FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 463 - João Borges Barreto - Ururai – Campos dos Goytacazes/RJ
PROFESSOR: Príscila Henriques Gomes Oliveira
MATRÍCULA: 09519935
SÉRIE: 2ª
TUTOR (A):Deivis de Oliveira Alves

PLANO DE TRABALHO SOBRE MATRIZES E DETERMINANTE

Príscila Henriques Gomes Oliveira
phgoliveira@ibest.com.br

1. Introdução:

Iniciaremos o estudo de matrizes e determinantes, aplicando sempre exemplos e exercícios.

Utilizaremos os roteiros 1 e 2 do curso de formação continuada da SEEDUC para fixação das operações com matrizes.

Na construção dos conhecimentos serão sempre utilizados exemplos a cada item estudado.

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

O plano trabalho esta organizado na perspectiva de implementar os roteiros propostos pelo curso de formação continuada da SEEDUC, observando sempre a realidade da escola.

E neste sentido não poderemos utilizar o computador com softwares matemáticos, uma vez que não há tais softwares instalados.

No mais, faremos atividades e exposição do conteúdo em sala de aula, mas sempre tentando aplicar os exemplos propostos nos roteiros e demais bibliografias utilizadas, construído assim o conhecimento do aluno.

Atividade:

Segue a apostila que costumo passar para os alunos e seguimos esta sequência durante as aulas, inclusive consta as atividades com gabarito, que costumo aplicar nas aulas.

Capítulo 1 - Matrizes

1.1 Definição

As matrizes são tabelas de números reais utilizadas em quase todos os ramos da ciência e da engenharia. Várias operações realizadas por computadores são através de matrizes. Vejamos um exemplo. Considere a tabela abaixo que apresenta o peso, a idade e a altura de 5 pessoas.

Nome	Peso(kg)	Idade(anos)	Altura(m)
Ricardo	70	23	1,70
José	60	42	1,60
João	55	21	1,65
Pedro	50	18	1,72
Augusto	66	30	1,68

O conjunto ordenado dos números que formam a tabela é denominado **matriz** e cada número é chamado **elemento** da matriz.

$$\begin{bmatrix} 70 & 23 & 1{,}70 \\ 60 & 42 & 1{,}60 \\ 55 & 21 & 1{,}65 \\ 50 & 18 & 1{,}72 \\ 66 & 30 & 1{,}68 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 70 & 23 & 1{,}70 \\ 60 & 42 & 1{,}60 \\ 55 & 21 & 1{,}65 \\ 50 & 18 & 1{,}72 \\ 66 & 30 & 1{,}68 \end{pmatrix}$$

Neste exemplo temos uma matriz de ordem 5 x 3 (lê-se: cinco por três), isto é, uma matriz formada por 5 linhas e 3 colunas. Representa-se uma matriz colocando-se seus elementos entre parênteses ou entre colchetes.

Exemplos:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$: matriz de ordem 2 x 3 (2 linhas e 3 colunas)

$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$: matriz de ordem 1 x 3 (1 linha e 3 colunas)

$\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$: matriz de ordem 2 x 1 (2 linhas e 1 coluna)

1.2 Representação Algébrica

Utilizamos letras maiúsculas para indicar matrizes genéricas e letras minúsculas correspondentes para os elementos. Algebricamente, uma matriz pode ser representada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} com\, m\, e\, n \in \mathbb{N}^*$$

Pode-se abreviadamente representar a matriz acima por $A = (a_{ij})_{n \times m}$

a_{ij} = i – linha

j – coluna

a_{42} = 18 (lê-se: a quatro dois é igual a dezoito)

(na tabela significa a idade de Pedro 18)

Exemplo: Achar os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ em que $a_{ij} = 3i - j$.

Resolução: A representação genérica da matriz é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$a_{ij} = 3i - j$$

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}=3\cdot1-1=2\\a_{12}=3\cdot1-2=1\\a_{21}=3\cdot2-1=5\\a_{22}=3\cdot2-2=4\\a_{31}=3\cdot3-1=8\\a_{32}=3\cdot3-2=7\end{array}\right.\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&1\\5&4\\8&7\end{bmatrix}$$

1.3 Matriz Quadrada

Se o número de linhas de uma matriz for igual ao número de colunas, a matriz é dita quadrada.

Exemplo:

$A=\begin{bmatrix}3&4\\-1&0\end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2

Observações:

1ª) Quando todos os elementos de uma matriz forem iguais a zero, dizemos que é uma **matriz nula.**

2ª) Os elementos de uma matriz quadrada, em que i = j, formam uma diagonal denominada **diagonal principal**. A outra diagonal é chamada **diagonal secundária**.

Resolva:

1) Ache os elementos da matriz A = (a_{ij}) de ordem 3, em que $a_{ij}=i^2+j^2$

Resp.: $\begin{bmatrix}2&5&10\\5&8&13\\10&13&18\end{bmatrix}$

2) Escreva os elementos da matriz A = (a_{ij}) de ordem 3, definida por $a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}, se\ i\neq j\\0, se\ i=j\end{cases}$

Resp.: $\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$

3) Escreva os elementos da matriz A = $(a_{ij})_{4x2}$, definida por $a_{ij}=\begin{cases}i+j, se\ i\leq j\\i-j, se\ i>j\end{cases}$

Resp.: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

1.4 Matriz unidade ou matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a 0, é denominada **matriz unidade ou matriz identidade.** Representa-se a matriz unidade por I_n.

Exemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Matriz tranposta

Se A é uma matriz de ordem m x n, denominamos transposta de A a matriz de ordem n x m obtida pela troca ordenada das linhas pelas colunas. Representa-se a matriz transposta de A por A^t.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ a sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

1.6 Igualdade de Matrizes

Sejam as matrizes A e B de mesma ordem. Se cada elemento de A for igual ao elemento correspondente de B, as matrizes A e B são ditas iguais.

$$A = \left\lfloor a_{ij} \right\rfloor_{mxn} \qquad B = \left\lfloor b_{ij} \right\rfloor_{mxn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} e \ B = \begin{pmatrix} x+y & 5 \\ 3x-y & 1 \end{pmatrix}$, calcular x e y para que A =B.

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

$$4x = 12$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 3 \Rightarrow y = -1$$

$$Solução: \ x = 3 \ e \ \ y = -1$$

Resolva:

1) Determine x e y, sabendo que $\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$

Resp: x = 5 e y = -1

2) Determine a, b, x e y, sabendo que $\begin{pmatrix} x+y & 2a+b \\ 2x-y & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

Resp: x = 1 , y = 2 , a = 2 e b = -5

3) Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 4 \\ -6 & 3 & y \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & 8 & z \end{pmatrix}$, calcule x, y e z para que B = A^t.

Resp: x = $\sqrt{2}$, y = 8 e z = 2

4) Sejam $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & a^2 \\ -27 & \log_3 \frac{1}{81} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2^b & 9 \\ a^3 & c \end{pmatrix}$ calcule a, b e c para que A=B.

Resp: a = - 3 , b = c = - 4

1.7 Operações com matrizes

Adição e Subtração: a adição e subtração de duas matrizes do mesmo tipo é efetuada somando-se ou subtraindo-se os seus elementos correspondentes.

Exemplo:

$C = A + B$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} sen^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz oposta: denomina-se matriz oposta de uma matriz A a matriz – A cujos elementos são os simétricos dos elementos correspondentes de A

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Adição:

Comutativa: A + B = B + A

Associativa: A + (B + C) = (A + B) +C

Elemento Neutro: A + 0 = A

Elemento Oposto: A + (-A) = 0

Exemplo: Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} e\ C=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$

b) $A-B^t-C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$

Exemplo: Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} e B=\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcular a matriz X tal que $X-A+B=0$

O segundo membro da equação é uma matriz nula de ordem 3 x 1.

Se $X-A+B=0 \Rightarrow X=A-B=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Resolva:

1) Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz X tal que $X=A+A^t$

Resp: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

2) Sendo A = $(a_{ij})_{1x3}$ tal que $a_{ij}=2i-j$ e B = $(b_{ij})_{1x3}$ tal que $b_{ij}=-i+j+1$, calcule A+B.

Resp: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3) Ache m, n, p e q, de modo que: $\begin{bmatrix} m & 2m \\ p & p \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n & -n \\ q & -3q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Resp: $m=5,\ n=2,\ p=2\ e\ q=-1$

4) Calcule a matriz X, sabendo que $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ $e\ (X+A)^T=B$

Resp: $\begin{bmatrix}4 & -4\\ 2 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

Multiplicação de um número real por uma matriz:

Para multiplicar um número real por uma matriz multiplicamos o número por todos os elementos da matriz, e o resultado é uma matriz do mesmo tipo.

A = (a_{ij})

K = número real

K por A

B = (b_{ij}), onde, b_{ij} = K.a_{ij}

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Exemplo:

1. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$

a) $2X + A - B = 0$

$$2X = +(-A)+B \Leftrightarrow X = \frac{B+(-A)}{2}$$

$$X = \frac{1}{2}.\left\{\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -4\end{bmatrix}\right\}=\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ -3 & 6 & -5\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix}1/2 & /2 & 1/2\\ -3/2 & 3 & -5/2\end{bmatrix}$$

b) $3X - 2A + B = 0$

$$3X = 2A+(-B) \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}.[2A+(-B)]$$

$$X = \frac{1}{3}.\left\{\begin{bmatrix}6 & 4 & -2\\ 0 & -10 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\right\}=\frac{1}{3}.\begin{bmatrix}2 & 6 & -2\\ 3 & -11 & 9\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix}2/3 & 2 & -2/3\\ 1 & -11/3 & 3\end{bmatrix}$$

Resolva:

1) Para $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Resolva $X + 2A - B = 0$

Resp: $\begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -3 & 11 & -9 \end{bmatrix}$

2) Para $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Resolva $\frac{X}{3} + 2A = B$

Resp: $\begin{bmatrix} -6 & -18 & +6 \\ -9 & +33 & -27 \end{bmatrix}$

3) Resolva o sistema $\begin{cases} X + Y = A + B \\ X - Y = 2A - B \end{cases}$, sendo $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Resp: $X = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 6 \end{bmatrix}$

<u>Multiplicação de Matrizes</u>

Não é uma operação tão simples como as anteriores; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Vejamos a seguinte situação.

Durante a 1ª fase da Copa do Mundo de 1998 (França), o grupo do Brasil era formado também pela escócia, Marrocos e Noruega. Os resultados estão registrados abaixo em uma matriz A, de ordem 4 x 3.

País	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Então: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

A pontuação pode ser descrita pela matriz B, de ordem 3 x 1

Número de Pontos	
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Então: $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Terminada a 1ª fase a pontuação é obtida com o total de pontos feitos por cada país. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por AB (produto de A por B).Veja como é obtida a classificação:

$$Brasil: 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$$
$$Escócia: 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$
$$Marrocos: 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$$
$$Noruega: 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esse exemplo sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes:

$$A_{4x3} \cdot B_{3x1} = AB_{4x1}$$

Observe que definimos o produto AB de duas matrizes quando o número de colunas de A for igual ao de linhas de B; além disso, notamos que o produto AB possui o número de linhas de A e o número de colunas de B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

<u>Exemplo 1:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{2x3} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

A matriz existe se n = p (o número de coluna de A é igual o número de linha da B.)

$$C = \begin{pmatrix} 1.(2) + 2.(-1) + 1.(2) & 1.(3) + 2(4) + 1.(-1) \\ 2.(2) + 3.(-1) - 2.(2) & 2.(3) + 3.(4) - 2.(-1) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -3 & 20 \end{pmatrix}_{2x2}$$

<u>Exemplo 2:</u>

Dada as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) A.B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 1+0 \\ 4+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

b) B.A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+1 \\ 0+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) A.C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+0 \\ 4+0 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) C.A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+0 \\ 0+4 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Observação: 1ªPropriedade Comutativa A.B=B.A, **não** é valida na multiplicação de matrizes.

<u>Exemplo 3:</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calcule:

A.B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Observação: Se A e B são matrizes tais que AB = 0 (matriz nula), não podemos garantir que uma delas (A ou B) seja nula.

<u>Exemplo 4:</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) A.B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+0 & 2+2+0 & 3+(-2)+0 \\ 1+1+0 & 2+1+0 & 3+(-1)+0 \\ -1+4+0 & -2+4+0 & -3-4+0 \end{pmatrix}$

$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

b) A.C =
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+0 & 2+2+0 & 3+(-2)+0 \\ 1+1+0 & 2+1+0 & 3+(-1)+0 \\ -1+4+0 & -2+4+0 & -3-4+0 \end{pmatrix}$$

$$A.C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Observação: A.B = A.C , B $\neq$ C. – na álgebra a.b = a.c $\Leftrightarrow$ b = c

3ª Propriedade: o cancelamento do produto de matrizes não é válido.

Propriedades:

- Distributiva: A.(B + C) = A.B + A.C
- Associativa: A.(B.C) = (A.B).C
- Elemento neutro: A.In = A

Resolva:

1) Efetue:

a) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Resp: $\begin{bmatrix} 21 \\ -11 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Resp: [17]

c) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Resp: $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$

2) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^2.

Resp: $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) Sabendo que $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule MN-NM.

Resp: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Matriz Transposta

Seja A uma matriz m x n. Denomina-se matriz transposta de A (indica-se A^t) a matriz n x m cujas linhas são ordenadamente, as colunas de A.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Transposta:

- $A = B \Leftrightarrow A^t = B^t$
- $(A^t)^t = A$
- $(K.A)^t = K.A^t$ (K real)
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(A.B)^t = B^t.A^t$ (no produto de A.B, inverte a ordem)

Resolva:

1) Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, mostre que $(A.B)^t = B^t.A^t$.

Matriz simétrica

Quando A = A^t dizemos que A é matriz simétrica.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & -9 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Matriz anti-simétrica

Quando A = - A^t dizemos que A é matriz anti-simétrica.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -8 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada **A**, de ordem **n**, se **X** é uma matriz tal que AX = I_n e XA = I_n, então **X** é denominada matriz inversa de **A** e é indicada por $\mathbf{A^{-1}}$. Quando existe a matriz inversa de **A**, dizemos que **A** é uma matriz inversível ou não-singular.

Exemplo: Verifique se existe e, em caso afirmativo, determine a matriz inversa de A = $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução: Pela definição temos,

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5a+8c & 5b+8d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas,

$$\begin{cases} 5a+8c=1 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow a=-3 \; e \; c=2$$

$$\begin{cases} 5b+8d=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow b=8 \; e \; d=-5$$

Então X = $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, para AX = I_2.

A seguir verificamos se XA = I_2.

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3.5+8.2 & -3.8+8.3 \\ 2.5+-5.2 & 2.8+-5.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} OK$$

Então $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

1) Determine a inversa das matrizes:

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Resp: $\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

Resp: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

Equações matriciais do tipo AX = B ou XA = B, para A inversível.

Seja A uma matriz tal que exista A^{-1}. Sabendo que AX = B, vamos demonstrar que X = A^{-1}B.

$$AX = B$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$\therefore X = A^{-1}B$$

O mesmo também é válido para $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$

1) Sabendo que $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

a) verifique se $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

b) determine X tal que AX = B

Resp: a) sim b) $X=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

Não deixe de resolver a lista de exercícios de matrizes!!!

Lista de Exercícios de Matrizes

1. Construa a matriz real quadrada A de ordem 3, definida por: $a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} \text{ se } i < j \\ i^2 - j + 1 \text{ se } i \geq j \end{cases}$

Resposta: $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 4 & 3 & 32 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

2. Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) N – P + M
b) 2M – 3N – P
c) N – 2(M – P)

Resposta: a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 11 & -8 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -4 \\ -2 & 1 & 6 \\ -14 & -10 & -9 \end{pmatrix}$

3. Calcule a matriz X, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $(X + A)^t = B$.

Resposta: $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine *a* e *b*, de modo que AB = I, em que I é a matriz identidade.

Resposta: $a = 1$ e $b = 0$

5. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) A^2
b) A^3
c) A^2B
d) $A^2 + 3B$

Resposta: a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -17 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcule $AB + B^t$

Resposta: $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

7. Resolva a equação:
$$\begin{pmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2x^2 - 3y \\ 2x - y - 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Resposta: V = {(2,3),(2,-3)}

8. Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{pmatrix}$, determine os valores de *a* e *b*, tais que $B = P.A.P^{-1}$.

Resposta: *a* = 24 e *b* = -11

9. Determine os valores de *x*, *y* e *z* na igualdade abaixo, envolvendo matrizes reais 2 x 2: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-y & 0 \\ y-z & 0 \end{pmatrix}$

Resposta: *x* = 0, *y* = 0 e *z* = 0 ou *x* = 3, *y* = 6, *z* = 9

10. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2} i\right) \text{se } i = j \\ cos(\pi j) \text{se } i \neq j \end{cases}$, determine:

a) A^t
b) A^2
c) A^{-1}

Resposta: a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Testes:

11. A é uma matriz *m* x *n* e B é uma matriz *m* x *p*. A afirmação falsa é:
   a) A + B existe se, e somente se, *n = p.*
   b) $A = A^t$ implica *m* = *n*
   c) A.B existe se, e somente se, *n = p*
   d) $A.B^t$ existe se, e somente se, *n = p.*
   e) $A^t.B$ sempre existe.

Resposta: letra C

12. Seja $A = (a_{ij})$ a matriz real quadrada de ordem 2, definida por $a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} \text{ para } i < j \\ i^2 + 1 \text{ para } i \geq j \end{cases}$. Então:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 5 & 5\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 5\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ e) n.d.a.

Resposta: letra A

13. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}2 & -1/2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, então a matriz -2AB é igual a:

a) $\begin{pmatrix}8 & -2\\ 14 & 7\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-8 & -2\\ 14 & 7\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-8 & -2\\ -14 & -7\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}8 & 2\\ 14 & 7\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}-8 & 2\\ -14 & -7\end{pmatrix}$

Resposta: letra E

14. Considere as matrizes:

$A=(a_{ij})$, 4 x 7 onde $a_{ij}=i-j$

$B=(b_{ij})$, 7 x 9 onde $b_{ij}=i$

$C=(c_{ij})$, tal que C = AB.

O elemento C_{63}:

a) é -112.
b) é -18.
c) é -9.
d) é 112.
e) não existe.

Resposta: letra E

15. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, para A.B temos:

a) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

Resposta: letra B

16. O produto M.N da matriz $M=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ pela matriz $N=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

a) não se define.
b) É a matriz identidade de ordem 3
c) É uma matriz de uma linha e uma coluna.
d) É uma matriz quadrada de ordem 3.
e) Não é uma matriz quadrada.

Resposta: letra D

17. A inversa da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ c) Inexistente. d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Resposta: letra B

18. Se $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$, então:

a) $x = 5$ e $y = -7$
b) $x = -7$ e $y = -5$
c) $x = -5$ e $y = -7$
d) $x = -7$ e $y = 5$
e) $x = 7$ e $y = -5$

Resposta: letra B

19. Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, então a matriz X, tal que $\frac{X - A}{2} = \frac{X + 2B}{3}$, é igual a:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

Resposta: letra D

20. Se A e B são matrizes tais que: $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, então a matriz $Y = A^t.B$ será nula para:

a) $x = 0$
b) $x = -1$
c) $x = -2$
d) $x = -3$
e) $x = -4$

Resposta: letra E

21. A Matriz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, na qual x é um número real, é inversível se, e somente se:

a) $x \neq 0$ b) $x \neq 1$ c) $x \neq \frac{1}{2}$ d) $x \neq -\frac{1}{2}$ e $x \neq \frac{1}{2}$ e) $x \neq -1$ e $x \neq 1$

Resposta: letra E

22. A solução da equação matricial $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ é a matriz:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Resposta: letra B

23. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 4-3x & 7-x \\ 0 & -10 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 1 & x-1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. O valor de x para que se tenha: A + BC = D é:

a) 1
b) -1
c) 2
d) -2

Resposta: letra C

24. As matrizes abaixo comutam, $\begin{bmatrix} a & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. O valor de a é:

a) 1
b) 0
c) 2
d) -1
e) 3

Resposta: letra A

OBS.: para os alunos a apostila é fornecida sem as resposta!!

Capítulo 2 - Determinantes

2.1 Definição

Determinante é um número real que se associa a uma matriz quadrada.

2.2 Determinate de uma matriz quadrada de 2ª ordem

Dada a matriz de 2ª ordem $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, chama-se determinante associado a matriz A (ou determinante de 2ª ordem) o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Então, determinante de $A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Indica-se $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Observação: Dada a matriz A de ordem 1, define-se como determinante de A o seu próprio elemento, isto é:

$\det A = |A| = a_{11}$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2x2}$

$\det A = 2.1 - 3.4 = 2 - 12$

$\det A = -10$

Resolva:

1) Resolva a equação: $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Resp: $S = \left\{ -\dfrac{17}{3} \right\}$

2) Resolva a equação: $\begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

Resp: $S = \{-4, 2\}$

3) Resolva a inequação: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} \geq -x$

Resp: $S = \{x \in R \mid x \leq -3 \ ou \ x \geq 2\}$

4) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} e \ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule det(AB).

Resp: -12

2.3 Menor Complementar

O menor complementar D_{ij} do elemento a_{ij} da matriz quadrada A, é o determinante que se obtém de A, eliminando–se dela a linha "*i*" e a coluna "*j*", ou seja, eliminando a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij} considerado.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, calcular D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, e D_{32}.

Resolução:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9$ $\quad D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -20$ $\quad D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -5$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5 \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

2.4 Cofator

Consideremos a matriz quadrada de 3ª ordem A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Chama-se Cofator do elemento a_{ij} da matriz quadrada o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar de a_{ij} e que é representado por $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular:

a) A_{11} b) A_{13} c) A_{32}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-14) = -14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (28) = 28$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6+8) = -14$$

Resolva: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ determine A_{13}, A_{21}, A_{32} e A_{33}.

Resp: A_{13} = 29, A_{21} = 15, A_{32} = 6 e A_{33} = 3.

2.5 Definição de Laplace

O determinante associado a uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$ é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou de uma coluna) qualquer pelos respectivos cofatores. Exemplo:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 3, podemos calcular o det A a partir de determinantes de ordem 2 e da definição de Laplace. Escolhendo os elementos da primeira linha temos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$
$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-15) + (-1) \cdot 18 = -12 + 45 - 18 = 15$$

Observação: Para se aplicar esse método é melhor escolher a linha ou coluna que tiver o maior número de zeros.

Resolva: Calcule o determinante da matriz A utilizando a definição de Laplace:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Resp: det A = 11

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Resp: det A = -74

2.6 Regra de Sarrus (regra prática para calcular determinantes de ordem 3)

Seja a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, repetimos as duas primeiras colunas à direita e efetuamos as seis multiplicações em diagonal. Os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal. Os produtos obtidos da diagonal secundária mudam de sinal. O determinante é a soma dos valores obtidos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \det A = (1 \cdot 1 \cdot 1) + (2 \cdot 0 \cdot 4) + (3 \cdot 2 \cdot 2) - (3 \cdot 1 \cdot 4) - (1 \cdot 0 \cdot 2) - (2 \cdot 2 \cdot 1) =$$
$$= 1 + 0 + 12 - 12 - 0 - 4 = -3$$

Resolva:

a) Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Resp: det A = 15

b) Resolva a equação $\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ x+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Resp: $x = \frac{23}{4}$

c) Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine x para que det A = det B

Resp: $x = \frac{13}{2}$

d) Resolva a equação $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & 4 \\ x & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Resp: $S = \{0,4\}$

e) Seja M = (m_{ij}) a matriz quadrada de ordem 3, em que: $m_{ij} = \begin{cases} 0, se \ i < j \\ i + j, \ se \ i = j \\ i - j, \ se \ i > j \end{cases}$. Ache o valor do determinante de M.

Resp: 48

f) Calcule o determinante da matriz P^2, em que P é a matriz $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Resp: 64

2.7 Determinante de uma matriz quadrada de ordem n>3

Seja a matriz quadrada de ordem 4 A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, vamos calcular o determinante de A. Para tanto, aplicaremos o teorema de Laplace, até chegarmos a um determinate de 3ª ordem, e depois empregaremos a regra de Sarrus. Assim, desenvolvendo o determinate acima, segundo os elementos da 1ª linha, temos:

$$det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \qquad (1)$$

$$a_{11}A_{11} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 17 = 34$$

$$a_{12}A_{12} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -3 \cdot 44 = -132$$

$$a_{13}A_{13} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot -111 = 111$$

$$a_{14}A_{14} = 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo em (1) temos: $det\,A = 34 - 132 + 111 = 13$

Resolva: Calcule o determinante a seguir, desenvolvendo-o segundo os elementos da 1ª linha.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Resp: -180

2.8 Propriedade dos Determinantes

1ª propriedade: Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada A forem iguais a zero, seu determinante será nulo, isto é, det A = 0.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 0 & 48 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0 \cdot -\frac{1}{3} - 48 \cdot 0 = 0$

2ª propriedade: Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou de duas colunas) de uma matriz quadrada A forem iguais, seu determinante será nulo, isto é, det A = 0

Exemplo: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = 0$

3ª propriedade: Se uma matriz quadrada A possui duas linhas (ou colunas) proporcionais, seu determinante será nulo, isto é , det A = 0

Exemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 21 \end{vmatrix} = 3 \cdot 21 - 7 \cdot 9 = 0$

4ª propriedade: Se todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) de uma matriz quadrada são multiplicados por um mesmo número real k, então seu determinante fica multiplicado por k.

Exemplo: $7\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot (3 \cdot 9 - (-5) \cdot 4) = 7 \cdot (27 + 20) = 7 \cdot 47 = 329$

$\begin{vmatrix} 21 & -35 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 21 \cdot 9 - (-35) \cdot 4 = 189 + 140 = 329$

5ª propriedade: Se uma matriz quadrada A de ordem n é multiplicada por um número real k, o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é: $det(kA_n) = k^n \cdot det A_n$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det A = 15 - 8 = 7$$

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow det 5A = 375 - 200 = 175 = 5^2 \cdot 7$$

6ª propriedade: O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta, isto é, det A = det A^t.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \; e \; A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$det A = a \cdot d - b \cdot c \; e \; det A^t = a \cdot d - c \cdot b$

7ª propriedade: Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada A, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz anterior.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} det A = 15 + 0 + 10 + 6 + 0 - 50 = -19$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} det A = 50 + 0 - 6 - 10 + 0 - 15 = 19$

8ª propriedade: O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \; det\,A = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$

9ª propriedade: Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB a matriz-produto, então $det\,AB = det\,A \cdot det\,B$ (teorema de Binet)

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad det\,A = -3 - 10 = -13 \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \; det\,B = -6$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0+6 & 6+8 \\ 0-3 & 10-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \; det\,AB = 36 + 42 = 78 = (-13) \cdot (-6)$$

10ª propriedade: Seja A uma matriz quadrada. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) pelo mesmo número e somarmos os resultados aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), formando uma matriz B, então det A=det B (Teorema de Jacobi).

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \quad det\,A = 9 - 20 = -11$

Multiplicando a 1ª linha por -2 e somando os resultados à 2ª linha obtemos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad det\,A = -1 - 10 = -11$

<u>Exercícios de Revisão:</u>

1. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det (A^2)

b) det (B^2)

c) det ($A^2 + B^2$) resp: a) 1 b) 4 c) 18

2. (Faap – SP) Resolva a inequação $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

Resp: $\{x \in R \mid -1 < x < 7\}$

3. Determine a solução da equação $\begin{vmatrix} x & \sqrt[3]{8} \\ -2 & -x \end{vmatrix} = 0$

   Resp: {-2,2}

4. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dê o valor de:

a) det (A). det(B)

b) det (A.B) Resp: a) -10 b) -10

5. Seja a matriz A = (a_{ij}) de ordem 3, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i < j \\ k, \text{se } i = j \text{ e } k \in R \\ -1 \text{se } i > j \end{cases}$.

   Calcule *k*, de modo que o determinante da matriz A seja nulo.

   Resp: *k* = 0

6. (UFPR) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \\ y & z & x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x+y & x+z \\ z-y & z-x \end{pmatrix}$ e

   $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Sabendo que a matriz B é igual à matriz C. Calcule o determinante da matriz A.

   Resp: 72

7. Calcule o determinante da matriz M = (AB). C, sendo $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

   $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

   Resp: zero

Teste:

1. (UEL – PR) A soma dos determinantes $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$ é igual a zero.

   a) quaisquer que sejam os valores reais de *a* e de *b*.

   b) se e somente se *a* = *b*.

   c) se e somente se *a* = - *b*.

d) se e somente se $a = 0$.

e) se e somente se $a = b = 1$.

Resp: a)

2. (FMU – SP) O determinante da matriz $\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -2\cos x & 2\operatorname{sen} x \end{pmatrix}$ é igual a:

a) sen $2x$ b) 2 c) -2 d) 2 sen$^2 x$ e) cos $2x$

Resp: b)

3. (Mack – SP) A solução da equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & 5 \\ 2/3 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) 1 b) 58 c) -58 d) $^{67}\!/_{9}$ e) 2

Resp: d)

4. (Mack – SP) Sendo A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem 2 e $a_{ij} = j - i^2$, o determinante da matriz A é:

a) 0 b) 11 c) 2 d) 3 e) 4

Resp: d)

5. (Fatec – SP) Determine x, de modo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} > 0$.

a) $x < -3$ ou $x > 2$ b) $-3 < x < 2$ c) Não existe $x \in R$ d) Para todo $x \in R$

e) N.D.A.

Resp: b)

6. (PUC – RS) A equação $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{vmatrix} = 12$ tem como conjunto verdade:

a) {-6, 2} b) {-2, 6} c) {2, 6} d) {-6, 6} e) {-2, 2}

Resp: b)

7. (PUC – SP) O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ vale:

a) -3 b) 6 c) 0 d) 1 e) -1

Resp: a)

8. (FGV – SP) Seja a a raiz da equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$; então o valor de a^2 é:

a) 16 b) 4 c) 0 d) 1 e) 64

Resp: b)

9. (PUC – RS) A solução da equação $\begin{vmatrix} 2x & 9 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-x \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2+x \end{vmatrix}$ é:

a) {-11, 5} b) {-6, 3} c) {0, 3} d) {0, 6} e) {5, 11}

Resp: {0,3}

OBS.: para os alunos a apostila é fornecida sem as resposta!!

- **Habilidade relacionada:**
- ✓ Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.
- ✓ Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.
- ✓ Resolver problemas utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial.
- ✓ Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 .

- **Pré-requisitos:**
- ✓ Operações elementares com números reais.

- **Tempo de Duração:**
- ✓ 18 horas/aulas (três semanas)

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
- ✓ Quadro branco com canetas coloridas.
- ✓ Régua, lápis de cor e caneta.
- ✓ Apostila com resumo do conteúdo para evitar cópia longa do conteúdo, inclusive com as atividades propostas nos roteiros.
- ✓ Uso dos roteiro 1 e 2 do curso de formação continuada da SEEDUC.
- ✓ Folhas de atividades.

- **Organização da turma:**
- ✓ Com a turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos)

- **Objetivos:**
- ✓ Compreender definição de matrizes e determinantes.
- ✓ Representação algébrica.
- ✓ Definição de matrizes transposta, quadrada, identidade e igualdade.
- ✓ Desenvolver as habilidades relacionadas às operações com matrizes.
- ✓ Resolver problemas.
- ✓ Matriz simétrica e inversa.
- ✓ Cálculo de determinantes.
- ✓ Definição de Laplace.
- ✓ Propriedades de determinantes.

- **Metodologia adotada:**
- ✓ Com a construção do conhecimento dos alunos com uso de exemplos.
- ✓ Apresentar definições e exemplos de matrizes e determinantes.
- ✓ Cálculo dos determinantes a após a identificação das matrizes.

3. Avaliação:
- ✓ Folha de atividades.
- ✓ Teste.
- ✓ Perguntas informais durante a aula propiciando trabalho organizado e colaborativo.

4. **Referências:**

- ✓ DANTE, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações. São Paulo: Editora Ática, 1999.

- ✓ GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R., GIOVANNI Jr, J. R. Matemática Fundamental. São Paulo: Editora FTD Ltda, 1994.

- ✓ LEITHOLD, L. Matemática Aplicada à Economia e Administração. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1988.

- ✓ MEDEIROS, Matemática Básica para Cursos Superiores. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2002.

- ✓ WEBER, J. E. Matemática para Economia e Administração. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 2ª ed. 1986.

- ✓ Roteiros de ação 1 e 2 do projeto SEEDUC, 2º ano, 3º bimestre, 2012.