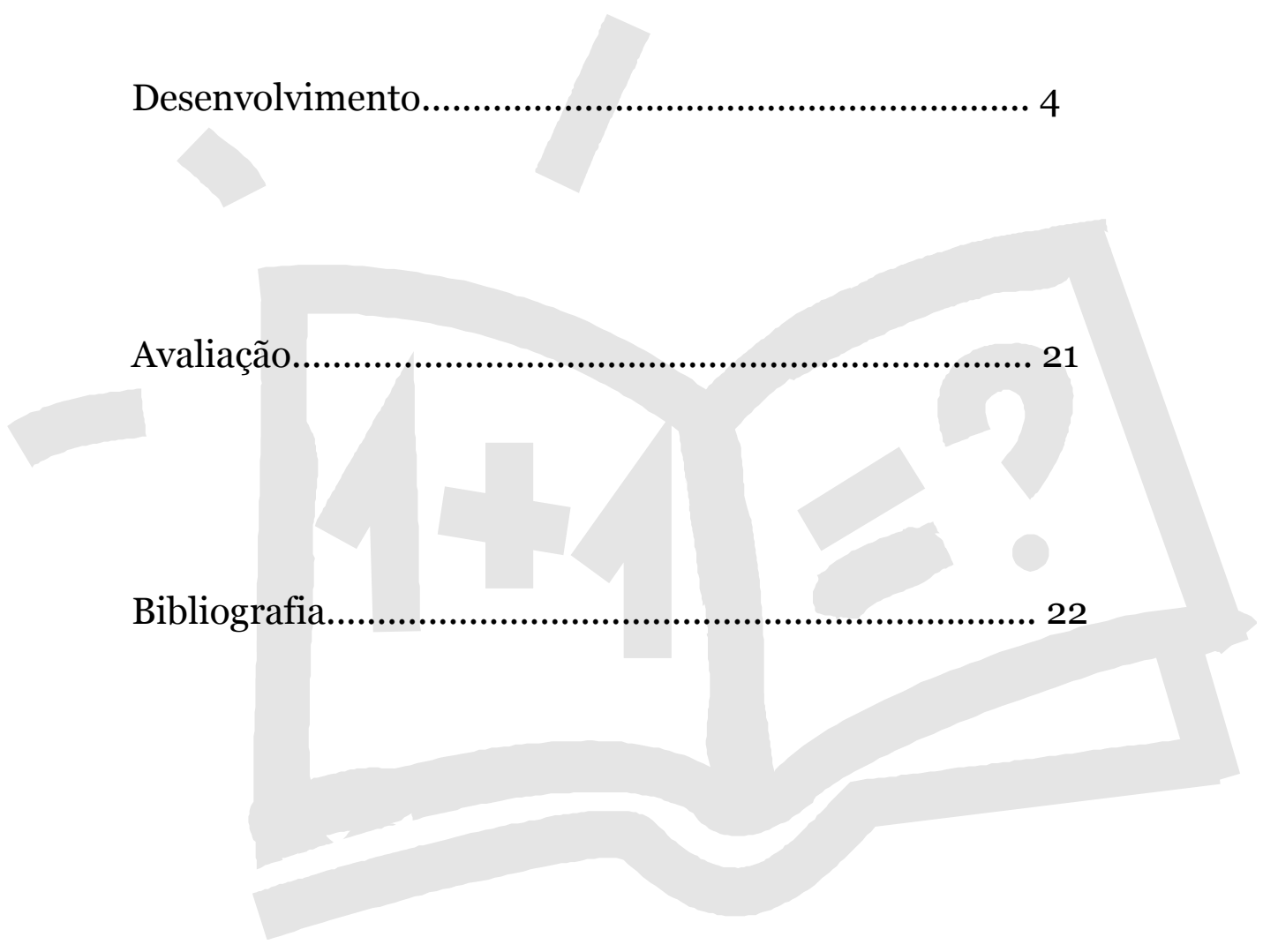
# SUMÁRIO

Introdução..... 3

Desenvolvimento..... 4

Avaliação..... 21

Bibliografia..... 22



# INTRODUÇÃO

Como professor temos todos enfrentado diversos problemas em nossa prática diária, porém o maior deles diz respeito a conseguir a atenção dos alunos para o conteúdo abordado.

Aquela “velha” aula do conteúdo aos exercícios já não é mais suficiente para atrair a atenção dos alunos (ou nunca foi). Podemos perceber que a cada ano que passa menos alunos têm interesse por esse tipo de aula. Por isso proponho este plano de estudo, cujo objetivo é facilitar o acesso aos alunos e, conseqüentemente, uma melhor aquisição e construção do conhecimento por parte deles.

Normalmente, os alunos não têm qualquer interesse por matrizes e determinantes, por se apresentar de forma estática, como mera reprodução das definições. Eles costumam perguntar: “Me apresenta o louco que inventou isso para eu poder matá-lo”; o que demonstra a ausência de qualquer ideia sobre como as matrizes e os determinantes são importantes para nossa vida moderna.

Quando o conteúdo é abordado, eles até conseguem somar, subtrair e multiplicar por um número real, mas têm imensa dificuldade na construção da matriz (por não conseguirem abstrair os valores  $a_{ij}$  dentro da matriz).

Quando o assunto é multiplicação de matrizes, tudo se torna pior, uma vez que, por exemplo, os alunos confundem as linhas com as colunas ou insistem em multiplicar o 1º elemento das linhas da 1ª matriz por todos os elementos das colunas da 2ª matriz.

Entre outras coisas, é por isso que é extremamente importante mudar a forma como o conteúdo sobre matrizes é ensinado em sala, com exemplos diferenciados e concretos.

Para a aplicação deste plano, serão necessários 14 tempos de cinquenta minutos para o desenvolvimento do conteúdo e execução dos exercícios, e outros 2 tempos para avaliação da aprendizagem.

# DESENVOLVIMENTO

## Atividade 1

**HABILIDADE RELACIONADA:** H33 - Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.

**PRÉ-REQUISITO:** Operações elementares com números reais.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis de cor, livro didático.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas, propiciando o trabalho cooperativo.

**OBJETIVOS:** Reconhecer e construir os diferentes os tipos de matrizes, resolver problemas utilizando matrizes e linguagem matricial.

### METODOLOGIA:

Introduzir o conceito de matrizes com um exemplo simples que envolve a adição de matrizes, sem a preocupação inicial da definição.

Propor aos alunos o tabelamento das informações solicitadas no problema 1 e questionar a turma sobre como seria a melhor forma de solucioná-lo. Após terem entendido como é feita a adição será apresentada a definição de matrizes, identificando seus elementos e demais características.

#### Problema 1)

Uma empresa de distribuição de produtos químicos tem duas filiais: A e B. Abaixo estão relacionados alguns dos produtos constantes no almoxarifado de suas filiais, em cada um dos meses de janeiro, fevereiro, março e abril:

#### ALMOXARIFADO A:

ácido clorídrico (23, 10, 17, 32);  
hidróxido de amônia (42, 13, 44, 27);  
sulfato de alumínio (12, 15, 7, 16).

#### ALMOXARIFADO B:

ácido clorídrico (12, 45, 3, 2);  
hidróxido de amônia (2, 3, 4, 7);  
sulfato de alumínio (15, 10, 17, 25).

Exercício 1) Calcule a quantidade total de cada reagente em cada mês.

Neste momento é apresentado aos alunos como esses valores podem ser melhor representados se forem colocados em forma de matrizes.

#### Definição:

Sejam  $m$  e  $n$  números naturais não nulos.

Uma matriz do tipo  $m \times n$  (lê-se:  $m$  por  $n$ ) é uma tabela de números dispostos em  $m$  linhas (filas horizontes) e  $n$  colunas (filas verticais).

Usualmente, seus elementos são representados entre parênteses ou colchetes.

#### Representação de uma matriz:

Considerando uma matriz  $A$  do tipo  $m \times n$ , um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo  $a_{ij}$ , no qual o índice  $i$  refere-se à linha (numerada de cima para

baixo) em que se encontra tal elemento, e o índice  $j$  refere-se à coluna (numerada da esquerda para a direita).

Representamos uma matriz  $A$  do tipo  $m \times n$  por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , em que  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , e  $a_{ij}$  é um elemento qualquer de  $A$ . Acompanhe o exemplo a seguir:

Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

- ❖ O elemento que está na linha 1, coluna 1, é  $a_{11} = -1$ .
- ❖ O elemento que está na linha 1, coluna 2, é  $a_{12} = 0$ .
- ❖ O elemento que está na linha 1, coluna 3, é  $a_{13} = 2$ .
- ❖ O elemento que está na linha 2, coluna 1, é  $a_{21} = -2$ .
- ❖ O elemento que está na linha 2, coluna 2, é  $a_{22} = 5$ .
- ❖ O elemento que está na linha 2, coluna 3, é  $a_{23} = 3$ .

Exemplo:

1. Escrever a matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ , em que  $a_{ij} = i - j$ .

**Montar esta matriz com a turma, salientando o cuidado em não colocar os valores encontrados no lugar errado.**

Matrizes especiais:

**Matriz linha:** é aquela formada por uma única linha.

Ex:  $A = (0 \ 2 \ 4)_{1 \times 3}$

**Matriz coluna:** é aquela formada por uma única coluna.

Ex:  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$

**Matriz nula:** é aquela cujos elementos são todos iguais a zero.

Ex:  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

**Matriz quadrada:** é aquela que possui o número de linhas igual ao número de colunas.

Ex:  $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ , dizemos que a matriz  $D$  é quadrada de ordem 2.

$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ , dizemos que a matriz  $E$  é quadrada de ordem 3.

**OBS:** numa matriz quadrada de ordem  $n$ , destacamos que:

- ❖ os elementos de  $A$  em que  $i = j$  constituem a diagonal principal;
- ❖ os elementos de  $A$  em que  $i + j = n + 1$  constituem a diagonal secundária.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

diagonal secundária      diagonal principal

**Matriz identidade:** é qualquer matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são nulos. Indicamos uma matriz identidade de ordem  $n$  por  $I_n$ .

Ex:  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , matriz identidade de ordem 2.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , matriz identidade de ordem 3.

**Matriz transposta:** dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , chama-se transposta de A (indica-se por  $A^t$ ) à matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

tal que  $a'_{ji} = a_{ij}$  para todo  $i$  e todo  $j$ . Ou seja, basta trocar, ordenadamente, as linhas pelas colunas da matriz A.

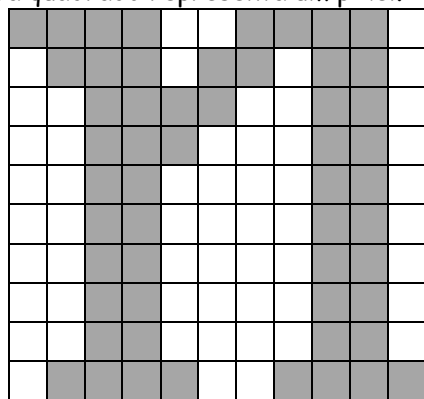
Ex: Se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ , então  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

**Para exemplificar melhor a matriz transposta, propor aos alunos o desafio abaixo, baseado na imagem do Gato Félix <sup>(\*)</sup>, 1º desafio.**

Exercitando:

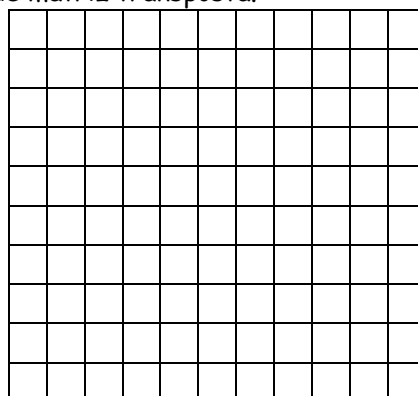
As imagens que você vê em uma página na internet e as fotos que você tira com sua máquina fotográfica digital podem ser representadas usando-se matrizes. Por exemplo, a imagem da letra "n" abaixo pode ser representada por uma matriz 10 x 11 cujos elementos são os números 0 e 1, que especificam a cor do pixel. O número 0 indica a cor cinza e o número 1 indica a cor branca. Imagens digitais que usam apenas duas cores (que em geral são o preto e o branco) são denominadas imagens binárias (ou imagens booleanas).

A figura (estática) abaixo apresenta uma versão ampliada de uma simples letra "n", onde cada quadrado representa um pixel. A matriz correspondente é apresentada ao lado.



1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1

Agora, aproveite o espaço quadriculado abaixo para reproduzir a figura da letra "n" acima, aplicando o conceito de matriz transposta.



**Exercícios de fixação do livro didático para explorar a construção de matrizes e seus tipos.**

<sup>(\*)</sup> [www.uff.br/cdme/matrix/matrix\\_html/matrix\\_boolean/jdi\\_alpha\\_br.html](http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix_html/matrix_boolean/jdi_alpha_br.html)

## Atividade 2

**HABILIDADE RELACIONADA:** H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações (adição, subtração e multiplicação por escalar) com matrizes; Resolver problemas utilizando matrizes e linguagem matricial;

**PRÉ-REQUISITOS:** Definição de matrizes, operações elementares com números reais.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis, borracha e livro didático.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

**OBJETIVOS:** Desenvolver as habilidades relacionadas às operações com matrizes.

**METODOLOGIA:**

Através de problemas práticos (problemas 2 e 3), será reforçado o conceito de adição e desenvolvido o de subtração e multiplicação por um escalar, antes da definição.

Problema 2)

Uma revendedora de carros possui duas concessionárias e comercializa quatro modelos diferentes. A tabela abaixo se refere à quantidade de carros vendidos no mês de junho/2012.

Loja	Modelo			
	Fiesta	Focus	Courier	Ecosport
I	20	15	6	13
II	15	5	2	8
Junho/2012				

Já a tabela abaixo representa a quantidade de carros vendidos no mês de julho/2012.

Loja	Modelo			
	Fiesta	Focus	Courier	Ecosport
I	23	16	8	10
II	13	3	1	9
Julho/2012				

O dono da revendedora solicitou a um de seus funcionários para elaborar uma tabela e uma matriz que representasse o total de carros vendidos nos meses de junho e julho, em suas duas lojas.

a) Complete a tabela e construa, ao lado, a sua matriz de maneira a atender ao pedido do dono da revendedora.

Loja	Modelo			
	Fiesta	Focus	Courier	Ecosport
I				
II				
Total de junho e julho / 2012				

Chamar a atenção do aluno para a soma de duas matrizes que só pode ocorrer se elas tiverem o mesmo número de linhas e de colunas.

b) E se o dono a revendedora tivesse pedido ao seu funcionário para elaborar uma tabela que representasse a diferença entre o número de carros vendidos entre os meses de junho e julho, como ficaria? Complete a tabela abaixo com esses dados e construa sua matriz correspondente. O que significa o resultado obtido na 1ª linha e 1ª coluna?

Loja	Modelo			
	Fiesta	Focus	Courier	Ecosport
I				
II				
Diferença entre junho e julho / 2012				

Deixar os alunos refletirem sobre a última questão acima e observar com a turma que um elemento negativo da matriz  $A - B$  indica que a venda de carros de um determinado modelo diminuiu em uma das lojas. Já um elemento positivo, indica o crescimento das vendas de um determinado modelo em uma determinada loja.

Aqui, assim como na adição, a subtração de duas matrizes só pode ocorrer se elas tiverem o mesmo número de linhas e de colunas.

Problema 3)

Na matriz  $C$ , a 1ª linha indica a quantidade tecido (em metros quadrados), e a 2ª, a de botões utilizados na confecção de 3 modelos diferentes de camisa, correspondentes a cada uma das colunas.

$$C = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 1,1 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Escreva a matriz que indica a quantidade necessária desses materiais para a confecção de 50 camisas de cada modelo.

Estimular a turma para a solução deste problema e levá-los a entender (caso seja necessário) que basta multiplicar o 50 por todos os elementos da matriz  $C$  para encontrar o resultado. Em seguida é necessário pontuar com eles o significado dos resultados obtidos.

Agora, já é possível entrar com as definições de adição, subtração e multiplicação de matrizes.

Adição de matrizes:

Dadas duas matrizes do mesmo tipo,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , a soma de  $A$  com  $B$  ( $A + B$ ) é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , em que  $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ .

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz oposta:

Seja a matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Chama-se **oposta de  $A$**  à matriz representada por  $-A$ , tal que  $A + (-A) = 0_{m \times n}$ , sendo  $0_{m \times n}$  uma matriz nula do tipo  $m \times n$ .

Observe que a matriz  $-A$  é obtida de  $A$  trocando-se o sinal de cada um de seus elementos.



Ex: Se  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ , então  $-A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Subtração de matrizes:

Dadas duas matrizes do mesmo tipo,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , chama-se diferença entre A e B ( $A - B$ ) a matriz soma de A com a oposta de B, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz:

Seja a matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e k um número real. O produto de k pela matriz A (ou seja,  $k \cdot A$ ) é a matriz  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , em que  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ . Ou seja, B é obtido de A multiplicando-se cada um dos elementos de A por k.

$$\text{Ex: Se } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ então } 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ -15 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercícios de fixação do livro didático para explorar a soma, subtração e multiplicação por um escalar de matrizes.

## Atividade 3

**HABILIDADE RELACIONADA:** H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes; Resolver problemas utilizando matrizes e linguagem matricial;

**PRÉ-REQUISITOS:** Definição de matrizes, operações elementares com números reais.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis, borracha e livro didático.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

**OBJETIVOS:** Desenvolver as habilidades relacionadas às operações com matrizes (multiplicação de uma matriz por outra); resolver problemas utilizando matrizes e linguagem matricial.

**METODOLOGIA:**

**Será proposto um novo problema à turma, onde eles serão levados a raciocinar sobre como se efetua a multiplicação de duas matrizes.**

Problema 4)

Um restaurante oferece três opções de refeição para viagem: pequena, média e grande. Veja nas tabelas a quantidade de refeições vendida nesse restaurante durante dois dias e o preço de cada uma delas.

Quantidade de refeições vendida			
	Pequena	Média	Grande
Sexta-feira	21	35	15
Sábado	30	47	18

	Preço das refeições (R\$)
Pequena	8
Média	10
Grande	15

Use o espaço abaixo para representar esses valores em forma de matriz:

Como faremos para descobrir quanto esse restaurante arrecadou com a venda das refeições na 6ª feira e no sábado? Agora, complete a tabela abaixo, e represente-a em forma de matriz, com os valores que você encontrou.

	Arrecadação (R\$)
Sexta-feira	
Sábado	

**Neste momento espera-se que os alunos percebam que estes valores são obtidos com a multiplicação dos valores das linhas da 1ª tabela pelos valores da coluna da 2ª tabela.**

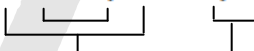
**Explique aos alunos que para efetuarmos multiplicações entre matrizes usamos esse mesmo raciocínio. Atente-os para o fato**

de que a ordem da matriz  $C$  (arrecadação) obtida corresponde ao número de linha de  $A$  (quantidade vendida) e ao número de colunas de  $B$  (preço unitário). E principalmente, observe que o número de colunas de  $A$  é igual ao de linhas de  $B$ .

De maneira geral:

Dadas a matriz  $A = (a_{ij})$  do tipo  $m \times n$  e a matriz  $B = (b_{ij})$  do tipo  $n \times p$ , o produto de  $A$  por  $B$  é a matriz  $C = (c_{ij})$  do tipo  $m \times p$ , em que cada elemento  $c_{ij}$  é a soma dos produtos dos elementos da linha  $i$  de  $A$  pelos elementos da coluna  $j$  de  $B$ , tomados ordenadamente. Indicamos o produto dessas matrizes por  $A \cdot B$  ou  $AB$ .

O produto  $AB$  de duas matrizes só é possível se o número de colunas de  $A$  for igual ao número de linhas de  $B$ . Dessa forma, a matriz  $C$  terá o mesmo número de linhas de  $A$  e o mesmo número de colunas de  $B$ :

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$


Ex: Dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , determine o valor de  $AB$ .

Resolver este exemplo com os alunos chamando a atenção para o exemplo do problema 4 que foi dado.

Neste momento os alunos têm muita dificuldade e costumam multiplicar a 1º elemento da linha da 1ª tabela por todos os elementos da coluna da 2ª tabela.

OBS: Existem situações em que  $A \cdot B = B \cdot A$ , mas de modo geral  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Exercícios de fixação do livro didático para explorar a multiplicação de duas matrizes.

## Atividade 4

**HABILIDADE RELACIONADA:** H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes; Resolver problemas utilizando matrizes e linguagem matricial;

**PRÉ-REQUISITOS:** Operações com matrizes e resolução de sistemas de equação do 1º grau.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 200 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Lápis, borracha e folhas de papel sulfite.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Grupo de até 3 alunos.

**OBJETIVOS:** Reconhecer uma aplicação prática da inversa de uma matriz; praticar a multiplicação de matrizes e a obtenção de uma matriz; conhecer princípios básicos da criptografia; trabalhar com operações e propriedades das matrizes por meio da codificação e decodificação de mensagens.

### METODOLOGIA:

Antes de iniciar a problemática acerca das matrizes inversas é necessário revisar com os alunos a resolução de sistemas de equações do 1º grau. A maioria dos alunos chega ao 2º ano do ensino médio sem lembrar como se resolve este tipo de problema, o que torna inviável prosseguir sem uma revisão do conteúdo. Para isso, abaixo seguem alguns exemplos que podem ser trabalhados juntamente com a turma. Caso haja a necessidade, é melhor perder um pouco mais de tempo e oferecer à turma a oportunidade de exercitar outros exemplos sozinhos, do que entrar em inversas sem que eles próprios consigam resolver um sistema.

Ex: Resolva os sistemas abaixo:

- a)  $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 3x + 4y = -9 \end{cases}$

Exemplos extras, caso haja necessidade:

- d)  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$
- e)  $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$
- f)  $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$

### Matriz inversa:

Qual é o número pelo qual devemos multiplicar o número 7 para que resulte o próprio número 7?

O número 1 é a resposta pois  $7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = 7$ .

Qualquer número real multiplicado pelo número 1 resulta no próprio número.

E em matrizes, isto também acontece, ou seja, existe uma matriz que ao ser multiplicada por outra dê a própria matriz? Que matriz é essa?

Para responder a esta pergunta vamos resolver a seguinte proposição:

I - Dadas as matrizes A e B abaixo efetue as seguintes operações:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) AI

b) IA

c) BI

d) IB

**Neste momento é preciso chamar a atenção do aluno para que  $AI = IA$  e que  $BI = IB$ .**

Atenção: o nosso interesse pela matriz identidade de ordem  $n$ , isto é  $I_n$ , está ligado ao produto de matrizes quadradas quando  $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ , sendo  $A$  uma matriz também de ordem  $n$ .

Agora precisamos responder uma outra questão: Dada uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , qual a matriz quadrada  $B$ , de mesma ordem, tal que  $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ ?

Na busca de resposta para essa questão vamos considerar o seguinte exemplo:

Ex: Obtenha uma matriz quadrada  $B$ , de ordem 2, tal que  $A \cdot B = I_2$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO:

Como não conhecemos a matriz  $B$ , vamos representar seus elementos por  $a, b, c, d$ , isto é

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Assim,

$$A \cdot B = I$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a - 2c & 5b - 2d \\ -7a + 3c & -7b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela igualdade dessas matrizes, temos:

$$5a - 2c = 1$$

$$-7a + 3c = 0$$

$$5b - 2d = 0$$

$$-7b + 3d = 1$$

Pela resolução dos sistemas abaixo, encontramos:

$$a = 3 \text{ e } c = 7$$

$$b = 2 \text{ e } d = 5$$

Portanto a matriz procurada é:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Agora, responda às seguintes questões:

a) No exemplo anterior  $A \cdot B = B \cdot A$ ?

**SOLUÇÃO: Sim, o aluno deverá verificar  $B \cdot A = I$**

b) Qual é o inverso do número 3,2?

**SOLUÇÃO: O inverso de 3,2 é o número  $x$  tal que  $x \cdot 3,2 = 1$ , isto é,  $x = 0,3125$**

c) Qual é a matriz  $B$  tal que  $A \cdot B = I_2$ , sendo  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ?

**SOLUÇÃO: Os sistemas formados para obter os elementos de  $B$  é impossível. Logo, não existe matriz  $B$  que satisfaça  $A$ .**

Resumindo:

Dada uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , se  $B$  é uma matriz de mesma ordem que  $A$  tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

então  $B$  será a matriz inversa de  $A$ , e  $A$  é dita *inversível*.

A matriz  $B$ , nessas condições, é representada por  $A^{-1}$ . Logo

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Agora, proponha à turma o seguinte:

Desafio:

- ❖ Cada equipe (de até 3 alunos) deve selecionar uma senha de quatro algarismos. Imagine que cada grupo represente um banco que precisa preservar as senhas de seus clientes.
- ❖ Forme uma matriz quadrada de ordem 2 a partir da senha escolhida, representando os dois algarismos na 1ª linha e os dois últimos na 2ª linha.

Por exemplo, com a senha 2509 podemos formar a matriz:  $S = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

- ❖ Coloque na lousa uma matriz 2 x 2 inversível; digamos:  $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Explique aos alunos que essa matriz, chamada *matriz chave* para decifrar códigos e senhas, só é conhecida pelo “banco” ou instituição responsável pela integridade e sigilo das informações de seus clientes.

- ❖ Peça aos alunos que multipliquem  $S$  por  $X$ .

No exemplo sugerido acima,  $S \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 12 \\ 36 & 18 \end{pmatrix}$

Essa matriz será chamada *matriz transmitida*.

- ❖ Proponha aos alunos o seguinte problema:  
“Como podemos ‘recuperar’ a senha do cliente, se só conhecemos a matriz chave e a matriz transmitida?”

Resposta:

Os alunos deverão concluir que é preciso multiplicar, à direita de  $S \cdot X$ , pela inversa de  $X$  ( $X^{-1}$ ) a fim de obter, “de volta”, a matriz  $S$  e, consequentemente, recuperar a senha do cliente.

De fato:  $(S \cdot X) \cdot X^{-1} = S \cdot (X \cdot X^{-1}) = S \cdot I_2 = S$

Assim, é preciso determinar, inicialmente, a inversa de  $X$ .

De  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , segue que:  $a = 1$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $c = -2$  e  $d = \frac{3}{2}$ .

Assim,  $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Devemos então multiplicar, à direita de  $S \cdot X$ , por  $X^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 26 & 12 \\ 36 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Logo, a senha recuperada é 2509.

Exercícios de fixação do livro didático para explorar o cálculo da inversa de uma matriz qualquer.

## Atividade 5

**HABILIDADE RELACIONADA:** H32 – Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3.

**PRÉ-REQUISITOS:** Conhecimentos mínimos em manipulação de softwares e coordenadas no plano cartesiano.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 200 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Caderno de atividades, livro didático, lápis, borracha e computador do colégio com acesso à internet, papel milimetrado e cola.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual (em sala de aula) e em dupla (no laboratório de informática).

**OBJETIVOS:** Compreender o conceito de determinante de uma matriz; obter o determinante de matrizes de ordens 1, 2, e 3; compreender como os determinantes podem ser usados para o cálculo da área de figuras planas, e aplicá-lo.

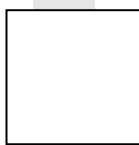
### METODOLOGIA:

Para o estudo dos determinantes serão usadas atividades da coleção do site M<sup>3</sup>Matemática Multimídia, desenvolvido pela Unicamp para o Ensino Médio de Matemática, no link <http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1227/index.html>.

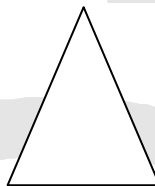
Porém, para a realização destas atividades será necessário que previamente o aluno já sabia encontrar o determinante de ordem 2. Desta forma, antes de ir para o laboratório, ainda em sala de aula, algumas atividades se fazem necessárias, conforme a seguir.

### Matrizes e Determinantes:

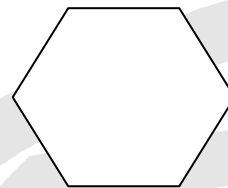
Dentre tantas aplicações dos determinantes, uma que podemos destacar é para o cálculo de figuras planas. É claro que para as figuras regulares isso pode ser facilmente feito através das fórmulas que aprendemos no ensino fundamental. Como os exemplos abaixo:



$$A = l^2$$

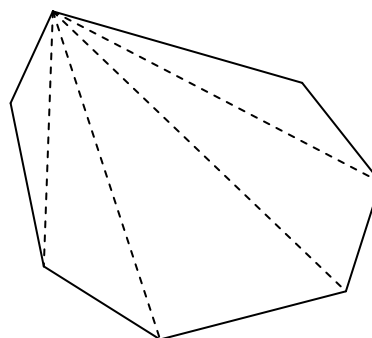


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



$$A = 6 \cdot \left( \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

Para um polígono de muitos lados e irregular, esse processo pode ficar mais complicado. Entretanto é fácil verificar que um polígono convexo pode ser decomposto em diversos triângulos e que a área do polígono é dada pela soma das áreas dos triângulos nos quais ele está dividido.



Assim, basta nos preocuparmos em como calcular a área dos triângulos que saberemos a área do polígono em questão. E é aí que os determinantes podem nos ajudar. Para isso, precisamos primeiramente dominar o processo do cálculo do determinante de uma matriz.

### Determinantes:

Regras práticas:

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

Chama-se **determinante da matriz  $A$** , e se indica por  **$\det A$** , o número obtido a partir de operações efetuadas com os elementos de  $A$ , de acordo com as seguintes regras:

- ❖ Se  $A$  é de ordem  $n = 1$  ( $A$  possui um único elemento), então  $\det A$  é igual ao elemento de  $A$ .

Ex: Se  $A = (5) \Rightarrow \det A = 5$

- ❖ Se  $A$  é de ordem  $n = 2$ , então  $\det A$  é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de  $A$  e o produto dos elementos de sua diagonal secundária.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12} \cdot a_{21})$$

↙ diagonal secundária
↘ diagonal principal

Usualmente, o determinante de uma matriz é colocado entre duas barras verticais.

Ex: Se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (3 \cdot 2) = 7 - 6 = 1$

- ❖ Se  $A$  é de ordem  $n = 3$ , utilizaremos o seguinte procedimento para obter o valor de  $\det A$ :

1º) copiamos ao lado da matriz  $A$  as suas duas primeiras colunas;

2º) multiplicamos os elementos da diagonal principal de  $A$ . Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais";

3º) multiplicamos os elementos da diagonal principal de  $A$ , trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos;

4º) somamos todos os resultados obtidos no 2º e no 3º passos.

Esse procedimento é conhecido como **Regra de Sarrus**.

Ex: Vamos calcular o determinante da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

**Resolver esse determinante com a turma e observar para que eles não se esqueçam de trocar os sinais dos produtos das diagonais secundárias, ao invés dos sinais das diagonais principais. Outro problema recorrente é a confusão que eles fazem com a multiplicação dos sinais e sua respectiva troca. Logo após, é preciso levar os alunos para o laboratório de informática para que eles possam interagir com o software Determinantes e Polígonos, da coleção M<sup>3</sup>Matemática Multimídia.**

Site

<http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1227/index.html>



Nele, os alunos poderão ter uma ideia melhor de como o cálculo dos determinantes pode ser útil. É importante que nos exercícios que serão feitos em sala, também sejam contempladas questões que envolvam a área de figuras planas irregulares. Para isso, peça aos alunos que usem o papel milimetrado para marcar os pontos do polígono e em seguida, traçá-lo.

Exercícios de fixação do livro didático para explorar o cálculo de determinantes e de áreas de figuras planas irregulares.



## Atividade 6

### HABILIDADE RELACIONADA:

H32 – Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3.

H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

**PRÉ-REQUISITOS:** Domínio dos conteúdos sobre matrizes e determinantes.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, caneta, lápis e borracha.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

**OBJETIVOS:** Resolver questões práticas sobre matrizes e determinantes.

### METODOLOGIA:

Aplicar a avaliação abaixo, que contém questões antigas do Saerjinho e alguns problemas práticos sobre matrizes e determinantes.

Após, avaliar os pontos que os alunos ainda não conseguiram dominar, a fim de selecionar os de maior escala e pontuar com eles problemas encontrados.

Questão 1)

(M111013RJ) Dadas as matrizes  $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  e  $N = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , qual o resultado do produto  $M \times N$ ?

- A)  $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$
- B)  $\begin{bmatrix} -20 & 10 \\ 0 & 0 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$
- C)  $\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$
- D)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$
- E)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$

Questão 2)

(M111011RJ) Dadas as matrizes  $k = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  e  $L = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ , qual é o resultado de  $2k - L$ ?

- A)  $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
- B)  $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$
- C)  $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 4 \\ 1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$
- D)  $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- E)  $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Questão 3)

(M121003RJ) Observe as matrizes R e S.

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

O produto das matrizes R e S é igual à matriz

- A)  $\begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 7 & 24 \end{bmatrix}$
- B)  $\begin{bmatrix} 17 & 36 \\ 39 & 80 \end{bmatrix}$
- C)  $\begin{bmatrix} 17 & 36 \\ 35 & 31 \end{bmatrix}$
- D)  $\begin{bmatrix} 18 & 28 \\ 39 & 80 \end{bmatrix}$
- E)  $\begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 31 & 32 \end{bmatrix}$

Questão 4)

(M111012RJ) O determinante da matriz  $Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  é igual a

- A)  $-\frac{57}{2}$
- B)  $-26$
- C)  $-\frac{49}{2}$
- D)  $-24$
- E)  $-22$

Questão 5)

(M121001RJ) Veja a matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

O valor do determinante dessa matriz é

- A)  $-17$
- B)  $-5$
- C)  $5$
- D)  $17$
- E)  $37$

**Gabarito: A - E; 2 - C; 3 - B; 4 - A; 5 - A**

Questão 6)

A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos alunos A, B e C nas provas de Português, Matemática e Conhecimentos Gerais em um exame de vestibular. Se os pesos das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em Conhecimentos Gerais), qual a multiplicação de matrizes que permite determinar a pontuação final de cada aluno? Determine a pontuação de cada um.

**SOLUÇÃO:**

A pontuação final do aluno A é:  $4 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 99$ .

A pontuação final do aluno B é:  $9 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 91$ .

A pontuação final do aluno C é:  $7 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 7 = 147$ .

A multiplicação matricial é:  $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 91 \\ 147 \end{pmatrix}$

**Questão 7)**

As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (A, B e C) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física, representadas por suas iniciais), nos meses de março e abril.

	Março				
	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

	Abril				
	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

a) qual tabela indica o número de faltas desses alunos no 1º bimestre?

b) no primeiro bimestre, qual aluno teve o maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em História?

**SOLUÇÃO:**

a)

	Março e Abril				
	P	M	B	H	F
Aluno A	3	3	0	5	5
Aluno B	1	1	3	4	2
Aluno C	8	5	5	4	5

b) C; C; A

**Questão 8)**

Verifique se  $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  é inversa de  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**SOLUÇÃO:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# AVALIAÇÃO

O processo de avaliação é um dos momentos mais importantes no processo de ensino-aprendizagem, pois é neste momento que o professor tem condições de detectar os problemas que os alunos vêm enfrentando e, assim, poder ajudá-los.

Por isso é de extrema importância que a avaliação se dê a todo o momento. Tanto na hora da explicação do conteúdo, com a participação do aluno, através de questionamentos à turma, inclusive nominalmente quando for preciso, quanto indo de mesa em mesa, observando as dificuldades que eles enfrentam na realização dos exercícios, orientando-os.

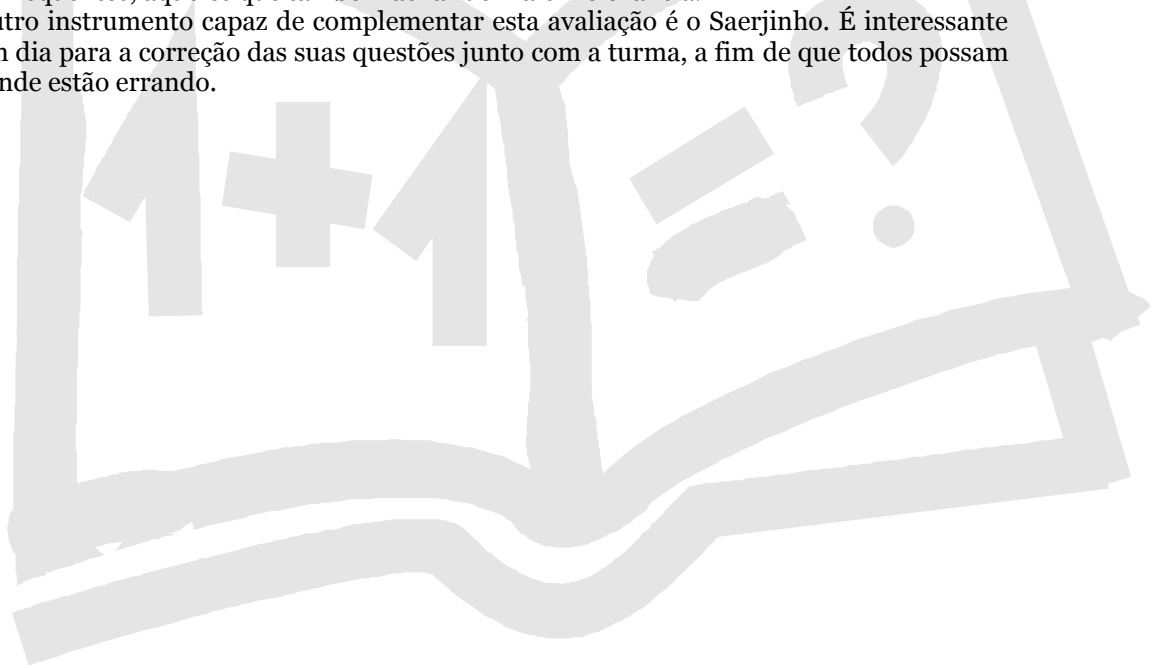
No desafio da pg 6 é preciso acompanhar os alunos e verificar se eles não estão apenas virando o desenho e sim transpondo as linhas em colunas. É importante pontuar esta questão com a turma, caso eles estejam fazendo confusão.

No desafio da pg 14 é preciso ir de mesa em mesa acompanhando a sua resolução. Neste momento é possível perceber se os alunos estão tendo problemas, por exemplo, com a multiplicação das matrizes.

Com a atividade de interação com o software (pg 16) é possível avaliar se os alunos já são capazes de encontrar o determinante de matrizes de ordem 2. Caso isso não aconteça, é necessário corrigir os problemas encontrados, juntamente com os alunos.

A atividade 6 (pg 18) faz-se necessária para detectar as dificuldades dos alunos na resolução de exercícios e problemas envolvendo matrizes e determinantes. Quando o professor for corrigir a avaliação, é importante não fazer a correção dos erros diretamente na folha de atividades. Isto precisa ser feito em um novo momento, juntamente com a turma, onde cada aluno poderá ver seu próprio erro e corrigi-lo. O professor precisa pontuar no quadro, além dos erros mais frequentes, aqueles que também achar de maior relevância.

Outro instrumento capaz de complementar esta avaliação é o Saerjinho. É interessante separar um dia para a correção das suas questões junto com a turma, a fim de que todos possam observar onde estão errando.



# BIBLIOGRAFIA

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: Ciência e Aplicações**. Ensino Médio - 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 2 v.

LONGEN, Adilson. Coleção Nova Didática: Matemática: Ensino Médio. Curitiba: Positivo, 2004. 3 v.

PIMENTEL, Elaine Gouvêa. **Matrizes e determinantes**. DMAT/UFGM, 2005. Disponível em: [www.mat.ufmg.br/~elaine/GAAL/matriz.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~elaine/GAAL/matriz.pdf) . Acesso em: 14 ago. 2012.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia. Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2011. 2 v.

ROTEIROS DE AÇÃO: Campo Conceitual 1: Matrizes e Determinantes. Projeto Seeduc: Formação Continuada, 2012. Disponível em: [www.profetoseeduc.cecierj.edu.br](http://www.profetoseeduc.cecierj.edu.br) . Acesso em: ago. 2012.

SAERJ: Saerjinho. Disponível em: [www.saerjinho.caedufjf/diagnostica/](http://www.saerjinho.caedufjf/diagnostica/) . Acesso em: 20 ago. 2012.

SOUZA, Joaquim. Coleção Novo Olhar: Matemática. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2012. 2 v.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. Matrizes e Imagens Digitais: Matrizes e Imagens Binárias. 2009. Disponível em: [www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix\\_boolean/matrix\\_boolean\\_br.html](http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html) . Acesso em 16 e 17 ago. 2012.