FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ
Professor (a): ROBERTA COSTA RODRIGUES DA SILVA
Série: 2º ANO – ENSINO MÉDIO
Tutora: Hannibal Escobar Ramos Henriques de Carvalho

INTRODUÇÃO

A teoria de matrizes tem aplicações em diversas áreas do conhecimento Humano. Com o advento do computador, grandes quantidades de informações podem ser armazenadas e manipuladas de maneira bastante rápida com o uso de matrizes. É difícil convencer os alunos do ensino médio da importância da teoria de matrizes. Para a maioria dos alunos esta teoria não passa de um amontoado de regras difíceis de serem compreendidas e manipuladas e sem utilidade prática. Para tentar superar este obstáculo considero útil introduzir os conceitos através da metodologia de resolução de problemas.

Geralmente os alunos apresentam dificuldades referentes à interpretação de enunciados e utilização de raciocínio logico, além da falta de interesse. Por isso, é extremamente importante utilizar assuntos atraentes.

A utilização da metodologia de resolução de problemas tem por objetivo fazer com que o aluno perceba que o arranjo das informações em formato de tabelas (matrizes) torna a tarefa de resolver um problema bem mais simples e atrativo.

Para trabalhar matrizes dentro da realidade da minha turma, onde não se pode utilizar computadores para mais exemplos de aplicações de matrizes visto que a escola não tem infraestrutura, criei um plano de trabalho para seis tempos de cinquenta minutos para o desenvolvimento do conteúdo e mais quatro tempos para fixação dos conteúdos e avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Identificar, ler e interpretar uma matriz e seus elementos.
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos
- **RECURSOS UTILIZADOS:** Livro, tabelas de dados e lista de dados (pra que eles organizassem em tabelas).
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.
- **OBJETIVOS:** Apresentar os conceitos básicos sobre matrizes, ou seja, ordem de uma matriz, organização e representação de seus elementos, tipos de matrizes, etc.

METODOLOGIA ADOTADA

Inicialmente, para a sistematização dos conceitos de linhas, colunas e a notação e definição de matrizes, utilizo problemas do tipo: “Representar através de uma tabela, a altura, o peso e a idade em anos, de todos os alunos do grupo”. Divido a turma em grupos e peço que cada grupo monte a tabela com todos os elementos do grupo informando de cada um a idade, peso e altura e depois vou perguntando a cada grupo quem é o mais velho, por exemplo, e quando eles me respondem pergunto novamente em que linha e em qual coluna essa informação está na sua tabela, á partir daí entro nos conceitos sobre a formação e ordem de uma matriz.

CONCEITO

A construção de uma tabela onde são apresentados os resultados do aproveitamento escolar de 4 turmas diferentes pode ser apresentada em uma tabela, com as respectivas disciplinas e o aproveitamento de cada turma por disciplina, como no esquema a seguir:

.	Matemática	Português	História	Geografia
Turma A	8	9	8	9
Turma B	7	5	6	6
Turma C	8	7	7	7
Turma D	7	8	8	9

A identificação de uma determinada nota procurada pode ser feita da seguinte maneira: Quando quisermos saber o aproveitamento da turma C em história, por exemplo, basta nos orientarmos na linha da turma C e na coluna onde estão as notas de história, logo encontramos a nota 7.

Agora repetindo a coluna apenas considerando os números dispostos em linhas e colunas como na tabela anterior, porém colocados entre parênteses ou colchetes, veja:

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 6 \\ 8 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Em tabelas dispostas como essa, os números são chamados de elementos. As colunas são enumeradas da esquerda para a direita e as linhas de cima para baixo. Esse tipo de tabela disposta com linhas e colunas é classificado da seguinte forma mxn, onde m são as linhas e n as colunas com m e n diferentes de 0; essa tabela é chamada de **matriz.**

NOTAÇÃO

- Matrizes devem ser escritas com parênteses ou colchetes à esquerda e à direita, sendo as duas maneiras equivalentes.
- Uma matriz é indicada por uma letra maiúscula.
- Seus elementos são indicados usando a mesma letra, porém minúscula, com a linha e coluna usadas como índice (nesta ordem). Assim, o elemento da 3ª coluna na 2ª linha da matriz *A* será a_{23}.

ORDEM DE UMA MATRIZ

Ordem de uma matriz refere-se ao seu número de linhas e colunas. É apresentada na notação $m \times n$, onde m é o número de linhas e n o de colunas. Lê-se "m por n".

Assim, a matriz A acima é de ordem 4×4.

TIPOS DE MATRIZES

Há diferentes tipos de matrizes. Podemos diferenciá-las pela ordem ou por outras características.

Matriz quadrada – aquela que têm o número de linhas igual ao número de colunas. Numa matriz quadrada, os elementos aij, tais que i = j, constituem a diagonal principal. Os elementos aij tais que i+j=n+1 compõem a diagonal secundária.

Ex:

1º) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz quadrada de ordem 2.

2º) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz quadrada de ordem 3.

Matriz identidade – matriz quadrada de ordem n (nxn) em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais são nulos.

Ex:

1º) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2º) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal – matriz em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos. A matriz identidade é um exemplo de uma matriz diagonal.

Ex:

$$1^{\text{o}})\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2^{\text{o}})\ B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz linha – matriz que possui apenas uma linha.

Ex: $A = [-1, 0]$

Matriz coluna – matriz possui apenas uma coluna.

Ex: $1^{\text{o}})\ A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad 2^{\text{o}})\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Matriz transposta – Dada uma matriz M de ordem mxn, sua matriz transposta M^t é uma matriz de ordem nxm, que tem como linhas as colunas da matriz M e como colunas as linhas de M. Assim, a primeira linha da matriz M é igual a primeira coluna da matriz M^t, a segunda linha de M é igual a segunda coluna de M^t e assim por diante.

Ex:

$$1^{\text{o}})\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ então } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$2^{\text{o}})\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ então } B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriz simétrica – Uma matriz quadrada é chamada de simétrica quando é igual à sua transposta, ou seja, quando cada elemento aij de M é igual ao elemento aji de Mt.O nome simétrica refere-se à simetria dos valores da matriz em torno da diagonal principal.

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz nula – matriz na qual todos os elementos são iguais a zero.

Ex:

$$0_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo $m \times n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = B$ se, e somente se, $x = 8$, $y = -1$, $z = 5$ e $t = 3$.

Exemplos de aplicação de Matrizes no Cotidiano

(UENF) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 35,6 & 36,4 & 38,6 & 38,0 & 36,0 \\ 36,1 & 37,0 & 37,2 & 40,5 & 40,4 \\ 35,5 & 35,7 & 36,1 & 37,0 & 39,2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

R: **a_{24} Instante 2, dia 4.**

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

R: **37,3**

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar exercícios do livro didático, e listinha elaborada e com exercícios postados no fórum.

ATIVIDADE 2

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Reconhecer e utilizar operações com matrizes e a linguagem matricial na resolução de problemas.
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos
- **RECURSOS UTILIZADOS:** Livro, tabelas de dados, Lousa e Piloto.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.
- **OBJETIVOS:** Resolver situações problema que envolva matrizes e operações entre elas, particularmente a adição, subtração e multiplicação de um número real por uma matriz.

METODOLOGIA ADOTADA

Somar e subtrair matrizes são operações bastante intuitivas e, em geral, os alunos não apresentam dificuldades em seu entendimento. Para somar ou subtrair matrizes, somamos cada um dos elementos correspondentes de cada matriz. Assim, só podemos somar duas matrizes do mesmo tipo (mesma ordem), porque o número de linhas de uma deve ser igual ao número de linhas da outra, assim como o número de colunas.

Soma termo a termo

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sua soma é obtida da seguinte maneira:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 1+7 & 0+5 \\ 1+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Subtração

Para efetuarmos a subtração de duas matrizes, as matrizes subtraídas devem ter a mesma ordem (mesmo número de linhas e colunas) e a matriz obtida com a subtração (matriz diferença) também deve ter o mesmo número de linhas e colunas que as matrizes subtraídas. Cada elemento de uma matriz deve ser subtraído com o elemento correspondente da outra matriz.

Concluímos que:

Dada duas matrizes, A e B, as duas de ordem m x n. Então A – B = C de ordem m x n $\leftrightarrow a_{11} - a_{11} = c_{11}$

Veja o exemplo abaixo:

Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ e a matriz B = $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, se efetuamos a subtração dessas matrizes, temos:

Subtraindo os termos correspondentes das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -5 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Multiplicação de uma matriz por um número Real</u>

A multiplicação de uma matriz por um número real funciona da seguinte forma: considerando uma matriz qualquer C de ordem mxn e um número real qualquer p. Quando multiplicamos o número real p pela matriz C encontraremos como produto outra matriz p . C de ordem mxn e seus elementos é o produto de p por cada elemento de C.

Veja o exemplo: Dada a matriz C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e o número real p = 3. O produto p . C será:

p . C = $3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ p. C = $\begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 & -5 \cdot 3 \end{pmatrix}$ p . C = $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar exercícios do livro didático

ATIVIDADE 3

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Reconhecer e utilizar operações com matrizes e a linguagem matricial na resolução de problemas.
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos
- **RECURSOS UTILIZADOS:** Livro, tabelas de dados, Lousa e Piloto.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.
- **OBJETIVOS:** Resolver situações problema que envolva matrizes e fazer a multiplicação de matrizes de forma não só regrada, mas de maneira intuitiva seguindo o raciocínio lógico.

METODOLOGIA ADOTADA

Dentre as operações básicas a operação de multiplicação é a que parece ser a mais estranha e difícil para nossos alunos e, por isso, merece uma atenção especial. O uso de uma situação-problema pode ajudá-los a entender esse assunto.

É importante que eles percebam que enquanto para adicionar e subtrair duas matrizes precisamos ter matrizes de mesma ordem, para a multiplicação de matrizes isso funciona de outra forma. Só é possível efetuar a multiplicação de uma matriz A por uma matriz B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

NOTAÇÃO

Sendo A uma matriz do tipo mxn e B uma matriz do tipo nxp, define-se produto da matriz A pela matriz B a matriz C, do tipo mxp, tal que cada elemento de C (cij) satisfaz:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (\ldots) + a_{in}b_{nj}$$

Em outras palavras, cada elemento de C é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B e , a seguir, somando-se os produtos obtidos. Veja abaixo:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.3 + 3.2 & 2.1 + 3.4 \\ 1.3 + 0.2 & 1.1 + 0.4 \\ 4.3 + 5.2 & 4.1 + 5.4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 1 \\ 22 & 24 \end{bmatrix} \qquad A_{3\,x2} . B_{2\,x2} = AB_{3\,x2}$$

O produto entre duas matrizes A e B é definido se, e somente se, o número de colunas da matriz A for igual ao numero de linhas da matriz B. Assim:

$$A_{m\,xn} . B_{nxp} = C_{mxp}$$

Vejamos um Exemplo:

Em uma confecção são produzidos três modelos de calças: A, B e C. Sendo usado dois tipos de botões G (grande) e M (médio). O número de botões usado por modelo de calça é dado pela seguinte tabela:

	Calça A	Calça B	Calça C
Botões P	6	4	2
Botões G	4	3	2

O número de calças produzidas no mês de novembro e dezembro é fornecido na tabela á seguir:

	Novembro	Dezembro
Calça A	60	100
Calça B	80	90
Calça C	70	120

De acordo com os dados fornecidos, calcule a quantidade de botões gastos nos referidos meses.

O calculo da quantidade de botões pode ser efetuado multiplicando as duas tabelas, pois elas constituem uma multiplicação entre matrizes.

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 60 & 100 \\ 80 & 90 \\ 70 & 120 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6*60+4*80+2*70 & 6*100+4*90+2*120 \\ 4*60+3*80+2*70 & 4*100+3*90+2*120 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 360+320+140 & 600+360+240 \\ 240+240+240 & 400+270+240 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 820 & 1200 \\ 620 & 910 \end{vmatrix}$$

	Novembro	Dezembro
Botões P	820	1200
Botões G	620	910

Exemplo de Multiplicação de Matrizes

A situação é a seguinte: Durante a primeira fase da copa do mundo de futebol realizada em 2006, o grupo F era formado por 4 países: Brasil, Croácia, Austrália e Japão. Observe os resultados (números de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados na tabela abaixo:

	Vitórias	empate	derrotas
Brasil	2	1	0
Croácia	1	0	1
Austrália	1	1	1
Japão	0	2	2

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (Vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente(3 pontos,2 pontos ou 0 pontos):

	números de pontos
vitória	3
empate	2
derrota	0

Resolução:

Brasil: 3.2+2.1+0.0

Croácia:3.1+2.0+0.1

Austrália :3.1+2.1+0.1

Japão:3.0+2.2+0.2

Logo o resultado é a Matriz coluna:

Brasil	8
Croácia	3
Austrália	5
Japão	4

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar exercícios do livro didático e dos Roteiros de atividade

<u>AVALIAÇÃO</u>

Num primeiro momento antes de começar a avalia-los usarei dois tempos de 50 minutos para resolução de uma ficha de atividades contendo exercícios sobre todos os temas abordados acima, envolvendo aluno e professor, onde todas as atividades propostas serão corrigidas ainda na aula para que não haja dúvidas posteriores, uma espécie de revisão dos conteúdos onde os alunos ao desenvolverem cada atividade proposta (atividades elaboradas criteriosamente para que sua resolução seja baseada não só em regras , mas sim em construção de conhecimento e percepção de cada operação feita entre as matrizes) estarão fixando os conteúdos abordados podendo fazer uma reflexão melhor sobre cada um deles. E só então num segundo momento farei a aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio logico para resolver problemas do cotidiano envolvendo leitura, interpretação, identificação dos tipos de matrizes além de problemas envolvendo operações com matrizes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Matrizes e determinantes – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2o ano do Ensino Médio – 3o bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/

MATEMÁTICA AULA Por AULA, 2º ano/ XAVIER E BARRETO – 2º Edição – São Paulo: FTD 2005.

Endereços eletrônicos acessados:

http://www.mat.feis.unesp.br/docentes2008/jose_marcos/MatrizesDeterminantesSistLineares.pdf

http://www.somatematica.com.br/emedio/matrizes/matrizes.php

http://www.brasilescola.com/matematica/matriz.htm