

FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA
MATEMÁTICA 2º ANO -3º BIMESTRE-2012

PLANO DE TRABALHO
MATRIZES E DETERMINANTES

CURSISTA: Roseli Aparecida Sevenini Silva

TUTOR(A):Edileizer

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO ----- pág. 3

DESENVOLVIMENTO ----- pág.4

AVALIAÇÃO ----- pág. 22

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS----- pág. 21

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem como objetivo permitir que o aluno perceba, através de assuntos do cotidiano, a aplicação do conteúdo Matrizes.

O estudo da estrutura algébrica do conjunto de matrizes é secundário ante suas aplicações; no entanto, esse plano busca aplicações simples que justificam as operações com matrizes.

Saber ler a linguagem matemática usada para representar e organizar situações do dia a dia é requisito básico na resolução de vários problemas envolvendo matrizes.

No entanto, o importante é saber que a organização de dados em uma tabela, como é o caso de matrizes, favorece a leitura e, assim, quem domina esse tipo de texto tem uma ferramenta importante para representar e interpretar relações envolvendo muitas informações.

O conteúdo exige o conhecimento de alguns conceitos e operações, por isso, faz-se necessário a utilização de recursos variados e a contextualização dos problemas.

“Aprender Matemática de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.”

(PCN+, p.111)

Para a conclusão desse plano de trabalho está prevista 400 minutos para desenvolvimento e 250 minutos para atividade avaliação.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

HABILIDADE RELACIONADA : Representar e interpretar uma tabela de números como é uma matriz, identificando seus elementos e sua aplicação.

PRÉ-REQUISITOS: Dominar as operações no conjunto \mathbb{Q} e organizar dados numa tabela.

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 MINUTOS

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Vídeo sobre a alimentação e textos informativos.

OBJETIVOS :Representar e dominar a linguagem matemática, através de situações-problema que envolvam variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas, usando representações algébrica

“É possível reconhecer a utilidade de uma idéia, sem, contudo, compreender como usá-la adequadamente.”

Johann Wolfgang Goethe (1749- 1832)

METODOLOGIA:

Primeiramente apresento um texto informativo sobre a importância dos alimentos para se ter uma alimentação saudável, e exponho uma tabela sobre o consumo mensal, em quilogramas, de quatro elementos básicos durante um trimestre, por uma família, como é mostrado abaixo:

ALIMENTOS	Abril	Maio	Junho
Arroz	10	8	9
Feijão	4	5	6
Carne	5	7	10
Legumes	12	11	6

Em seguida, através de uma conversa com a turma discuto algumas informações da tabela, como por exemplo:

- Em qual mês o consumo de Arroz foi maior?

- No mês de Maio qual foi o alimento mais consumido?(*breve comentário sobre a importância dos legumes na alimentação*)
- Quantos quilogramas de carne foram consumidos nesse trimestre?(*breve comentários sobre o consumo dos variados tipos de carne*)
- Foram consumidos mais quilogramas de arroz ou de carne?
- No mês de Junho quantos quilogramas de Feijão foram consumidos?

Após a discussão, apresento os elementos da tabela usando um par de parênteses ou de colchetes:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Os elementos que estão nas linhas horizontais se referem aos alimentos, e os que estão nas linhas verticais(colunas) são os meses. Essa tabela é denominada **Matriz**.

MATRIZ é uma tabela de números formada por m linhas e n colunas. Dizemos que essa matriz tem ordem m x n (lê-se: m por n) , sendo $m \geq 1$ e $n \geq 1$.

Representação : Geralmente dispomos os elementos de uma matriz entre parênteses, entre colchetes ou duas barras verticais.

Exemplos:

Veja a representação sob a forma de matriz das três tabelas dadas anteriormente.

a) $\begin{pmatrix} 20 & 3 & 10 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 6 \\ 11 & 7 & 8 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×5 , isto é, possui 3 linhas e 5 colunas.

b) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×4 , isto é, possui 2 linhas e 4 colunas.

c) $\left\| \begin{array}{ccc} -1 & 0,5 & 1,41 \\ 3,8 & -3,24 & 5,78 \end{array} \right\|$ é uma matriz 2×3 , isto é, possui 2 linhas e 3 colunas.

Indicamos uma matriz por letra maiúscula e um elemento qualquer dela por letra minúscula acompanhada de dois índices: o **primeiro** denota a **linha** em que está o elemento e o **segundo**, a **coluna** à qual o elemento pertence.

PARA LER

Vale a pena ler o capítulo 24 do livro *O jeito matemático de pensar*. Nele, o autor analisa o uso da Matemática nos jornais e no código de trânsito.

Convencionando que as linhas sejam numeradas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita, podemos representar uma matriz A do tipo $m \times n$ desta forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Em notação abreviada, essa matriz pode ser escrita deste modo:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

ou

$$A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \text{ com } i, j \in \mathbb{N}$$

Exercícios:

1-Em uma editora a venda de livros de Matemática, Física e Química no 1º bimestre de um ano estão representadas na matriz, onde as linhas representam os livros e as colunas os meses.

$$\begin{pmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 17\,000 & 23\,000 \end{pmatrix}$$

- Quantos livros de matemática foram vendidos?
- Qual o livro mais vendido no mês de março?
- Em janeiro foram vendidos quantos livros de Química?
- Quantos livros de Física foram vendidos nos três meses?

2-Construa a matriz $A=(a_{ij})$ 2×2 , tal que $a_{ij} = 2i + j$

3-Construa a matriz $B = (b_{ij})$ 2×3 , tal que $b_{ij} = (i - j)^2$

ATIVIDADE 2

HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os tipos de matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Organizar dados numa tabela

TEMPO DE DURAÇÃO : 100 minutos

RECURSO EDUCACIONAL UTILIZADO: Livro didático.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA : Individual

OBJETIVO: Conhecer, interpretar e utilizar corretamente a linguagem matemática associando-a com a linguagem usual.

METOLOGIA ADOTADA:

Existem algumas matrizes que, por apresentarem características especiais, merecem destaque. Vejamos a seguir algumas delas.

■ Matriz quadrada

É a matriz na qual o número de linhas é igual ao de colunas. Assim, toda matriz do tipo $n \times n$ é denominada **matriz quadrada de ordem n** , **matriz quadrada $n \times n$** ou, simplesmente, **matriz $n \times n$** .

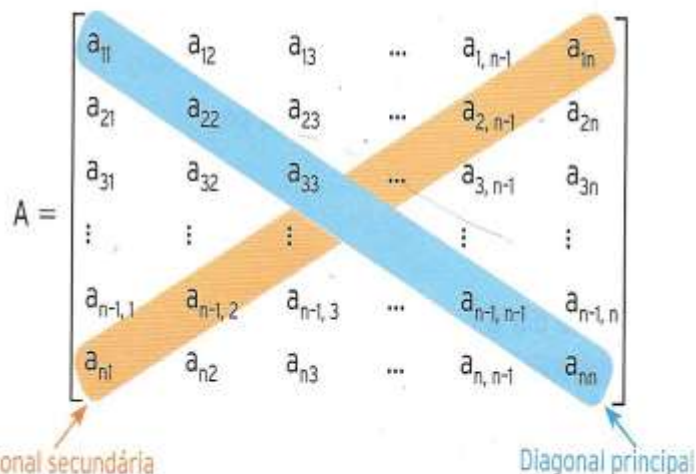
Exemplos:

a) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de **ordem 2**.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de **ordem 3**.

Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n destacamos os elementos:

- ▶ a_{ij} tais que $i = j$, que constituem a **diagonal principal** de A ;
- ▶ a_{ij} tais que $i + j = n + 1$, que constituem a **diagonal secundária** de A .



Matriz linha e matriz coluna

São matrizes que possuem apenas uma linha ou uma coluna. Assim:

- toda matriz de tipo $1 \times n$ é denominada **matriz linha**;
- toda matriz de tipo $m \times 1$ é denominada **matriz coluna**.

Exemplos:

a) $[2 \ 4 \ 5 \ 6]$ é uma matriz linha 1×4 .

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1 .

Matriz transposta

É aquela que obtemos trocando, ordenadamente, as linhas pelas colunas de uma matriz A do tipo $m \times n$. A nova matriz, do tipo $n \times m$, é denominada **matriz transposta** de A e é indicada por A^t .

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Igualdade e desigualdade de matrizes

Duas matrizes A e B , de mesmo tipo, são iguais se os elementos de mesma posição são iguais.

Indicamos: $A = B$.

A negação de $A = B$ é representada por $A \neq B$, que significa que A e B são de tipos diferentes ou que A e B são de mesmo tipo, mas pelo menos um elemento de A difere do elemento de mesma posição de B .

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

ER1. Determine x e y de modo que se tenha $A = B$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3 & y+2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} x+y & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & y+1 \end{bmatrix}$

Resolução

a) Da definição de igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = b_{11} \Leftrightarrow 2 = 2 \\ a_{12} = b_{12} \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2 \\ a_{21} = b_{21} \Leftrightarrow 3 = 3 \\ a_{22} = b_{22} \Leftrightarrow y+2 = 1 \Leftrightarrow y = -1 \end{cases}$$

Portanto, $x = 2$ e $y = -1$.

b) Impossível, pois $a_{21} \neq b_{21}$.

ER2. Obtenha a matriz transposta de $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, sendo $a_{ij} = 2i - j$.

Resolução

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, com:

$$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1; a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0; a_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1;$$

$$a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 = 3; a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2; a_{23} = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

$$\text{Então, } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Portanto, } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ATIVIDADE 3

HABILIDADE RELACIONADA :Representar e interpretar uma tabela de números como matriz e identificar os vários tipos de matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Operações no conjunto Q e organizar dados numa tabela.

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos

RECURSO UTILIZADO : Folha de atividades

ORGANIZAÇÃO DA TURMA : Grupo de 3 alunos

OBJETIVO : Representar e dominar a linguagem matemática, através de situações-problema que envolvam variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas, usando representações algébrica

Conhecer, interpretar e utilizar corretamente a linguagem matemática associando-a com a linguagem usual.

METODOLOGIA:Exercícios de fixação em grupo

1-Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

- a) Classifique A segundo o seu tipo.
- b) Determine os elementos a_{13} , a_{21} e a_{32} .
- c) Obtenha a matriz transposta de A

2-Uma indústria de táxi vai fabricar tecidos com fios diferentes. Na matriz a seguir, a_{ij} representa rolos de fio j serão empregados para fabricar uma peça de tecido tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Quantos rolos de fio 3 serão empregados para produzir o tecido tipo 2?
- b) Quantos rolos de fio 1 serão empregados para fabricar 5 peças do tecido tipo 1;4 peças do tipo 2;e 2 peças do tipo 3?
- c) Elabore outra pergunta para este problema.
- d) 3-Dados $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, $a_{ij} = 3i - j$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x + y \end{bmatrix}$ determine x e y sabendo que $A=B$.

ATIVIDADE 4

HABILIDADE RELACIONADA: H33- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Dominar as operações no conjunto Q e resolver equações.

TEMPO DE DURAÇÃO : 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS ADOTADOS: Textos informativos

OBJETIVOS: Resolver situações-problema que envolvam matrizes e as operações entre elas, particularmente adição, subtração e multiplicação de um número natural por uma matriz.

METODOLOGIA: Adição e Subtração de matrizes

Consideremos a produção de carros de modelos I e II, nas cores azul, verde e branco, de uma indústria automobilística nos meses de janeiro e fevereiro de um mesmo ano.

PRODUÇÃO DE JANEIRO		
Modelo \ Cor	I	II
Azul	200	190
Verde	180	150
Branco	120	100

PRODUÇÃO DE FEVEREIRO		
Modelo \ Cor	I	II
Azul	220	205
Verde	210	170
Branco	130	110

Adicionando os elementos de mesma posição das duas tabelas, obtemos a produção do bimestre janeiro-fevereiro.

Vamos representar as tabelas anteriores por meio de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 200 & 190 \\ 180 & 150 \\ 120 & 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 220 & 205 \\ 210 & 170 \\ 130 & 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 + 220 & 190 + 205 \\ 180 + 210 & 150 + 170 \\ 120 + 130 & 100 + 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 420 & 395 \\ 390 & 320 \\ 250 & 210 \end{bmatrix}$$

PRODUÇÃO DE JANEIRO-FEVEREIRO		
Modelo \ Cor	I	II
Azul	420	395
Verde	390	320
Branco	250	210

A soma das matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesmo tipo $m \times n$, é a matriz (c_{ij}) do tipo $m \times n$, onde:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Simbolicamente: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Subtraindo os elementos de mesma posição das duas tabelas, podemos observar qual foi o aumentada produção no bimestre janeiro-fevereiro.

Vamos representar as tabelas anteriores por meio de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 220 & 205 \\ 210 & 170 \\ 130 & 110 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200 & 190 \\ 180 & 150 \\ 120 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 - 200 & 205 - 190 \\ 210 - 180 & 170 - 150 \\ 130 - 120 & 110 - 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 30 & 20 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

A diferença entre duas matrizes A e B de mesma ordem, é a matriz obtida pela adição da matriz A com a oposta da matriz B, ou seja:

$$A - B = A + (-B)$$

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL PO MATRIZ

Na tabela 1, temos os preços de três produtos em estoque de uma empresa e que, na próxima liquidação, serão oferecidos com desconto de 20%.

TABELA 1		
Produto	Modelo simples (R\$)	Modelo superior (R\$)
A	45,00	52,00
B	62,00	70,00
C	84,00	94,00

A tabela 2 mostra os valores dos preços dos mesmos produtos com o desconto.

TABELA 2		
Produto	Modelo simples (R\$)	Modelo superior (R\$)
A	36,00	41,60
B	49,60	56,00
C	67,20	75,20

Se representarmos os dados dessas tabelas por meio de matrizes, teremos:

$$0,8 \cdot \begin{bmatrix} 45,00 & 52,00 \\ 62,00 & 70,00 \\ 84,00 & 94,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \cdot 45,00 & 0,8 \cdot 52,00 \\ 0,8 \cdot 62,00 & 0,8 \cdot 70,00 \\ 0,8 \cdot 84,00 & 0,8 \cdot 94,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36,00 & 41,60 \\ 49,60 & 56,00 \\ 67,20 & 75,20 \end{bmatrix}$$

O produto de um número real r por uma matriz A (notação: $r \cdot A$) é a matriz, do mesmo tipo de A , obtida pela multiplicação dos elementos de A por r .

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow r \cdot A = (r \cdot a_{ij})$$

ATIVIDADE 5

HABILIDADE : H 33- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes

PRÉ-REQUISITOS: Dominar as operações no conjunto Q e resolver equações

TEMPO DE DURAÇÃO ; 50 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS ADOTADOS: Folha de exercícios de fixação

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: grupo

OBJETIVOS:: Resolver situações-problema que envolvam matrizes e as operações entre elas, particularmente adição, subtração e multiplicação de um número natural por uma matriz.

METODOLOGIA: Exercícios de fixação em grupo

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A + B + C$ d) $2 \cdot (A - B) - 3 \cdot (B + C)$
b) $A - B - C$ e) $2A - 3B^t - C^t$
c) $2B - \frac{1}{2} \cdot A + 3C$

II. (FALM-PR) Determine os valores de x e y para os quais:

$$\begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y & 3 \\ x & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

III. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $X + A - B = 0$.

ATIVIDADE 6

HABILIDADE: H33 Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes

PRÉ-REQUISITOS: Dominar as operações no conjunto \mathbb{Q} e resolver equações

DURAÇÃO : 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS ADOTADOS: Texto informativo e livro didático.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVO: Resolver situações-problema que envolvam matrizes e as operações entre elas, particularmente a multiplicação de matriz por matriz.

METODOLOGIA: Multiplicação de matriz por matriz

As tabelas ao lado fornecem os pesos das notas do 1º, 2º, 3º e 4º bimestres dos colégios I e II e as notas de Matemática dos alunos Ana, do colégio I, Pedro e Bia, do colégio II.

Para comparar a soma de pontos que cada um desses alunos teve no seu colégio com a que teria no outro, fizemos estes cálculos:

$$\begin{array}{l} \text{Colégio I} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ana teve } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 49 \text{ pontos} \\ \text{Pedro teria } 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 53 \text{ pontos} \\ \text{Bia teria } 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 6 = 58 \text{ pontos} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Colégio II} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ana teria } 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 47 \text{ pontos} \\ \text{Pedro teve } 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 61 \text{ pontos} \\ \text{Bia teve } 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 = 50 \text{ pontos} \end{array} \right. \end{array}$$

Bimestres \ Colégios	1º	2º	3º	4º
I	2	2	3	3
II	2	3	2	3

Bimestres \ Alunos	Ana	Pedro	Bia
1º	1	5	3
2º	4	8	2
3º	6	0	10
4º	7	9	6

Organizando esses valores em uma tabela, temos:

Colégios \ Alunos	Ana	Pedro	Bia
I	49	53	58
II	47	61	50

Podemos representar os pesos e as notas dos alunos nos 4 bimestres por duas matrizes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{matriz dos pesos} \\ \text{dos bimestres nos} \\ \text{colégios I e II} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 10 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{matriz das notas} \\ \text{bimestrais de} \\ \text{Matemática dos três} \\ \text{alunos} \end{matrix}$$

Podemos também representar a soma dos pontos dos alunos nos 4 bimestres, seja no colégio onde estudam, seja no outro, usando matrizes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 10 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 9 & 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 9 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 49 & 53 & 58 \\ 47 & 61 & 50 \end{bmatrix}$$

Para facilitar a descrição, diremos que o 1º, o 2º, o 3º e o 4º elementos de uma **linha** da 1ª **matriz** são, respectivamente, correspondentes ao 1º, ao 2º, ao 3º e ao 4º elementos de uma **coluna** da 2ª **matriz**. Note que:

- ▶ multiplicamos os elementos de cada linha da 1ª matriz pelos elementos correspondentes de cada coluna da 2ª matriz e somamos os produtos;
- ▶ a soma dos produtos da multiplicação dos elementos, por exemplo, da linha 2 da 1ª matriz pelos elementos correspondentes, por exemplo, da coluna 1 da 2ª matriz foi colocada na posição (2, 1) da matriz-resultado;
- ▶ a 1ª matriz é do tipo 2×4 , a 2ª é do tipo 4×3 e a matriz-resultado é do tipo 2×3 .

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ e $B = [b_{jk}]$ do tipo $n \times p$.
O produto de A por B (notação: $A \cdot B$ ou AB) é a matriz $C = [c_{ik}]$ do tipo $m \times p$, onde cada c_{ik} é a soma dos produtos da multiplicação dos elementos da linha i de A pelos correspondentes elementos da coluna k de B .

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Podemos observar que:

- 1) existe o produto AB somente quando o **número de colunas** de A é igual ao **número de linhas** de B .
- 2) o **número de linhas** da matriz-produto C é igual ao **número de linhas** de A , e o **número de colunas** de C é igual ao **número de colunas** de B .

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{array}$$

Exemplos:

3) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 10 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, então:

- ▶ existe AB , pois o número de colunas de A (do tipo 3×2) é igual ao número de linhas de B (do tipo 2×3). Assim, AB é do tipo 3×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 10 & 2 \cdot 8 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 & 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 21 & -2 \\ 61 & 44 & -8 \\ 95 & 70 & -12 \end{bmatrix}$$

- ▶ existe BA , pois o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A , e BA é do tipo 2×2 .

$$BA = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \\ 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 & 10 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 39 \\ 25 & 18 \end{bmatrix}$$

4) Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, então:

- ▶ existe AB , pois o número de colunas de A (do tipo 2×2) é igual ao número de linhas de B (do tipo 2×3). Assim, AB é do tipo 2×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 6 + 4 \cdot 7 & 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 25 & -1 \\ 12 & 28 & 20 \end{bmatrix}$$

- ▶ não existe BA , pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A .

- ▶ multiplicamos os elementos de cada linha da 1ª matriz pelos elementos correspondentes de cada coluna da 2ª matriz e somamos os produtos;
- ▶ a soma dos produtos da multiplicação dos elementos, por exemplo, da linha 2 da 1ª matriz pelos elementos correspondentes, por exemplo, da coluna 1 da 2ª matriz foi colocada na posição (2, 1) da matriz-resultado;
- ▶ a 1ª matriz é do tipo 2×4 , a 2ª é do tipo 4×3 e a matriz-resultado é do tipo 2×3 .

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e $B = (b_{jk})$ do tipo $n \times p$.
O produto de A por B (notação: $A \cdot B$ ou AB) é a matriz $C = (c_{ik})$ do tipo $m \times p$, onde cada c_{ik} é a soma dos produtos da multiplicação dos elementos da linha i de A pelos correspondentes elementos da coluna k de B .

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Podemos observar que:

- 1) existe o produto AB somente quando o **número de colunas** de A é igual ao **número de linhas** de B .
- 2) o **número de linhas** da matriz-produto C é igual ao **número de linhas** de A , e o **número de colunas** de C é igual ao **número de colunas** de B .

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{array}$$

Exemplos:

3) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 10 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, então:

- ▶ existe AB , pois o número de colunas de A (do tipo 3×2) é igual ao número de linhas de B (do tipo 2×3). Assim, AB é do tipo 3×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 10 & 2 \cdot 8 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 & 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 21 & -2 \\ 61 & 44 & -8 \\ 95 & 70 & -12 \end{bmatrix}$$

- ▶ existe BA , pois o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A , e BA é do tipo 2×2 .

$$BA = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \\ 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 & 10 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 39 \\ 25 & 18 \end{bmatrix}$$

4) Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, então:

- ▶ existe AB , pois o número de colunas de A (do tipo 2×2) é igual ao número de linhas de B (do tipo 2×3). Assim, AB é do tipo 2×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 6 + 4 \cdot 7 & 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 25 & -1 \\ 12 & 28 & 20 \end{bmatrix}$$

- ▶ não existe BA , pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A .

ATIVIDADE 7


HABILIDADE RELACIONADA : Efetuar cálculos com matrizes

PRÉ-REQUISITOS: Conhecimento básico de informática

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 MINUTOS

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: planilhas eletrônica

OBJETIVOS : Realizar operações com matrizes usando Excel

 **NO COMPUTADOR**

Multiplicação de matrizes na planilha eletrônica

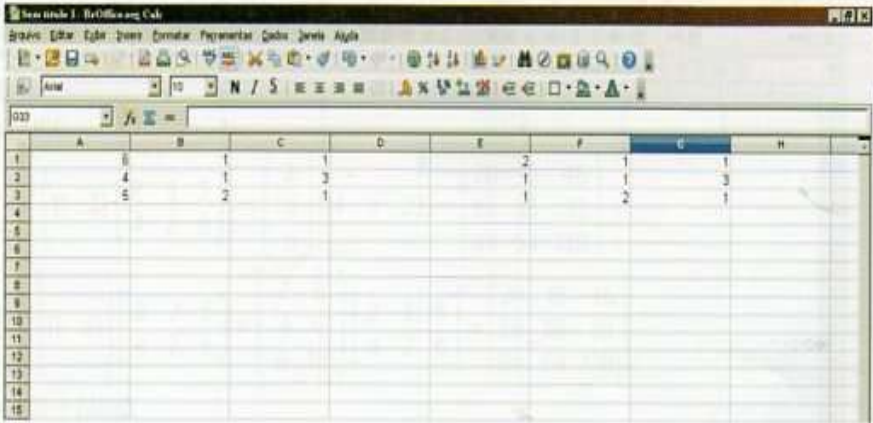
Usando planilhas eletrônicas, como a do BrOffice, por exemplo, podemos realizar operações com matrizes, entre elas a multiplicação.

1ª proposta:

Suponha que você deseje multiplicar as matrizes $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

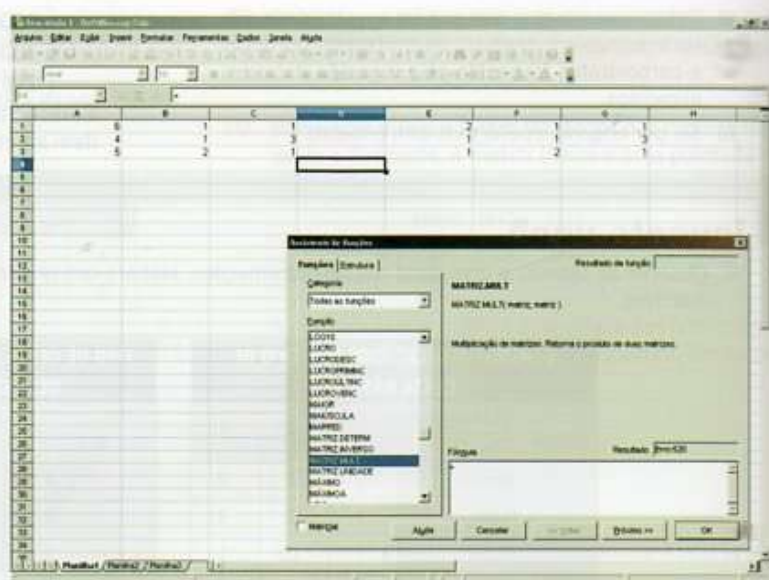
A planilha eletrônica possui uma função que calcula diretamente a multiplicação de matrizes. Vamos aprender como, seguindo estas orientações.

a) Na planilha, represente as matrizes que você deseja multiplicar. Deixe um espaço de algumas colunas entre elas.



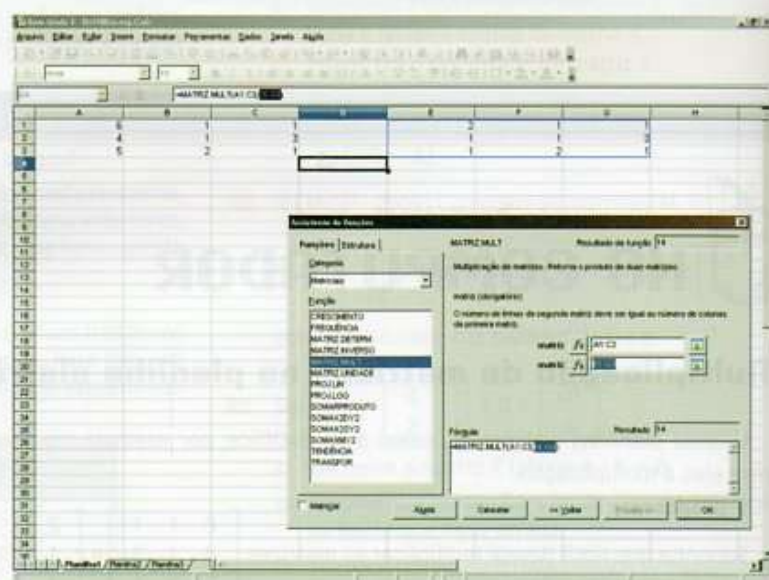
Reprodução

- b) Com o cursor, escolha uma célula vazia e, na barra superior, pressione "fx" ou "Inserir" e "Função" para selecionar a função multiplicação de matrizes. Aparecerá uma tela como esta, que pode ser deslocada para qualquer parte da tela do monitor, segurando-a pela sua barra superior azul.

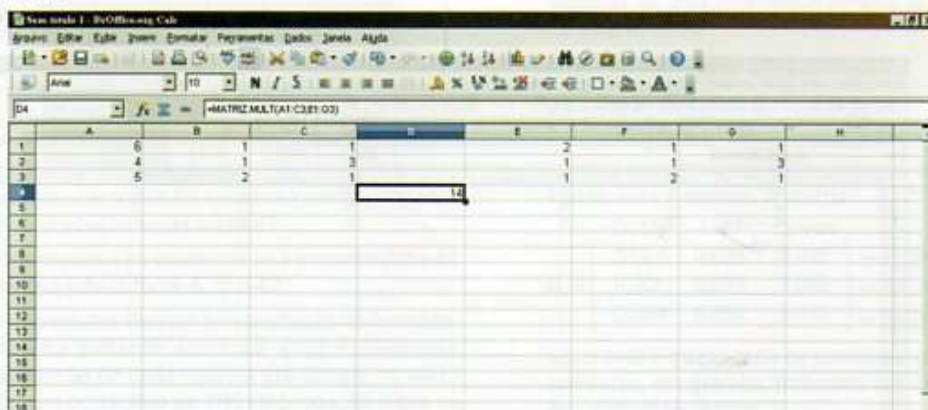


- c) Nessa tela, clique em "Funções" e role a barra até aparecer MATRIZ.MULT. Escolha essa função e clique em "Próximo".

- d) Aparecerá uma nova tela, pedindo que você especifique as células em que se encontra a matriz. Do nosso exemplo, você pode digitar A1:C3 para matriz 1 e E1:G3 para matriz 2. Observe que do lado inferior esquerdo da janela, a opção Matricial não está clicada. Mantenha desse modo.



- e) Agora, basta pressionar "OK" e o valor do produto aparecerá na célula vazia; no caso do nosso exemplo, seu valor é 14.



2ª Proposta:

- a) Explique a informação que aparece na tela quando você seleciona a função “Multiplicar Matrizes”: “ Multiplicação de matrizes. Retorna o produto de duas matrizes. O número de linhas da segunda matriz deve ser igual ao número de colunas da primeira matriz.”
- b) Escolha duas matrizes que estejam em atividade que você resolveu e multiplique-as usando a planilha eletrônica.
- c) Crie duas matrizes e efetue a multiplicação entre elas usando a planilha eletrônica.
- d) Analise em quais situações é útil usar a planilha eletrônica para multiplicar as matrizes e em quais esse recurso não é necessário.

ATIVIDADE 8

HABILIDADE:H33 Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes

PRÉ-REQUISITOS: Dominar as operações no conjunto Q e resolver equações

DURAÇÃO : 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS ADOTADOS: Texto informativo e livro didático.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: grupo

OBJETIVO: Resolver situações-problema que envolvam matrizes e as operações entre elas, particularmente a multiplicação de matriz por matriz.

METODOLOGIA:Exercícios de fixação(H33)

1-Cilene está com algumas dúvidas em relação à multiplicação de duas matrizes (A e B).

- a) Pode existir o produto de AB, por exemplo, e não existir o produto BA?
- b) As matrizes produtos AB e BA podem ser de tipos diferentes?
- c) Podemos ter $AB = BA$ e $AB \neq BA$?

2-Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, efetue:

- a) A. B. C
- b) $(A + B) \cdot C$
- c) $[(A - B) \cdot C]t$

16. Uma montadora de carretas de São Bernardo do Campo, cidade do estado de São Paulo, precisa de eixos e rodas para os três modelos que produz. A tabela I mostra a quantidade de eixos e rodas usados em cada um dos modelos.

Tabela I

Componente \ Modelo	A	B	C
Eixos	3	4	4
Rodas	4	6	8

A tabela II mostra uma previsão de quantas carretas a fábrica deverá produzir em julho e agosto.

Tabela II

Modelo \ Mês	Julho	Agosto
A	15	25
B	30	20
C	18	15

- Quantos eixos e quantas rodas serão necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção desejada?
- Se a produção a cada mês, de agosto a dezembro, for igual à de agosto, quantas rodas a montadora utilizará no segundo semestre inteiro?
- Que modificações devem ser feitas neste problema, a fim de se obter as respostas dos itens anteriores, caso a empresa deseje fabricar uma nova carreta com 5 eixos e 10 rodas?

17. Uma indústria de calçados deseja introduzir três novos modelos de sapato em sua produção. Para isso, vai utilizar dois tipos de acessórios, conforme especificado na tabela.

Acessório \ Modelo	A	B	C
X	3	5	2
Y	8	10	5

A produção estimada para os três tipos de calçados durante os meses de teste de aceitação dos novos modelos no mercado está indicada nesta outra tabela.

Modelo \ Mês	1	2	3
A	1 000	1 200	2 000
B	1 200	1 500	2 000
C	2 000	2 000	2 500

- Quantos acessórios X e quantos Y serão utilizados nessa produção experimental?
- O que mudaria no problema se a primeira linha da primeira tabela fosse 6, 10 e 4?
- Se os produtos tiverem boa aceitação no mercado, a fábrica pretende aumentar progressivamente a produção de cada modelo até atingir, no sexto mês, um acréscimo de 10% na produção sobre os

números do terceiro mês de experiência. Se isso ocorrer, quantos acessórios do tipo X serão utilizados no sexto mês?

18. Milho, soja e feijão foram plantados nas regiões Nordeste e Sudoeste. A matriz indica a área plantada de cada grão, em milhares de hectares, por região.

$$\begin{matrix} & \text{Milho} & \text{Feijão} & \text{Soja} \\ \text{Sudoeste} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 50 & 20 & 20 \end{bmatrix} \\ \text{Nordeste} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 40 & 10 & 30 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A matriz a seguir indica a quantidade dos fertilizantes X, Y e Z usada no plantio de cada cultura, em kg por hectare.

$$\begin{matrix} & \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \\ \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 15 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{bmatrix} \Leftarrow & \begin{matrix} \text{Milho} \\ \text{Feijão} \\ \text{Soja} \end{matrix} \end{matrix}$$

- Calcule a matriz A produto da primeira pela segunda matriz.
- Interprete o significado do elemento a_{23} da segunda linha e terceira coluna da matriz A.
- Interprete o significado da matriz A.

19. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz $A^2 - 5A$.

20. (EEM-SP - 2009) Considere as matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que $M_2 M_1 - M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$,

determine o valor dos parâmetros p e q.

21. Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix}$.

- Encontre a matriz X tal que $A \cdot X = B$.
- Retome sua resolução e mude alguma coisa nel de modo que fique errada.
- Troque a resolução errada com um colega para que vocês descubram e corrijam o erro um do outro.

22. Uma nutricionista recomendou a alguns pacientes ingestão de uma quantidade mínima de frutas, leite e cereais. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Frutas} \\ \text{Leite} \\ \text{Cereais} \end{matrix}$$

fornece a quantidade diária mínima, em gramas, de frutas, leite e cereais. A matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0,006 & 0,033 & 0,108 \\ 0,001 & 0,035 & 0,018 \\ 0,084 & 0,052 & 0,631 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Proteínas} \\ \text{Gorduras} \\ \text{Carboidratos} \end{matrix}$$

apresenta a quantidade de proteínas, gorduras e carboidratos, em gramas, fornecida por grama ingerida dos alimentos citados.

Determine a matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos.

AVALIAÇÃO

A avaliação serve para aconselhar, informar e indicar mudanças, funcionando em uma lógica cooperativa que faz do diálogo uma prática e da reflexão, uma constante. Para professores e alunos, a avaliação pode fornecer uma visão cada vez mais detalhada sobre o processo ensinar e aprender, devendo ser considerada elemento articulador do processo de ensino-aprendizagem, pelo acompanhamento que faz das ações pedagógicas e de seus resultados juntos aos alunos.

Dessa forma, a avaliação de Matemática, para o professor, é a possibilidade constante de reflexão sobre o projeto pedagógico, suas metas, suas possibilidades e localização de cada aluno em relação às metas estabelecidas. Já para o aluno, a avaliação tem a função de torná-lo ator e autor de sua aprendizagem. Assim, avaliar é uma ação regulada e refletida que usa as informações coletadas por meio de diversos instrumentos, em função do valor atribuído à aprendizagem

As atividades de grupo proposta nas atividades 3 , 5 e 7 são meios para pesquisar as competência e habilidades adquiridas pelos alunos e a sua integração no grupo, por isso, devem ser pontuadas. Em um momento oportuno, aplicar uma atividade avaliativa individual (50 minutos)

É apropriado verificar as questões do SAERJINHO relacionadas com o tema Matrizes, assim poderá ser avaliado não apenas o assunto que norteou este plano de trabalho, mas também os conteúdos estudados no bimestre.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – MATRIZES E DETERMINANTES – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012 –
<http://projetoceeduc.cecierj.edu.br/>

Barreto Filho, Benigno; Matemática aula por aula: volume único; ensino médio/ Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier Barreto- São Paulo: FTD, 2000;

Smole, Kátia Cristina Stocco; Matemática: ensino médio, volume 2/Kátia Cristina Stocco, Maria Ignez de Souza Diniz- 7. Edição- São Paulo: Saraiva, 2010.

Dante, Luiz Roberto; Matemática contexto e aplicações: 2º ano ensino médio-São Paulo: Ática, 2008.