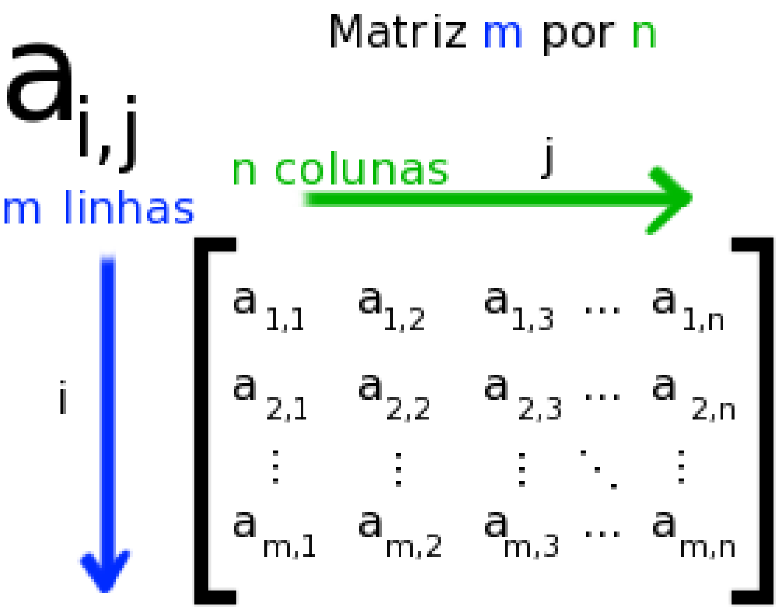
FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/CONSÓSIO CEDERJ

Matemática 2º Ano – 3º Bimestre /2012

Plano de Trabalho 1

Matrizes



Acesso em 24/08/2012 - http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Matriz_organizacao.png

Tarefa 03

Cursista: Flávio de Aguiar.

Tutor: Paulo Alexandre Alves de Carvalho.

Sumário

INTRODUÇÃO

Com esse plano de aula sobre matrizes, devemos compreender o conceito de matriz e suas aplicabilidades, favorecendo assim um melhor processo de ensino aprendizado, não deixando de repassar para o aluno o fator histórico e a importância do estudo.

Definimos matrizes como sendo um conjunto de números dispostos em uma tabela na forma de linhas e colunas no qual sugerimos tratá-los em bloco, de forma única. O nome matriz só veio com James Joseph Sylvester, 1850. Seu amigo Cayley, com sua famosa *Memoir on the Theory of Matrices*, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. Não devemos apresentar matrizes no Ensino Médio de forma artificial, pois vivemos hoje numa realidade bem diferente, o aluno e professor de ontem que não se inserirem nesse novo contexto ficarão completamente fora dessa realidade perante esse nosso grande avanço tecnológico, e com isso devemos deixar bem claro que exercícios repetitivos e poucas aulas contextualizadas não atendem mais os alunos de hoje. Temos maneiras fácies demonstrar isso através de tabelas de dupla entrada, aplicações em criptografia, no famoso caso da Teoria dos Jogos representada pelo “O Dilema do Prisioneiro”, nas transformações geométricas, nas rotas aéreas, no jogo de batalha naval, na construção de imagens digitais, nos diversos assuntos aplicados em nosso dia-a-dia e também podemos notar que os elementos das matrizes não precisam ser necessariamente números, pode ocorrer aplicação de trigonometria e logaritmos, dentre outros assuntos, inclusive outras matrizes.

Para um bom desenvolvimento da matéria, o aluno deverá dominar alguns conceitos básicos como soma e subtração dos números reais, resolver sistemas lineares, o professor deve ser capaz de direcionar a aula para a realidade do aluno e apresentar um real valor da matéria aos discentes.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 01

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Saber definir e identificar os diversos tipos de matrizes. H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com Matrizes.

- **PRÉ – REQUISITOS:** Realizar operações com os números Reais.

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 240 minutos (6 tempos de aula).

  Terça 2 tempos de 40minutos;(80 min.)
  Quinta 2 tempos de 40 minutos;(80 min.)
  Terça 2 tempos de 40 minutos; (80 min.)

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** **Leitura** sobre introdução de matrizes e os tipos de matrizes, além de realizar operações de soma e subtração de matrizes com um **material didático elaborado pelos professos** do 2º ano do Ensino Médio, explicação e demonstrações no **quadro branco** e apresentação de **vídeos** com auxílio do **notebook e data show**.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

- **OBJETIVOS:** Conceituar matrizes, apresentar os diversos tipos de matrizes, saber realizar as operações de somar e subtrair e relacionar os conceitos matemáticos sobre matriz com aplicações nos dias atuais, sendo toda matéria apresentada de forma bem contextualizada.

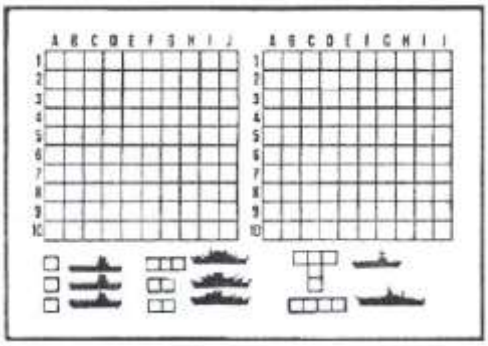
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

1. Leitura prévia da matéria no livro didático pelo aluno e realização de um fichamento e apresentação de aplicabilidade de matrizes, contextualização;
2. O aluno irá resolver os exercícios propostos pelo livro didático adotado no ano regente;
3. Aplicação de lista de exercícios de fixação e complementares;
4. Texto seguido de um vídeo para mostrar ao aluno a aplicabilidade de matrizes;

- **http://www.infowester.com/criptografia.php – texto sobre criptografia;**
- **(http://www.youtube.com/watch?v=265TB-TZ8g4) – vídeo; - após o texto sobre criptografia.**

ATIVIDADE 01 EM PRÁTICA

- Leitura das páginas do livro / cópia fiel no formato de apostila (20 minutos);
- Fichamento apresentado pelos aluno e início da aula sobre matrizes;
- Apresentação das matrizes através do jogo de batalha naval, passar para o aluno uma melhor ideia e aplicabilidade deum a tabela de linha e coluna.



http://www.oesquema.com.br/trabalhosujo/2011/12/14/batalha-naval-o-filme.htm

- O dilema do prisioneiro (DP) dito *clássico* funciona da seguinte forma:

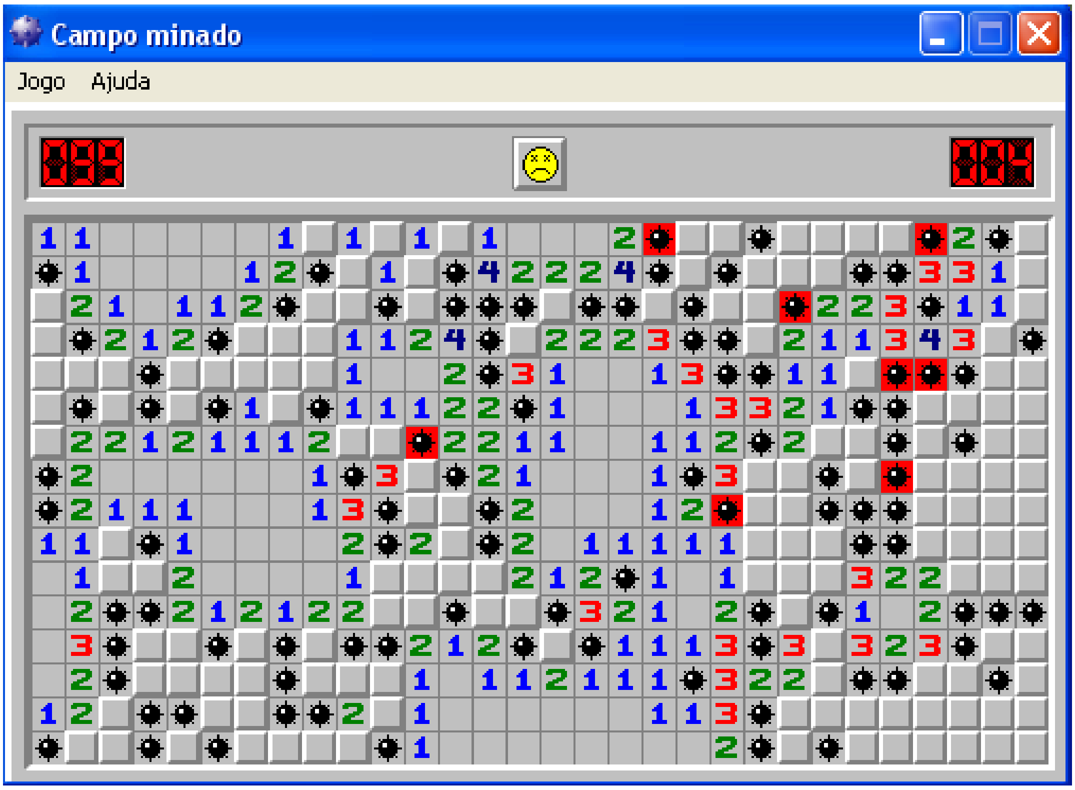
Dois suspeitos, A e B, são presos pela polícia. A polícia tem provas insuficientes para os condenar, mas, separando os prisioneiros, oferece *a ambos o mesmo acordo: se um dos prisioneiros, confessando, testemunhar contra o outro e esse outro permanecer em silêncio, o que confessou sai livre enquanto o cúmplice silencioso cumpre 10 anos de sentença. Se ambos ficarem em silêncio, a polícia só pode condená-los a 6 meses de cadeia cada um. Se ambos traírem o comparsa, cada um leva 5 anos de cadeia. Cada prisioneiro faz a sua decisão sem saber que decisão o outro vai tomar, e nenhum tem certeza da decisão do outro*. A questão que o dilema propõe é: o que vai acontecer? Como o prisioneiro vai reagir?

O enunciado clássico do dilema do prisioneiro, acima exposto, pode resumir-se, do ponto de vista individual de um dos prisioneiros, na seguinte tabela (**tabela de ganhos**):

	Prisioneiro "B" nega	**Prisioneiro "B" delata**
Prisioneiro "A" nega	**Ambos são condenados a 6 meses**	**"A" é condenado a 10 anos; "B" sai livre**
Prisioneiro "A" delata	**"A" sai livre; "B" é condenado a 10 anos**	**Ambos são condenados a 5 anos**

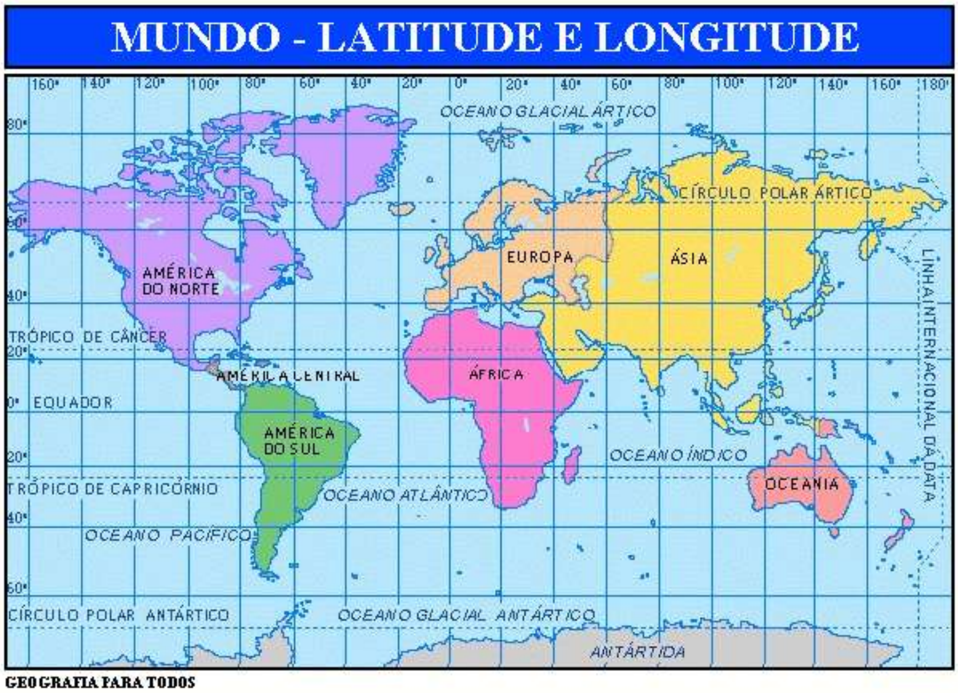
http://pt.wikipedia.org/wiki/Dilema_do_prisioneiro

CAMPO MINADO
Trabalhar com o aluno a ideia de linha e coluna.



APLICAÇÃO DE TABELA DE LINHAS E COLUNAS PARA EXPLICAR

LATITUDE E LONGITUDE



FONTE: http://www.not1.xpg.com.br/coordenadas-geograficas-latitude-e-longitude-fusos-horarios/

DEFINIÇÃO DE MATRIZES

Matrizes são objetos matemáticos organizados em **linhas e colunas**. Por exemplo, podemos colocar os dados referentes a altura, peso e idade de uma família de cinco pessoas descritos na tabela:

	altura (metros)	peso (quilogramas	Idade (anos)
João (pai)	1,82	93	62
Mariana (mãe)	1,70	70	60
Jorge (irmão)	1,85	80	35
Marina (irmã)	1,74	78	33
Júnior (irmão)	1,80	75	30

Cada um dos seus elementos tem dois índices ($a_{i\,j}$). O primeiro índice i indica à linha e o segundo índice j a coluna. O número de linhas e colunas que uma matriz tem chama dimensão da matriz. A matriz ao lado tem m linhas e n colunas e dizemos que ela tem dimensão m x n (m por n) e a representamos por A = $(a_{i\,j})_{m \times n}$. Quando o número de linhas é igual ao número de colunas dizemos que a matriz é de ordem n e a chamamos de matriz quadrada.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

TIPOS DE MATRIZES

MATRIZ LINHA:

É toda matriz que possui apenas uma linha, ou seja, é toda matriz do tipo 1 x n (n ∈ IN*).

Exemplo:

A matriz A abaixo é uma matriz linha:

A = [2 5 6 8]

Esta matriz é do tipo 1 x 4, pois possui 1 linha e 4 colunas.

MATRIZ COLUNA:

É toda matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, é toda matriz do tipo m x 1

(m ∈ IN*).

Exemplo:

A matriz A abaixo é uma matriz coluna:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é do tipo 3 x 1, pois possui 3 linhas e 1 coluna.

MATRIZ QUADRADA:

Dizemos que uma matriz é quadrada quando o número de linhas for igual ao número de colunas. Toda matriz quadrada de ordem n x n (n ∈ IN*) é chamada simplesmente de *matriz quadrada de ordem n*.

Exemplos:

As matrizes abaixo são matrizes quadradas:

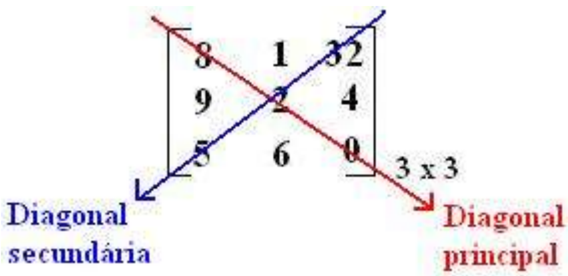
1) Matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

2) Matriz quadrada de ordem 3:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

OBS.: Quando a matriz é quadrada nela podemos perceber a presença de uma diagonal secundária e uma diagonal principal.



MATRIZ TRANSPOSTA

Dada uma matriz A de ordem m x n, a matriz transposta dela será representada por A^t de ordem " invertida " m x n. Essa ordem invertida significa que para transformamos uma matriz em matriz transposta, basta trocar os elementos das linhas pelo das colunas e vice – versa.

$$A= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Será uma matriz diagonal, toda matriz quadrada que os elementos que não pertencem à diagonal principal sejam iguais a zero. Sendo que os elementos da diagonal principal podem ser iguais a zero ou não. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

diagonal principal

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

diagonal principal

$$\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{4x4}$$

diagonal principal

MATRIZ IDENTIDADE

Para que uma matriz seja identidade ela tem que ser quadrada e os elementos que pertencerem à diagonal principal devem ser iguais a 1 e o retante dos elementos iguais a zero. Veja o exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}$$

diagonal principal

MATRIZ OPOSTA

Dada uma matriz B, a matriz oposta a ela é –B.

$$B = \begin{bmatrix} 50 & -11 \\ -63 & 7 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad -B = \begin{bmatrix} -50 & 11 \\ 63 & -7 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}_{3x2}$$

OBS.: Concluímos que, para encontrar a matriz oposta de uma matriz qualquer basta trocar os sinais dos elementos.

Texto apresentado para turma com intuito de demonstrar a aplicabilidade de matrizes e valorização do estudo.

TEXTO

O que é criptografia?

O termo **criptografia** surgiu da fusão das palavras gregas "kryptós" e "grápheín", que significam "oculto" e "escrever", respectivamente. Trata-se de um conjunto de conceitos e técnicas que visa codificar uma informação de forma que somente o emissor e o receptor possam acessá-la, evitando que um intruso consiga interpretá-la. Para isso, uma série de técnicas são usadas e muitas outras surgem com o passar do tempo.

Na computação, as técnicas mais conhecidas envolvem o conceito de *chaves*, as chamadas *chaves criptográficas (essa chave pode ser uma matriz 2x2)*. Trata-se de um conjunto de bits baseado em um determinado algoritmo capaz de codificar e de decodificar informações. Se o receptor da mensagem usar uma chave incompatível com a chave do emissor, não conseguirá extrair a informação.

http://www.infowester.com/criptografia.php

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Identifique o tipo de cada matriz:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 1 & 5 \\ 9 & 7 \\ 0 & 9 \end{matrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

2) Quantos elementos possui:

a) uma matriz 4x3 b) uma matriz 3x2 c) uma matriz 2x4

3) Três alunos A, B e C obtiveram, respectivamente, as seguintes notas; 5, 6, e 7 em química e 7, 9 e 6 em física. Escreva a matriz alunos x notas.

4) Dê o produto dos elementos da diagonal principal das matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} =$ b) $\begin{matrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{matrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

5) Calcule X e Y sabendo que A é uma matriz diagonal:

a) $\begin{matrix} 2x-y & y-3 \\ x+1 & 3x+2y \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x & 0 & z^2 \\ 0 & 2y & x-5 \\ 0 & y+4 & z-1 \end{matrix}$

6) Quantos elementos iguais a zero tem a matriz I4?

7) Na matriz I3 = $\begin{matrix} a-b & c-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a-3b & 0 & d-4 \end{matrix}$, calcule a + b + c + d.

LISTA DE EXERCÍCIOS DE

FIXAÇÃO E COMPLEMENTARES

1) As vendas em uma loja de departamentos em relação aos produtos bolsa, sapato e cintos, no primeiro trimestre de determinado ano podem ser expressas pela tabela a seguir.

	Janeiro	Fevereiro	Março
Bolsa	20000	18000	23000
Sapato	17500	23000	22000

Cinto	12350	12000	15000

a) Escreva a matriz que representa a tabela mostrada.

b) Qual a sua ordem (indique linhas e colunas: A_{mxn})?

c) Que elemento ocupa a posição $\mathbf{a_{23}}$**?**

2) Disputando um torneio de futebol, as equipes A e B apresentaram o seguinte desempenho:

- Equipe A: VITÓRIAS 5, DERROTAS 2, EMPATES 3;
- Equipe B: VITÓRIAS 4, DERROTAS 1, EMPATES 5;

Formar a matriz equipes x resultados.

3) Quatro alunos A, B, C e D obtiveram, respectivamente, as seguintes notas; 5,8, 6, e 7 em química e 7, 9,10 e 6 em física. Escreva a matriz alunos x notas.

4) Identifique o tipo de cada matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{matrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

5) (CESGRANRIO)

Cláudio anotou suas médias bimestrais de matemática, português, ciências e estudos sociais em uma tabela com quatro linhas e quatro colunas, formando uma matriz, como mostra a figura.

Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem da matriz apresentada, bastará multiplicar essa matriz por:

$$\begin{array}{l} \\ \text{matemática} \\ \text{português} \\ \text{ciências} \\ \text{est. sociais} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1^{\underline{o}}\text{b} & 2^{\underline{o}}\text{b} & 3^{\underline{o}}\text{b} & 4^{\underline{o}}\text{b} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5{,}0 & 4{,}5 & 6{,}2 & 5{,}9 \\ 8{,}4 & 6{,}5 & 7{,}1 & 6{,}6 \\ 9{,}0 & 7{,}8 & 6{,}8 & 8{,}6 \\ 7{,}7 & 5{,}9 & 5{,}6 & 6{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

6) (UFRS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante:

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P • , P,, Pƒ desse restaurante:

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P • , P, e Pƒ, está indicada na alternativa:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{array}$$

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

7)(UENF) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

VÍDEO SOBRE MATRIZES

http://www.youtube.com/watch?v=265TB-TZ8g4

Duração 15minutos 47 segundos

SOMA E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

SOMA ENTRE MATRIZES

As matrizes envolvidas na adição devem ser da mesma ordem. E o resultado dessa soma será também outra matriz com a mesma ordem. Se somarmos a matriz A com a matriz B de mesma ordem, A+B=C, teremos como resultado como resultado outra matriz C de mesma ordem e para formar os elementos de C somaremos os elementos correspondentes de A e B, assim: a11+b11 = c11.

Exemplo 01:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 02:

A= $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 3X3 e B= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 3X3, se somarmos a A+B, teremos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -6 \\ 8 & 0 & -3 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

SUBTRAÇÃO ENTRE MATRIZES

As matrizes envolvidas na subtração devem ser da mesma ordem. E a diferença delas deverá dar como resposta outra matriz, mas de mesma ordem. Se subtrairmos a matriz A da matriz B de mesma ordem, A-B=C, obteremos outra matriz C de mesma ordem. E para formamos os elementos de C, subtrairemos os elementos de A com os elementos de correspondentes de B, assim: a11-b11=c11.

A= $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 3X3 B= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 3X3, se subtrairmos A-B temos:

$$A \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS DE FIXÃO

1) Somar e subtrair as matrizes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} =$

f) $\begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{matrix} \quad - \quad \begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{matrix} \quad =$

g) $\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 6 \end{matrix} \; - \; \begin{matrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} =$

h) $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; + \; \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 1 \end{matrix} \; - \; \begin{matrix} 6 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix} =$

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 02

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Demonstração de uma matriz genérica e realizar a sua construção, além de efetuar cálculos envolvendo multiplicação de matrizes por um número real e entre matrizes e matrizes inversas. H33- C3 - Efetuar a multiplicação da matriz A por um número real K. C4 e Calcular a matriz C=A.B do tipo mxp, dadas as matrizes A = (aij)mxn e B = (bjk)nxp com i,j,k {1,2,3}.

  - **PRÉ – REQUISITOS:** Estudo dos sinais e saber desenvolver sistemas lineares.

  - **TEMPO DE DURAÇÃO:** 240 minutos (4 tempos de aula).

    Quinta 2 tempos de 40minutos;(80 min.)
    Terça 2 tempos de 40 minutos;(80 min.)
    Quinta 2 tempos de 40 minutos; (80 min.)

  - **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** **Leitura** sobre multiplicação de matrizes por um número real e multiplicação entre matrizes através de um fichamento realizado pelo aluno do material didático adotado, explicação e demonstrações no **quadro branco** e apresentação de **vídeos** com auxílio do **notebook e data show** .

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

- **OBJETIVOS:** Conceituar e exemplificar uma matriz genérica ,multiplicação de matrizes por um número real, multiplicação entre matrizes, matrizes inversas e apresentação de uma aplicação de matrizes através da criptografia.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

1. Leitura prévia da matéria no livro didático pelo aluno e realização de um fichamento;
2. O aluno irá resolver os exercícios propostos pelo livro didático adotado no ano regente;
3. Aplicação de lista de exercícios de fixação e complementares;
4. Apresentação de um vídeo; (*www.youtube.com/watch?v=9XT3p5mYdak)*
5. Trabalho em grupo de 4 alunos, passagem de mensagens criptografadas utilizando o conteúdo de matrizes inversas e multiplicação.

ATIVIDADE 01 EM PRÁTICA

- Leitura das páginas do livro / cópia fiel no formato de apostila (20 minutos);
- Fichamento apresentado pelos alunos no início da aula e início da aula sobre matrizes;

Matriz Genérica

Designa-se por matriz uma entidade matemática ou cientifica onde a informação é organizada e distribuída numa malha de m linhas e n colunas (m e n ∈ $\mathbb{N}^*$), que por sua vez formam uma tabela ou um quadro de dupla entrada.

Em regra às matrizes atribuem-se letras maiúsculas,$A_{m\times n}$, e aos seus elementos, ou entradas, minúsculas, $[a_{ij}]_{m\times n}$, estando estes sempre acompanhadas por dois índices (o primeiro (i) que indica a linha a que o elemento pertence e o segundo(j) que indica a coluna à qual o elemento pertence). Assim, o elemento a_{ij}pertence à i-ésima linha e à j-ésima coluna de uma matriz **A**. Uma matriz com **m** linhas e **n** colunas é chamada de matriz do tipo **m** por **n** (ou, simplesmente, matriz **m×n**), no caso em que m = n, a matriz designa-se por matriz quadrada de ordem n (ou, abreviadamente, matriz de ordem n).

Designa-se por matriz uma entidade matemática ou cientifica onde a informação é organizada e distribuída numa malha de m linhas e n colunas (m e n ∈ $\mathbb{N}^*$), que por sua vez formam uma tabela ou um quadro de dupla entrada.

Em regra às matrizes atribuem-se letras maiúsculas,$A_{m\times n}$, e aos seus elementos, ou entradas, minúsculas, $[a_{ij}]_{m\times n}$, estando estes sempre acompanhadas por dois índices (o primeiro (i) que indica a linha a que o elemento pertence e o segundo(j) que indica a coluna à qual o elemento pertence). Assim, o elemento a_{ij}pertence à i-ésima linha e à j-ésima coluna de uma matriz **A**. Uma matriz com **m** linhas e **n** colunas é chamada de matriz do tipo **m** por **n** (ou, simplesmente, matriz **m×n**), no caso em que m = n, a matriz designa-se por matriz quadrada de ordem n (ou, abreviadamente, matriz de ordem n). **Nota:** $\mathbb{N}^*$ = Números Naturais

Notação

Se A é uma matriz m x n escrevemos,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou ,$A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$, onde i ∈ {1, · · · ,m} é o índice de linha e $j \in \{1, \cdots, n\}$ é o índice de coluna.

EXEMPLO

1) Sendo a matriz A $_{2x2}$, onde aij = i+j , determine a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES POR UM NÚMERO REAL

Com as matrizes podemos desenvolver várias operações, como: adição e subtração entre matrizes, Potência de matrizes, multiplicação entre matrizes e multiplicação de matriz com número real. A multiplicação de uma matriz por um número real funciona da seguinte forma: considerando uma matriz qualquer C de ordem mxn e um número real qualquer p. Quando multiplicamos o número real p pela matriz C , encontraremos como produto outra matriz p.C de ordem mxn e seus elementos é o produto de p por cada elemento de C.

Veja o exemplo: Dada a matriz C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e o número real p = 3. O produto p.C será:

p . C = $3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

p . C = $\begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 & -5 \cdot 3 \end{pmatrix}$

p . C = $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$

Veja o exemplo que trabalha tanto com a multiplicação de número real por matriz como adição e subtração de matrizes.

Exemplo: Dada as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ calcule:

3A + 2B – 5C

$$3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -24 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & -24 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$$

Portanto, 3A + 2B – 5C = $\begin{pmatrix} 17 & -24 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Calcule:

a) 3.$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ = b) 5.$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ = c) 6.$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ =

EXERCÍCIO COMPLEMENTARES

2) Dadas as matrizes A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ e\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ calcule:

a) 3A + 2B - C =

b) 4B + 2C - A =

c) 2C – B – 3A =

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A multiplicação de matrizes é realizada de acordo com a seguinte condição: o número de colunas da 1ª matriz deve ser igual ao número de linhas da 2ª matriz. Observe alguns modelos de matrizes que podem ser multiplicadas, considerando o formato m x n.

A_{4X3} x B_{3X1}

A_{4X2} x B_{2X3}

DEMONSTRAÇÃO

Passos a serem seguidos:

1. **Multiplica a 1ª linha pela 1ª coluna, encontrando o elemento a11 e a 1ª linha pela 2ª coluna, assim encontrando o elemento a12;**
2. **Multiplica a 2ª linha pela 1ª coluna, encontrando o elemento a21 e a 2ª linha pela 2ª coluna, assim encontrando o elemento a22;**
3. **Multiplica a 3ª linha pela 1ª coluna, encontrando o elemento a31 e a 3ª linha pela 2ª coluna, assim encontrando o elemento a32;**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} \bullet b_{11} + a_{12} \bullet b_{21} & a_{11} \bullet b_{12} + a_{12} + b_{22} \\ a_{21} \bullet b_{11} + a_{22} \bullet b_{21} & a_{21} \bullet b_{12} + a_{22} \bullet b_{22} \\ a_{31} \bullet b_{11} + a_{32} \bullet b_{21} & a_{31} \bullet b_{12} + a_{32} \bullet b_{22} \end{vmatrix}$$

EXEMPLO 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} (2*2)+(5*4)+(9*5) & (2*7)+(5*3)*(9*2) \\ (3*2)+(6*4)+8*5) & (3*7)+(6*3)+(8*2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4+20+45 & 14+15+18 \\ 6+24+40 & 21+18+16 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 69 & 47 \\ 70 & 55 \end{vmatrix}$$

EXEMPLO 2

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} (0+2) & (25-1) & (5+4) & (30-3) \\ (0+4) & (15-2) & (3+8) & (18-6) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 24 & 9 & 27 \\ 4 & 13 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Dadas as matrizes A=$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$ calcule:

a) A x B =

b) B x C =

c) A x C =

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

2) Dadas as matrizes A=$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$ calcule:

a) 2 x A + B x C – A =

b) A x B x C – 2C =

c) C x A – (A x B) =

MATRIZ INVERSA

Encontrar a matriz inversa de uma matriz conhecida é um processo que envolve multiplicação e igualdade de matrizes. Vejamos como ocorre este processo partindo da definição de uma matriz inversa.

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n, e **X** uma matriz tal que $A.X = I_n$ e $X.A = I_n$ (onde I_n é a matriz identidade). Caso isso ocorra, denominamos a matriz X de matriz inversa de A, tendo como notação $A^{(-1)}$. Portanto, para encontrar a inversa de uma matriz dada, deveremos resolver a igualdade de matrizes (A.X = In). No caso em que sejam dadas duas matrizes e que seja pedido para verificar se uma matriz é a inversa da outra, basta efetuar a multiplicação destas duas matrizes. Se o resultado desta operação for a matriz identidade, afirmaremos que se trata de uma matriz inversa. Para aqueles que já sabem calcular o determinante, existe um modo prático para descobrir se uma matriz possui uma matriz inversa ou não. Basta calcular o determinante da matriz: caso o determinante dê igual a zero, não existe matriz inversa para ela**.**

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \det A = 0, com\ isso\ a\ matriz\ A\ não\ possui\ inversa. \rightarrow \nexists A^{-1}$

A parte principal para matriz inversa é a parte onde se deve encontrá-la tendo como base uma matriz dada. Vejamos como proceder. ***Exemplo:*** Encontre a matriz inversa da matriz A.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Sabemos que a matriz A-1 será uma matriz quadrada de mesma ordem. Explicite uma matriz inversa com elementos quaisquer. Sendo assim, usaremos letras para representar estes elementos.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sabemos que ao multiplicarmos estas duas matrizes, obteremos a matriz identidade. .

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por fim, teremos a seguinte igualdade:

$A * A^{-1} = I_n \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para tanto, deveremos compreender o processo de multiplicação de matrizes para realizarmos estes cálculos.

$\begin{pmatrix} 2a + 3c & 2b + 3d \\ 2a + 5c & 2b + 5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Através da igualdade de matrizes, obteremos 4 igualdades muito importantes para os nossos cálculos. Agrupá-las-emos de forma que as igualdades com mesmas incógnitas fiquem juntas.

$$1)\ \begin{cases} 2a + 3c = 1 \\ 2a + 5c = 0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2b + 3d = 0 \\ 2b + 5d = 1 \end{cases}$$

Em situações como estas devemos resolver estes sistemas de equações com duas incógnitas.

Resolvendo o sistema 1) pelo método da adição.

$$\begin{array}{l} 2a + 3c = 1 \\ \underline{2a + 5c = 0} \ - \\ -2c = 1 \rightarrow c = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Substituindo o valor de **c**, obteremos o valor de **a**.

$$2a + 3c = 1 \rightarrow 2a + 3.\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \rightarrow \ a = \frac{5}{4}$$

Resolvendo o sistema 2) de forma análoga, obteremos os seguintes valores para as incógnitas:

$$b = -\frac{3}{4} \quad d = \frac{1}{2}$$

Como encontramos os valores para os elementos da matriz inversa, vamos esboçá-la:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Neste primeiro momento verificaremos se de fato esta matriz corresponde à matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\frac{5}{4} - \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} - \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De fato, a matriz obtida corresponde à matriz inversa, pois o produto das duas matrizes resultou na matriz identidade. Como vimos, o estudo da matriz inversa abarca diversos conceitos da matemática, desde operações básicas até a resolução de sistemas com duas incógnitas. Compreender todos estes conceitos é importante, pois ao resolver equações envolvendo matrizes será requerido tal aprendizado.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Calcule a matriz inversa:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} =$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Sejam as matrizes A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e M = $\begin{pmatrix} X & -1 \\ -1 & Y \end{pmatrix}$, onde x e y são números reais e M a matriz inversa de A. Então o produto x.y é igual a:

a) 2/3

b) 3/2 (gabarito)

c) 1/2

d) 3/4

e) 1/4

2) Verifique se a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa da matriz B = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

VÍDEO SOBRE APLICAÇÃO DE MATRIZES EM CRIPTOGRAFIA

- www.youtube.com/watch?v=9XT3p5mYdak *(11min e 28 seg)*

TRABALHO EM SALA DE AULA SOBRE CRIPTOGRAFIA (EM GRUPO)

(PUC/PR) - Um Batalhão do exercito resolveu codificar suas mensagens através da multiplicação de matrizes. Primeiramente, associa as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo considerada:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**

Desta forma, supondo-se que o batalhão em questão deseja enviar a mensagem “PAZ”. Pode-se tomar uma matriz 2x2, da forma:

$\begin{bmatrix} P & A \\ Z & 0 \end{bmatrix}$, a qual, usando-se a tabela acima, será dada por: M = $\begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}$.

Tomando-se a matriz-chave C para o código, isto é: C(chave) =$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

transmite-se a mensagem “PAZ” através da multiplicação das matrizes M e C, ou seja: M.C = $\begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 31 & 47 \\ 50 & 75 \end{bmatrix}$ ou através da cadeia de números **31 47 50 75**. Desta forma, utilizando-se a mesma matriz-chave C, a decodificação da mensagem **51 81 9 14** será compreendida pelo batalhão como a transmissão da palavra:LUTE

a) FOGO
b) AMOR
c) VIDA (gabarito)
d) FUGA
e) GABARITO

Decodificando, temos o Produto: $\begin{bmatrix} 51 & 81 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} ou \begin{bmatrix} V & I \\ D & A \end{bmatrix}$

FONTE DO EXERCÍCIO:

QUESTÃO RETIRADA DO FÓRUM 1 DO CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA 2012.

AVALIAÇÃO

- O aluno deverá reconhecer vários significados e interpretações de um conceito, comparar e integrá-los;
- Utilizar modelos e símbolos para representar conceitos e contextualizá-los;
- Indicar se os alunos são capazes de verbalizar e definir os conceitos;
- Identificar e produzir exemplos e contra-exemplos;
- Avaliar a capacidade do aluno em usar as informações e se conseguem aplica-las em situações que requeiram raciocínio e pensamento criativo, além de saber se são capazes de utilizar a matemática para comunicar ideias;
- A avaliação deve analisar a predisposição dos alunos em face dessa ciência e o modo como a valorizam.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Dante, Luiz Roberto ,Matemática, volume único: 1ª ed.-São Paulo : Ática ,2005.
- Matemática / Edwaldo Bianchini, Herval Paccola; ilustradores Adilson Secco, Paulo Manzi e Mário Azevedo Matsuda. – 1ª ed. – São Paulo: Moderna, 2004.
- ROTEIROS DE ACAO – Matrizes e determinantes – Curso de Aperfeicoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Medio – 3º bimestre/2012 –http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 08/2012.
- http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/multiplicacao-um-numero-real-por-uma-matriz.htm;
- http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-matriz-inversa.htm;
- http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=47:defmatrizes&catid=41:conteudosal&Itemid=45;
- http://www.youtube.com/watch?v=9XT3p5mYdak;
- http://educacaomatematica2010.blogspot.com.br/2011/01/matrizes-e-criptografia.htm.
- http://www.google.com/imgres?imgurl=http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem.
- http://www.oesquema.com.br/trabalhosujo/2011/12/14/batalha-naval-o-filme.htm.
- http://www.professorwaltertadeu.mat.br/ProfEduardo.htm.
- http://www.not1.xpg.com.br/coordenadas-geograficas-latitude-e-longitude-fusos-horarios.