PLANO DE AULA
MATRIZES E DETERMINANTES

SÉRIE: 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

ALUNA: Flávia B. F. Pitz alves

Sumário

1- Introdução:

O estudo das Matrizes é um eficaz instrumento de cálculo, com importante aplicação em várias áreas do cotidiano. Por exemplo, na Informática, utilizam-se as planilhas eletrônicas ou folhas de cálculos, onde é permitido organizar informações, realizar cálculos, etc..Na Engenharia elétrica, a matriz ajuda a resolver problemas de circuitos elétricos e linhas de transmissão de energia elétrica.Na história sabe-se que os chineses gostavam muito de utilizar diagramas em forma de quadrado, um exemplo é o quadrado mágico. No entanto cabe lembrar que o assunto também é utilizado em outras áreas, como Física, Química, Engenharia e Economia.

Em toda matriz quadrada está associado um número no qual é chamado de Determinante. Existem várias aplicações dos determinantes na Matemática, ela é utilizada principalmente na resolução de sistemas lineares, mas pode auxiliar também no cálculo de área de um triângulo no plano cartesiano, quando se sabem as coordenadas de seus vértices.

O plano de aula tem como objetivo levar ao aluno a compreender que o estudo das Matrizes e Determinantes não possui apenas apresentação de fórmulas prontas e que a mesma está presente em diversas áreas do conhecimento, com isso será apresentado a modelagem matemática utilizando modelagem lúdicas, exemplos e programas de computadores para facilitar os educandos em suas atividades.

2 - Desenvolvimento:

O trabalho será dividido em 4 aulas , onde cada aula terá 2 tempos de 50 minutos com excessão da 4º aula que terá 3 tempos de 50 minutos, será apresentado as definições sobre Matrizes e Determinantes.

As tarefas serão destinadas a colaborarem com o aprendizado do aluno, auxiliando e fixando a matéria, utilizando uma metodologia lúdica e tradicional quando forem usados os exercícios do livro didático.

A última aula será a realizada em grupo, utilizando a criptografia para decifrar mensagens ocultas utilizando as matrizes com forma de solução do problema, fará com que o aluno desenvolva o raciocínio e compreenda melhoras multiplicações e inversas das matrizes.

3 -Objetivos:

- Compreender o conceito de matriz.
- Interpretar e representar uma tabela como uma matriz.
- Identificar elementos de uma matriz.
- Reconhecer diversos tipos de matrizes
- Realizar operações com matrizes
- Compreender o conceito de determinante de uma matriz.
- Calcular o determinante de uma matriz.

4 -Pré-requisito

- Fração e números decimais
- Equação do 1º e 2º grau
- Potenciação e raiz quadrada
- Sistemas lineares

5 -Recursos didáticos pedagógicos

- Quadro, Piloto , Livro didático , Apagador e Sala de informática

6- Metodologias:

- Aulas expositivas;

- Exercícios de fixação;
- Aplicações práticas.

1º Aula: Apresentação das Matrizes

Duração: 2 tempos de 50 minutos.

Local: sala de vídeo e sala de aula.

Pré requisitos

Utilizar e apresentar um resumo sobre os pré requisitos necessários para a introdução do tema da aula, antes de iniciar a apresentação do vídeo.

Iniciar a aula com a apresentação de um vídeo chamado "Cooperativa do leite".
http://www.mais.mat.br/wiki/Cooperativa_de_leite

Sinopse: Uma cooperativa de produtores de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso coletivo, mas precisa decidir em qual fazenda seria construo a cooperativa levando em conta vários fatores.Com auxilio de uma tabela é possível responder e acabar com o dilema da construção.

	A	B	C	D	E	F
A	0	5	11	14	12	15
B	5	0	6	9	14	10
C	11	6	0	3	8	4
D	14	9	3	0	5	2
E	12	14	8	5	0	7
F	15	10	4	2	7	0

Conteúdo: O vídeo fornece noção sobre, tabelas, matrizes e solução de problemas.

Objetivo: Mostrar aos alunos uma aplicação simples de matriz através de uma tabela de dados numéricos.

Duração aproximada: 10 minutos.

Após a apresentação do vídeo comentar sobre o mesmo e ver o que foi entendido pelos alunos , logo em seguida iniciar em sala de aula com um exemplo prático, também em forma de tabela.

Exemplo:

A tabela a seguir mostra o consumo mensal, em quilogramas, de três alimentos básicos, durante um trimestre, por uma família.

Inscrição em faculdades locais, 2005

	ABRIL	MAIO	JUNHO
ARROZ	10	8	9
FEIJÃO	4	5	6
CARNE	5	7	10

Fonte: Dados fictícios, apenas para fins ilustrativos

Para encontrar, por exemplo, a quantidade de carne consumida por essa família no mês de maio, procuramos o número localizado na 3ª linha e na 2ª coluna da tabela. 7 quilogramas.

Outro exemplo é o número 4, situado na 2ª linha e na 1ª coluna da tabela, que representa o consumo de feijão no mês de abril.

Vamos representar a tabela usando um par de parênteses ou um par de colchetes.

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \; ou \; \begin{vmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

Essa tabela é denominada uma Matriz, que será tema dos estudos a seguir.

1 Matrizes

1.1 Conceitos Básicos

Chamamos de matriz a uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

1-Exemplo: Tabela contendo, altura, peso e idade de alguns alunos da turma 2001.

	Altura-metros	Peso-quilos	Idade-anos

André	1,60	60	16
Maria	1,55	50	16
Joana	1,65	62	15
Gustavo	1,70	75	17

Fonte: Dados fornecidos pelos alunos da turma

Ao abstrair os significados das linhas e colunas, vamos obter uma matriz .

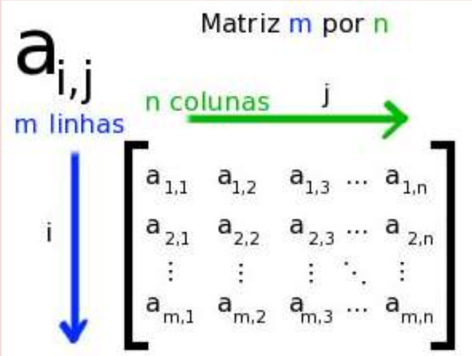
$$\begin{pmatrix} 1{,}60 & 60 & 16 \\ 1{,}55 & 50 & 16 \\ 1{,}65 & 62 & 15 \\ 1{,}70 & 75 & 17 \end{pmatrix}$$

Definição: Uma matriz de ordem *mxn* é toda tabela numérica com *m.n* elementos dispostos em *m* linhas e *n* colunas, sendo m e n elementos naturais e diferentes de zero.

Assim, no exemplo anterior podemos definir a matriz de ordem 4 x 3. Ou seja, 4 linhas e 3 colunas.

1.2 Representação genérica de uma matriz.

Uma matriz pode ser representada pelo símbolo aij, onde i: linhas e j: colunas.



Algumas matrizes recebem nomes especiais, devido suas características.

- **Matriz linha** : matriz do tipo 1 x n , ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A = [5 8 -2 3], do tipo 1 x 4 .

- **Matriz coluna** : matriz do tipo m x 1 , ou seja, com uma única coluna. Por exemplo, $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, do tipo 3 x 1.

- **Matriz quadrada** : matriz do tipo n x m , ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem n. Os elementos da forma (a_{ij}) constituem a diagonal principal. Os elementos (a_{ij}) em que
  i + j = n + 1   constituem a diagonal secundária.
  Por exemplo, a matriz
  $C = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, é do tipo 2 x 2 , isto é, quadrada de ordem 2.

- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por 0_{mxn} . Por exemplo,
  $$0_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$$B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por (I_n), sendo n a ordem da matriz. Por exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para uma matriz identidade $\begin{cases} a_{ij} = 1 & se \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$

- **Matriz transposta**: Dada uma matriz A (m x n) , a matriz que se obtém trocando ordenadamente as linhas <u>pelas</u> colunas chama-se **transposta** de A, e é indicada por A_t (ou por A^t). Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

- **Matriz simétrica**: matriz quadrada de ordem n tal que $A = A^t$. Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica pois temos $a_{ij} = a_{ji}$.

- **Matriz anti-simétrica**: Uma matriz quadrada A = [a_{ij}] é anti-simétrica se
- A^t = - A . Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz oposta**: matriz (– A) obtida a partir de(A) trocando-se o sinal de todos os elementos de (A). Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad -A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz inversa:** Dada uma matriz quadrada A, se existir outra matriz D da mesma ordem que verifique: A.B = B.A = I , onde I é a matriz identidade. Dizemos que B é matriz inversa de A e representamos por A^{-1}.

Propriedades da matriz inversa

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Nem toda matriz quadrada tem inversa. Se existir a matriz inversa de A, dizemos que a matriz A é inversível ou regular ou não singular.
Caso contrário A é inversível ou regular ou não regular.
Exemplo 1:

Verifique se a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e a matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ são inversas entre si.
Resposta

Para que seja verdade o produto A . B = I_2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+5 & 4+5 \\ 1+3 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos que as matrizes A e B <u>não</u> são inversas.

- **Igualdade de Matrizes :** Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n , são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = B$ se, e somente se, $x = 8$, y = - 1, $z = 5$ e $t = 3$.

Exercícios

- **TEMPO DE DURAÇÃO**: 10 minutos
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA**: Grupos de 2 alunos.
- **OBJETIVOS:** Estimular o raciocínio através da interpretação de tabelas referente a situações do cotidiano.

(Ufpel –RS) Cada elemento a_{ij} da matriz T indica o tempo, em minutos, que um semáforo fica aberto, num período de 2 minutos, para que haja o fluxo de automóveis da rua (i) para a rua (j), considerando que cada rua tenha mão dupla.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De acordo com matriz, o semáforo que permite o fluxo de automóveis da via 2 para a 1 fica aberto durante 1,5min. De um período de 2 minutos.

Com base no texto e admitindo que é possível até 20 carros passarem por minuto cada vez que o semáforo se abre, é correto afirmar que, das 8h às 10h, considerando o fluxo indicado pela matriz T, o número máximo de automóveis que podem passar da rua 3 para a 1 é:

a) 300 b) 1200 c) 600 d) 2400 e) 360

Resposta:

Como cada 2 minutos o semáforo fica aberto 0,5 minutos, nesse período passam 10 carros. Então:

120 : 2 = 60 intervalos

60 . 10 = 600

Portanto 600 carros.   Letra C

Encerramento

2º Aula: Apresentação das Matrizes

Duração: 2 tempos de 50 minutos.

Local: sala de aula.

1- operação de matrizes

A operação com qualquer matriz sempre resultará em outra matriz, independentemente da operação utilizada.

1.1 adição e subtração de matrizes

- A soma de duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ de mesma ordem é uma matriz $C = (a_{ij})_{mxn}$ tal que $C = a_{ij} + b_{ij}$.

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mn}$ em que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

- A subtração de matrizes é dada pela sentença:

$A – B = A + (– B)$

Exemplo: Dadas as matrizes A e B determine A + B e A – B.

$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Resposta:

$$A + B = \begin{pmatrix} 10+1 & 2+4 \\ 4+4 & 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 10-1 & 2-4 \\ 4-4 & 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição e subtração

Sendo A, B, C e 0(matriz nula) matrizes de mesmo tipo, valem as propriedades:

- Comutativa: A + B = B + A
- Associativa: A + (B + C) = (A + B) + C
- Elemento neutro: A + 0 =) + A = A
- Elemento oposto : A + (-A) = (-A) + A = 0

1.2 multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes $A_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{n\times p}=[b_{jk}]_{n\times p}$, então: $A\cdot B=C=[c_{ik}]_{m\times p}$, onde

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+a_{i3}\cdot b_{3k}+.....+a_{in}\cdot b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$$

Exemplos:

1. Se $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 3 & -1\\ 5 & -2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$, então $C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\end{bmatrix}$, onde:

$c_{11}=1\cdot(-4)+3\cdot(5)+(-1)\cdot(-1)=12$

$c_{12}=1\cdot(0)+3\cdot(-2)+(-1)\cdot(2)=8$

$c_{13}=1\cdot(3)+3\cdot(-1)+(-1)\cdot(0)=0$

$c_{14}=1\cdot(-1)+3\cdot(1)+(-1)\cdot(6)=-4$

$c_{21}=(-2)\cdot(-4)+(-1)\cdot(5)+(1)\cdot(-1)=2$

$c_{22}=(-2)\cdot(0)+(-1)\cdot(-2)+(1)\cdot(2)=4$

$c_{23}=(-2)\cdot(3)+(-1)\cdot(-1)+(1)\cdot(0)=-5$

$c_{24}=(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot(1)+(1)\cdot(6)=7$

Logo $C=\begin{bmatrix}12 & -8 & 0 & -4\\ 2 & 4 & -5 & 7\end{bmatrix}$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes

(Desde que sejam possíveis as operações)

i) $A\cdot I=I\cdot A=A$, sendo I a matriz identidade

ii) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ e $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

iii) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

iv) $0\cdot A=0$ e $A\cdot 0=0$

Observe que em geral $A\cdot B\neq B\cdot A$, podendo inclusive um dos membros estar definido e o outro não.

1.3 Multiplicação de um número real por uma Matriz:

Para multiplicarmos um número real por uma matriz, basta que cada elemento da matriz seja multiplicado pelo número real em questão.

Por exemplo:

$$4.\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 0 \\ -4 & 28 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de um número real por uma Matriz:

a) k. (n. A) = (k.n).A

b) (k + n).A = k.A + n.A

c) k.(A + B) = k.A + k.B

d) 1.A = A

e) 0. A = 0

f) k.O = O

Atividade 2

- **TEMPO DE DURAÇÃO**: 10 minutos
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA**: Grupos de 2 alunos.
- **OBJETIVOS:**Compreender as operações de matrizes utilizando uma situação do cotidiano.

(UFOP-MG) Uma doceira produz dois tipos de bombons, A e B. Para a produção desses bombons, são utilizados três ingredientes: X,Y e Z nas seguintes proporções:

$$\begin{cases} bombom\ A: 5\ unidades\ de\ X \\ 3\ unidades\ de\ Y\ e\ 4\ unidades\ de\ Z \\ bombom\ B: 8\ unidades\ de\ X \\ 2\ unidades\ de\ y\ e\ 7\ unidades\ de\ Z \end{cases}$$

A doceira recebeu a seguinte encomenda para os meses de janeiro e fevereiro:

$$\begin{cases} janeiro: 50\ bombons\ A\ e\ 20\ bombons\ B \\ 20\ bombons\ B \\ fevereiro: 30\ bombons\ A\ e\ 40\ bombons\ B \end{cases}$$

Com base nesses dados, escreva uma matriz que represente:

a) a quantidade de ingredientes por bombons

b) a quantidade de bombons por meses

c) a quantidade de ingredientes por meses.

Resposta:

a) D = $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ b) M = $\begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$

c) D.M = $\begin{pmatrix} 410 & 470 \\ 190 & 170 \\ 340 & 400 \end{pmatrix}$

exercícios

01. Obter a matriz $\mathbf{A = (a_{ij})_{2x2}}$ definida por $\mathbf{a_{ij} = 3\,i - j}$.

Se a matrix é 2x2 então os valores de i e j variam de 1 a 2. Calculando os valores, temos:

$\mathbf{A_{11} = 3 \times 1 - 1 = 2}$

$\mathbf{A_{12} = 3 \times 1 - 2 = 1}$ $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A_{21} = 3 \times 2 - 1 = 5}$

$\mathbf{A_{22} = 3 \times 2 - 2 = 4}$

02. Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (p). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

	Camisa A	Camisa B	Camisa C
Botões p	**3**	**1**	**3**
Botões G	**6**	**5**	**5**

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho, é dado pela tabela:

	Maio	**Junho**
Camisa A	**100**	**50**
Camisa B	**50**	**100**
Camisa C	**50**	**50**

Nestas condições, obter a tabela que dá o total de botões usados em maio e junho.

Resposta: O problema se resume na multiplicação das matrizes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \\ 50 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 400 \\ 1100 & 1050 \end{pmatrix}$$

	Maio	**Junho**
Botões p	**500**	**400**
Botões G	**1100**	**1050**

Utilizar exercícios do livro didático como fixação da matéria

Encerrar

3º Aula: Apresentação das Matrizes

Duração: 2 tempos de 50 minutos.

Local: sala de aula.

1. determinante de uma matriz

A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.

2. Cálculo dos determinantes

2.1 determinante da matriz de ordem 1

O determinante da matriz quadrada de 1ª ordem é igual ao próprio elemento da matriz .

Exemplo: $\left|-\frac{2}{3}\right| = -\frac{2}{3}$

2.2 Determinantes da matriz de 2ª ordem

O determinante da matriz quadrada de 2ª ordem é igual diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária .

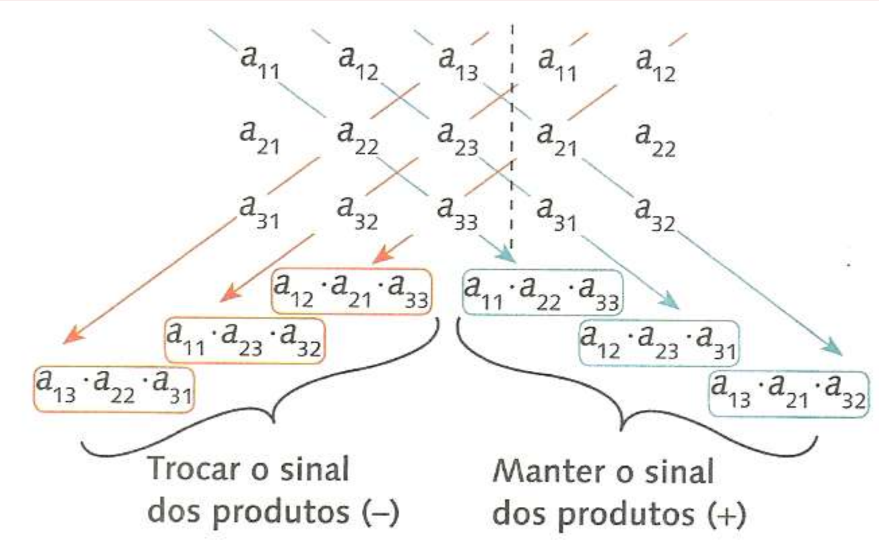
Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2.4) - [(-3).(-1)] = 8 - 3 = 5$

2.3 Determinantes da matriz de 3ª ordem.

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3, utiliza-se a Regra de Sarrus.

Essa regra diz que para encontrar o valor numérico da matriz, basta repetir as duas primeiras colunas à direita do determinante e multiplicar os elementos do determinante da seguinte forma:

Dada a matriz , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ podemos calcular o *det A* da seguinte forma:



$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Observações:

O determinante de uma matriz quadrada não se altera se trocarmos ordenadamente linhas por colunas.

Exemplo:

1- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ Dado a matriz calcule o determinante.

Resposta:

- Dado o determinante de ordem 3, aplicar a Regra de Sarrus
- Repetimos as duas primeiras colunas

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

- Multiplicamos os elementos das diagonais secundárias e os elementos das diagonais principais

- Sendo que os produtos das diagonais secundários devem ter seus sinais invertidos, ficando da seguinte forma o valor numérico desse determinates

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{-5 \quad 0 \quad 0}_{\text{inverte os sinais}} \qquad -2 \quad -6 \quad 0$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$-5 \quad 0 \quad 0 \qquad -2 \quad -6 \quad 0$$

= 5 – 2 – 6 = - 3

2- Dado $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ a matriz calcule o determinante.

Resposta:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 12 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

D = 48 + 0 + 0 – 100 – 0 - 0 = - 52

3- Calcular o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 8 & 4 & 80 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix}$

Resposta:

- Colocando 4 em evidência na 2ª linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 8 & 4 & 80 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

- Colocando 5 em evidência na 3ª coluna:

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

- Aplicando Sarrus no determinante 3 x 3, teremos:

4 . 5 . 35 = 400

4- Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e calcular o número real m, tal que: det (A – mB)= 0

Resposta:

$$A - mB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4m & 2m \\ 3m & -m \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2-4m & 1-2m \\ 3-3m & 4+m \end{pmatrix}$$

Como det (A – mB) = 0 , devemos ter: (2 – 4m)(4+ m) – (3 – 3m)(1 – 2m) = 0

$10m^2 - 5m + 5 = 0 \leftrightarrow 2m^2 + m - 1 = 0$, daí m = -1 ou m = 1/2

3. Co-fator

Cada elemento da matriz possui o seu cofator, e temos a expressão que determina o cálculo deste cofator.

O cofator de a_{ij} é o número A_{ij} em que: $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$

Você deve estar se perguntando o que é este D_{ij}. Temos que D_{ij} é o determinante da matriz que é obtida através da matriz A, contudo a i-ésima linha e j-ésima coluna são eliminadas.

Exemplo: Determine os cofatores dos elementos: a_{13} e a_{22}, da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Como vimos, para calcular o cofator do elemento a_{13} iremos utilizar a expressão que conhecemos do cofator.

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.D_{13}$$

Note que precisamos determinar a matriz D_{13} para calcular o seu determinante. Esta matriz será obtida eliminando a linha 1 e a coluna 3 referente à matriz A. Sendo assim, temos que:

$$D_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ 4 & 0 & \cancel{3} \\ 3 & 8 & \cancel{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4 * 8 - 3 * 0 = 32$$
$$A_{13} = (-1)^4.32 = 32$$

De forma análoga, procederemos para encontrar o cofator do elemento a_{22}.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} . D_{22}$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{3} & 2 \\ \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 3 & \cancel{8} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 * 5 - 3 * 2 = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 . (-1) = 1 . (-1) = -1$$

Pelo teorema de Laplace podemos relacionar os cofatores de uma matriz para determinar o determinante de uma matriz com ordem n.

Utilizar os exercícios do livro didáticos como fixação.

encerrar

4º Aula: Apresentação das Matrizes

Duração: 3 tempos de 50 minutos.

Local: sala de aula.

Essa aula será dedicada a uma tarefa sobre matrizes.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA**: Grupos de 4 alunos.

1. **OBJETIVOS:** Nesta atividade os alunos aprenderão como criptografar mensagens usando matrizes e fixar conteúdos como multiplicação e inversão de matrizes.

- **METODOLOGIA:** Será apresentada uma mensagem codificada e será explicado como será decifrada utilizando matrizes. Depois, cada grupo deverá criar sua própria mensagem criptografada e troca-la com os outros. O desafio é tentar decifrar o que o outro grupo quis dizer sabendo a matriz chave que usaram.

1 ATIVIDADE

" A Criptografia é uma ciência muito rica e interessante que desenvolveu ao longo da história, culminando na máquina enigma usada pelos nazistas durante a Segunda Grande Guerra Mundial e aos modernos computadores."

1. Instruções para iniciar a tarefa

1.1 Como criptografar usando matrizes?

Para codificar uma mensagem usando este método é necessário que, primeiramente, cada letra do nosso alfabeto e símbolos desejados sejam associados a vetores 2 x 2 .
A seguir, apresentamos uma tabela com um exemplo para essa associação.

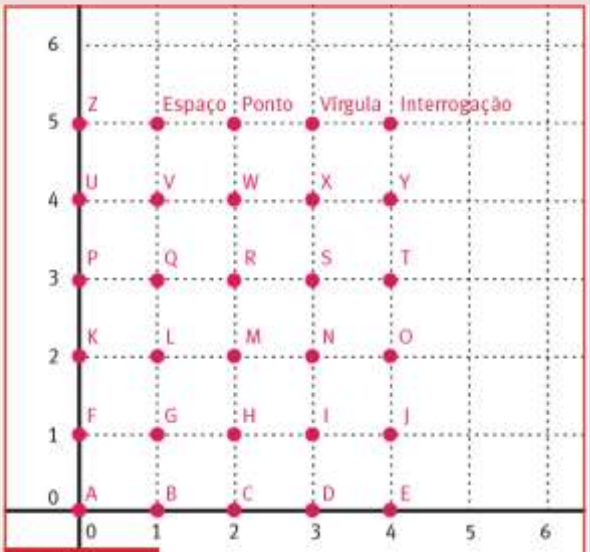
Decidido qual  associação usar, construa uma matriz A de apenas 2 linhas e, sendo a 1ª linha será o vetor x e a 2ª linha será o vetor y e codifique uma mensagem. Para isso, basta colocar os vetores que representam as letras da mensagem um na frente do outro.

FIG. 1

Exemplo: Matemática.

Montar a mensagem codificada em forma de matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pode-se, criar uma matriz 2 x 2 para usar como chave. Ela deve ser inversível para garantir que a mensagem poderá ser decodificada.

Exemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por fim, criptografe sua mensagem, transformando-a em uma matriz A'.

Para isso, deve-se fazer a multiplicação C.A

Usando o exemplo de mensagem, temos:

$$A' = C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 4 & 4 & 0 & 7 & 4 & 2 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 10 & 5 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Assim a mensagem está oculta, para decifrar é preciso encontrar a matriz inversa de C e multiplicar por A'.

Logo: $A = (C^{-1} . A')$

Após as explicações de como montar mensagens criptografada, faça uma pequena competição na sala de aula.

- Peça que cada grupo monte uma mensagem com até 20 caracteres.
- Depois troquem com outro grupo.
- O grupo que decifrar primeiro a mensagem do outro grupo ganha o jogo.

AVALIAÇÃO:

A importância da avaliação é tê-la como uma reflexão, tanto do processo de aprendizagem do aluno quanto do próprio desempenho no processo ensino.

O plano de aula é um instrumento de grande importância para o professor e para o aluno, ele enfatiza a prática da resolução de problemas e com isso os alunos terão a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos sobre funções quadráticas, o uso do laboratório de informática tem grande importância no processo ensino-aprendizado, dando significado aos conteúdos trabalhados.

O desenvolvimento de atividades e exercícios extraclasse através de situações-problemas dá aos alunos a oportunidade de postarem discussões em sala de aula sobre erros, acertos e dificuldades encontradas, é também uma outra maneira do professor avaliar o conhecimento adquirido pelos alunos ao longo das aulas dadas.

Referências bibliográficas

1- RIBEIRO, Jackson – Matemática, Ciência, linguagem e tecnologia- 2ª ano, São Paulo/2011-1ª edição

Sites relacionados com o tema.

http://www.leoakio.com/matrizes-determinantes.html

http://www.mspc.eng.br/matm/matriz110.shtml

http://www.mundofisico.joinville.udesc.br/PreVestibular/2005-1/mod1/node50.html

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1020