

FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 3º Bimestre/2012

PLANO DE TRABALHO

PIRÂMIDES E CONES

Tarefa 2

Cursista: Cintia de Oliveira Santos

Tutor: Flávia Cristina e Silva Henriques

SUMÁRIO

Introdução 03

Desenvolvimento 04

Avaliação 17

Fontes de pesquisa 18

Anexos 19

INTRODUÇÃO

Esse plano de trabalho foi desenvolvido no intuito de sair um pouco da rotina que muitos alunos e professores enfrentam em sua vida escolar. É uma ideia para que o ensino da geometria não esteja voltado apenas para aplicação de fórmulas e decorebas, mas sim uma oportunidade para que os alunos possam aprender e se interessar pela geometria, através da utilização de materiais concretos construídos por eles mesmos.

As atividades aqui propostas permitirão que os alunos percebam a aplicabilidade do conteúdo denominado **"Pirâmides e Cones"**, presente no currículo mínimo para as turmas do 2º ano do Ensino Médio. Os alunos serão levados a construir o conhecimento sobre o tema a partir de atividades diferenciadas e exercícios práticos. Permitindo que os alunos percam o medo da geometria, uma área tão pouco valorizada ao longo da sua vida acadêmica.

O grande desafio de se ensinar geometria é o fato de que muitos alunos não possuem os conhecimentos básicos dessa disciplina. Em geral, os professores optam por deixar a geometria para o 4º bimestre e com a correria do final de ano acaba não dando tempo de ensinar os conteúdos. E com isso, quando os alunos chegam ao ensino médio, eles estão extremamente atrasados com o conteúdo. E fica difícil recuperar o tempo perdido.

Como ensinar geometria espacial se muitos alunos não sabem nem a geometria básica? As atividades propostas nesse trabalho levarão os alunos não apenas a resolverem questões sobre área total, área lateral e volume de pirâmides, mas também irão fazer com que eles "relembrem" conceitos como: área de figuras planas, teorema de Pitágoras, entre outros tópicos da geometria básica.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1:

- **Habilidades relacionadas:**
 - H4 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros ou esferas por meio de suas características.
 - H7 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.
 - H8 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
- **Pré-requisitos:** Figuras geométricas planas.
- **Tempo de duração:** 100 minutos
- **Recursos educacionais utilizados:** Folhas de atividades, planificações de diversas pirâmides, cartolina, cola, tesoura, lápis de cor, régua.
- **Organização da turma:** Turma dispostas em duplas, propiciando uma maior troca de conhecimento entre os alunos.
- **Objetivos:** O aluno deverá ser capaz de reconhecer um sólido geométrico a partir de sua planificação. Além disso, deverá ser capaz de relacionar o número de vértices, faces e arestas de uma pirâmide qualquer. E deve identificar as características deste sólido geométrico.
- **Metodologia adotada:**

Professor, antes de começar, entregue aos seus alunos a planificação da pirâmide de base quadrangular (Anexo II).

a) Você recebeu do seu professor uma planificação de um sólido geométrico. Quais são os polígonos presentes nesta planificação?

R: _____

b) O que você pode dizer sobre os triângulos? Eles são congruentes? São isósceles, equiláteros ou escalenos?

R: _____

Neste momento verifique se os alunos sabem o que significa “triângulos congruentes”. Caso contrário faça uma breve explicação.

c) Com o auxílio de uma régua, meça a base e a altura de um dos triângulos. E, além disso, verifique quanto mede o lado do quadrado.

R: _____

d) Pinte a sua planificação da maneira que você desejar.

e) Recorte nas linhas pontilhadas e monte-a. Você já viu essa forma em algum lugar? Onde?

R: _____

f) Qual é o nome desse sólido geométrico?

R: _____

A **Pirâmide** é um poliedro em que uma das faces é um polígono qualquer, a qual chamamos de base. As outras faces são triângulos congruentes que possuem um vértice em comum, denominamos de vértice da pirâmide.

Professor, neste momento, entregue aos seus alunos a planificação da pirâmide de base triangular (Anexo I).

g) Você recebeu uma nova planificação. Realize todos os procedimentos tal como você fez para a planificação anterior.

R: _____

Chame a atenção do aluno para o fato de que o nome das pirâmides varia de acordo com o polígono em sua base. Assim, se a base é um triângulo, chamamos de pirâmide triangular (ou tetraedro), se a base é um quadrado, dizemos que é uma pirâmide quadrangular, e assim por diante.

h) Qual é a relação entre a quantidade de lados do polígono da base e a quantidade de faces da pirâmide?

R: _____

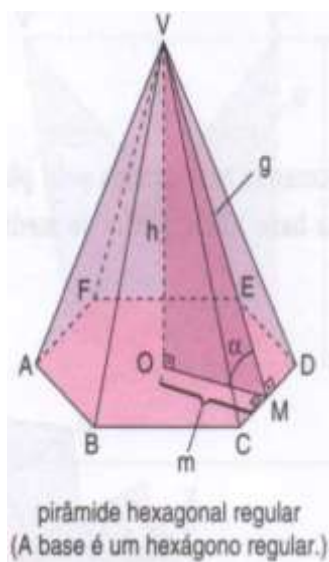
i) Qual é a relação entre o número de arestas e o número de lados do polígono da base?

R: _____

Observando as planificações que você tem em mãos, você deve ter percebido que a quantidade de faces de uma pirâmide é igual ao número de lados do polígono da base + 1 (base). E que o número de arestas de uma pirâmide é o dobro da quantidade de lados do polígono da base. Assim, se um polígono possui n lados, representamos por F o número de faces e A o número de arestas, temos:

$$F = n + 1$$

$$A = 2 \cdot n$$



Na pirâmide VABCDEF, temos que:

- O ponto V é o vértice da pirâmide, e é o ponto mais distante da base.
- O polígono ABCDEF é a base da pirâmide.
- Os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} , \overline{FA} são as arestas da base.
- Os segmentos \overline{VA} , \overline{VB} , \overline{VC} , \overline{VD} , \overline{VE} , \overline{VF} são as arestas laterais.
- Os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEF e VFA são as faces laterais.
- A distância de V ao ponto O é a altura da pirâmide, na figura está indicada pela letra h .
- A distância do ponto O ao ponto M é o apótema da base, na figura está indicado pela letra m .
- A distância de V ao ponto M é a altura da face (ou apótema), na

figura está indicada pela letra g .

Note que, o triângulo VOM é retângulo, ou seja, possui um ângulo reto (ângulo de 90°). Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

Neste momento, faça uma breve revisão sobre teorema de Pitágoras. E, se achar necessário, faça uma lista de exercícios sobre o assunto para que os alunos possam fixar o conceito estudado.

Em seguida, peça aos alunos para completarem a tabela abaixo. Verifique se apenas com as pirâmides montadas anteriormente eles conseguem completar toda a tabela. Caso contrário, forneça a eles as planificações das pirâmides pentagonais e hexagonais. Verifique se depois de montadas eles tiveram êxito no item abaixo.

j) Complete a tabela com base nas pirâmides que você montou e nas conclusões que você chegou ao analisá-las.

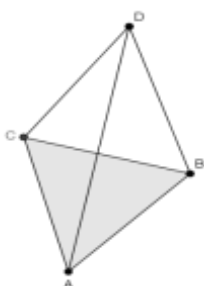
Pirâmide	Número de lados do polígono da base	Número de faces	Número de arestas	Número de vértices
Triangular				
Quadrangular				
Pentagonal				
Hexagonal				

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar os exercícios do livro didático para a fixação dos conceitos envolvendo identificação de pirâmides e de suas características.

Atividade 2:

- **Habilidades relacionadas:**
 - H24 – Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
- **Pré-requisitos:** Figuras geométricas planas e cálculo de suas respectivas áreas. Teorema de Pitágoras. Pirâmides triangulares e quadrangulares construídas na atividade anterior.
- **Tempo de duração:** 100 minutos
- **Recursos educacionais utilizados:** Pirâmides triangulares e quadrangulares construídas na atividade anterior, folhas de atividades, livro didático.
- **Organização da turma:** Turma disposta em dupla para um melhor aproveitamento das atividades.
- **Objetivos:** Desenvolver as habilidades de cálculo de área de pirâmides triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais.
- **Metodologia adotada:**

Neste momento, faça uma breve revisão sobre o cálculo de área de figuras planas. Nas atividades a seguir, iremos calcular as áreas de triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos. Se considerar necessário, prepare uma lista de exercícios sobre o tema para os seus alunos.



a) Considere a pirâmide triangular, tal como a da figura, que você construiu na atividade anterior. Quantos triângulos a compõe?

R: _____

Você já sabe que para calcular a área de um triângulo qualquer utilizamos a fórmula:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

b) Na atividade anterior você mediu a base e a altura dos triângulos das faces laterais. Você viu que eles são congruentes. Calcule a área de um desses triângulos.

R: _____

c) Qual é a área total das faces laterais dessa pirâmide?

R: _____

Observe que a pirâmide triangular possui três triângulos que formam suas faces laterais. Portanto, para calcular a área total dessas faces, você deve multiplicar o valor de uma dessas áreas por 3.

d) Agora que você calculou a área lateral, calcule a área da base. Note que, a base é formada por um triângulo equilátero.

R: _____

Caso não tenha colocado a fórmula para o cálculo da área de um triângulo equilátero nas atividades de revisão, este é um bom momento para fazê-lo.

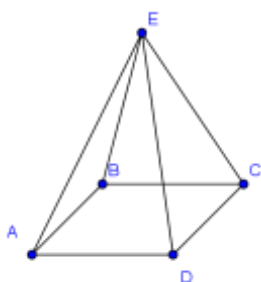
$$A = \frac{(\text{lado})^2 \times \sqrt{3}}{4}$$

Ou seja, para calcularmos a área de um triângulo equilátero não precisamos saber o valor de sua altura.

e) Qual é a área total dessa pirâmide triangular?

R: _____

Verifique se o aluno percebeu que a área total da pirâmide triangular é a soma da área lateral com a área da base.



f) Considere a pirâmide quadrangular, tal como a da figura, que você construiu na atividade 1. Quantos triângulos a compõe?

R: _____

g) Calcule a área de um desses triângulos.

R: _____

Você já sabe que para calcular a área de um quadrado devemos utilizar a fórmula:

$$A = \text{lado} \times \text{lado}$$

$$A = (\text{lado})^2$$

h) Você já sabe que o polígono da base é um quadrado. Calcule a sua área.

R: _____

i) Qual é a área total dessa pirâmide de base quadrangular?

R: _____

j) O que você pode concluir sobre a área total de uma pirâmide qualquer?

R: _____

Neste momento, espera-se que o aluno chegue a conclusão de que área total de uma pirâmide qualquer é obtida pela seguinte fórmula:

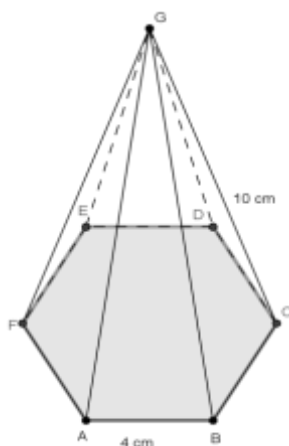
$$A_t = A_b + A_l, \text{ onde:}$$

$$\begin{cases} A_t = \text{área total} \\ A_b = \text{área da base} \\ A_l = \text{área lateral} \end{cases}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar os exercícios do livro didático para a fixação dos conceitos envolvendo o cálculo de área de diversas pirâmides.

Atividade 3:

- **Habilidades relacionadas:**
 - H24 – Resolver problemas, envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (pirâmide).
- **Pré-requisitos:** Figuras geométricas planas e cálculo de suas respectivas áreas. Teorema de Pitágoras.
- **Tempo de duração:** 100 minutos
- **Recursos educacionais utilizados:** Folhas de atividades, livro didático.
- **Organização da turma:** Turma disposta em dupla para um melhor aproveitamento das atividades.
- **Objetivos:** Desenvolver as habilidades de cálculo de área de pirâmides
- **Metodologia adotada:**



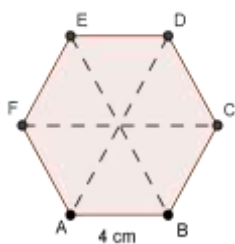
Questão contextualizada: Um peso de papel possui a forma de uma pirâmide de base hexagonal. A aresta da base mede 4 cm e a aresta lateral, 10 cm. Deseja-se revestir toda a pirâmide com papel colorido. Qual é a quantidade de papel necessária? (Considere $\sqrt{2} = 1,41$ e $\sqrt{3} = 1,73$).

a) Qual é o polígono da base da pirâmide?

R: _____

Lembre-se que podemos dividir o hexágono em 6 triângulos equiláteros. Portanto, para calcular a sua área devemos calcular a área de um desses triângulos e depois multiplicamos o valor obtido por 6.

b) Calcule a área da base.



R: _____

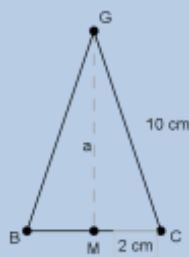
c) Qual é o polígono que compõe as faces laterais da pirâmide? E quantos são?

R: _____

d) Calcule a altura de um desses triângulos.

R: _____

Verifique se o aluno percebeu que deve considerar o triângulo a seguir:



A altura de um triângulo é sempre perpendicular a base, ou seja, ela forma um ângulo de 90° com a base. E como o triângulo da figura é isósceles, a altura intercepta a base em seu ponto médio. Assim obtemos o triângulo retângulo GMC. Para calcular a altura (neste caso, representado por a) do triângulo, o aluno deve utilizar o teorema de Pitágoras:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

Se considerar necessário faça uma revisão sobre teorema de Pitágoras e suas aplicações.

e) Agora que você já possui o valor da altura desse triângulo, calcule a área.

R: _____

f) Calcule a área lateral.

R: _____

g) Qual é a área total da pirâmide?

R: _____

h) Qual é a quantidade total de papel necessário para revestir essa pirâmide?

R: _____

Resumindo:

Para calcular a área lateral de uma pirâmide sempre teremos que calcular a área de um triângulo e, em seguida, multiplicamos o valor encontrado no cálculo da área pela quantidade de triângulos que a pirâmide possui.

Já para calcular a área da base vai depender do polígono da base que tivermos, em geral, serão triângulos, quadrados, pentágonos ou hexágonos.

Assim,

$$A_l = n \cdot A_f$$

$$\begin{aligned} A_t &= A_b + A_l \\ A_t &= A_b + n \cdot A_f \end{aligned}$$

onde: $\left\{ \begin{array}{l} A_l = \text{área lateral} \\ n = \text{quantidade de lados do polígono da base} \\ A_f = \text{área da face lateral} \\ A_t = \text{área total} \\ A_b = \text{área da base} \end{array} \right.$

Atividade 4:

- **Habilidades relacionadas:**

- H24 – Resolver problemas, envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (pirâmide).
- H25 – Resolver problemas que envolvam a noção de volume.

- **Pré-requisitos:** Cálculo de áreas de figuras planas. Volume de um prisma triangular.
- **Tempo de duração:** 100 minutos.
- **Recursos educacionais utilizados:** Folhas de atividades, planificações de prisma e pirâmide, cartolina, lápis, régua, tesoura, cola.
- **Organização da turma:** Turma disposta em duplas, para um trabalho mais colaborativo entre os alunos.
- **Objetivos:** Trabalhar o conceito de volume da pirâmide a partir da comparação com o volume de outros sólidos geométricos.
- **Metodologia adotada:**

Professor entregue as planificações do prisma e das pirâmides que o decompõe (Anexos III e IV) para os seus alunos.

a) Recorte e monte as planificações que você recebeu.

b) Que sólidos geométricos você montou?

R: _____

c) A partir dos três tetraedros (pirâmides de base triangular) você consegue montar um prisma triangular? Tente montá-lo.

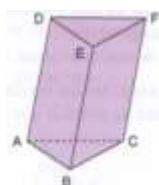
Professor neste momento escolha uma dupla de alunos e entregue: um prisma de base triangular com a base aberta, as três pirâmides que o decompõe também abertas e 1kg de arroz ou feijão, etc, para que possam realizar a atividade a seguir. Se puder fazer os prismas e as pirâmides em material transparente fica melhor para a visualização dos outros alunos.

d) Encha as três pirâmides que o professor te entregou com o arroz (feijão, etc).

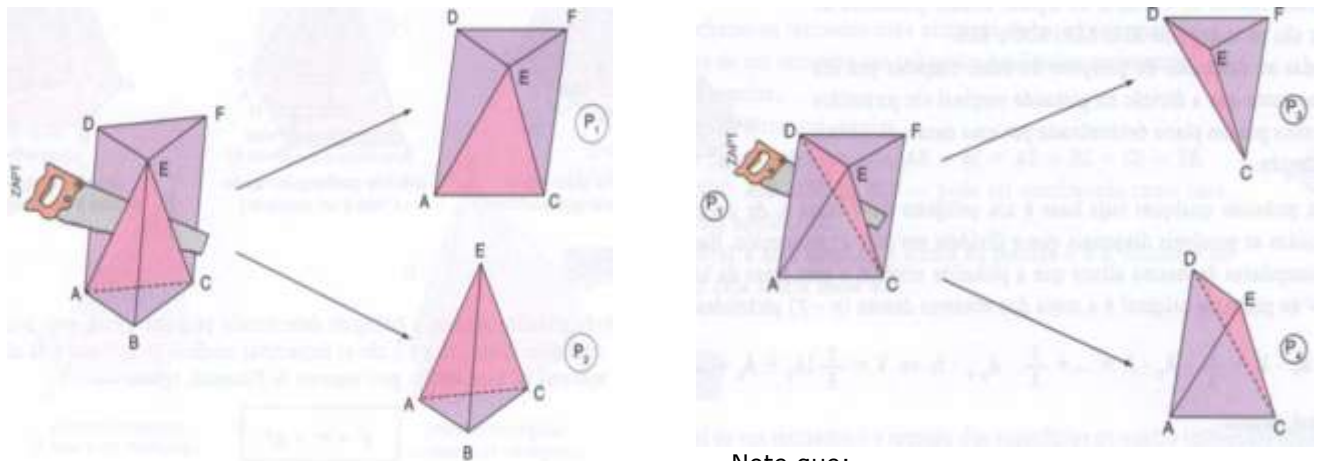
e) Você acha que o conteúdo que está nas pirâmides irá caber no prisma? Vai faltar? Vai sobrar? Verifique! O que aconteceu?

R: _____

Ao montar o quebra-cabeça, você deve ter obtido algo parecido com a figura abaixo.



Para determinar o volume da pirâmide triangular iremos considerar o prisma anterior. Você pôde perceber que o prisma pode ser obtido com a junção de três pirâmides triangulares. Então, vamos dividir o prisma anterior nessas três pirâmides conforme a figura abaixo.



Note que:

- P_2 e P_3 são pirâmides de bases equivalentes ($\triangle ABC$ e $\triangle DEF$) e mesma altura. Logo, possuem volumes iguais.
- P_3 e P_4 são pirâmides com têm $\triangle DEC$ em comum e mesma altura. Logo, possuem volumes iguais.

Assim, o volume do prisma é a soma dos volumes das pirâmides triangulares. Ou seja,

$$V(ABCDEF) = 3 \cdot V(ABCE)$$

$$A_b \cdot h = 3 \cdot V(ABCE)$$

$$\Rightarrow V(ABCE) = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Dessa forma, concluímos que o volume da pirâmide é obtido calculando-se um terço da área da base pela altura.

Professor, se considerar conveniente, lembre seus alunos como calcular o volume do prisma. Para concluir que os volumes das pirâmides triangulares são iguais usamos o teorema: "Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume". A demonstração acima foi retirada do livro: "Matemática: Ciência e Aplicações", para maiores informações consulte a bibliografia.

Questão contextualizada: Um vidro de perfume tem a forma de uma pirâmide regular de base quadrada, sabendo que as medidas das arestas laterais e da base são 15 cm e 18 cm, respectivamente. Qual é o volume desse vidro de perfume?

Você já sabe que para calcular o volume de uma pirâmide precisamos saber a área da base e a altura da pirâmide.

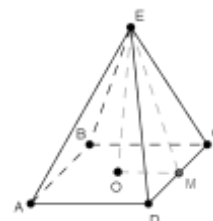
a) Calcule a área da base.

R: _____

Você já sabe que o polígono da base é um quadrado. E sua área é obtida pela fórmula:
 $A = lado \times lado$.

b) Para calcular a altura, vamos considerar $\triangle EOM$, ele é um triângulo retângulo, então vamos utilizar o teorema de Pitágoras. Calcule a altura da pirâmide.

R:



c) Agora que você já tem os valores da área da base e da altura da pirâmide, calcule o seu volume.

R: _____

d) Agora é a sua vez! Crie uma questão que envolva cálculo de áreas e/ou volumes de pirâmides. Lembre-se que essa questão deve ser contextualizada.

e) Você recebeu do seu professor uma questão criada por seus colegas. Tente resolvê-la.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar os exercícios do livro didático para a fixação do conceito de volume de pirâmides.

Depois que todo o conceito de área e volume de pirâmide foi trabalhado, se achar conveniente, elabore uma lista de exercícios, apenas com questões de concursos, vestibular, Enem. Para que os alunos se familiarizem com esses tipos de questões.

AVALIAÇÃO

A atividade 3 pode ser pontuada, pois nela será trabalhado o descrito H24 – Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de uma pirâmide. O item (d) da atividade 4 também deve ser pontuada, pois quando o aluno criar sua própria questão estará colocando em prática as teorias apresentadas. Nesta atividade o professor poderá perceber com mais clareza se o aluno não compreendeu um determinado ponto da matéria. E dessa maneira poderá realizar alguma atividade diferenciada para solucionar tal dúvida.

Em um momento posterior, aplicar uma atividade individual (50 minutos) para avaliar o nível de conhecimento de cada aluno nos descritores H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros ou esferas por meio de suas principais características, H24 e H25. Estes descritores são os que serão avaliados no **Saerjinho**, por isso o professor deve observar se os alunos compreenderam tais descritores.

Aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) para investigar a capacidade dos alunos de resolverem questões envolvendo os diferentes tópicos de pirâmides estudados ao longo do bimestre.

Fontes de pesquisa

Roteiros de Ação – Pirâmides e cones – Curso de aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio. 3º Bimestre/2012. - <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br> – acessado em 25/08/2012.

SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática. 1ª edição. São Paulo. FTD, 2010. (Coleção Novo olhar, vol. 2).

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO Roberto. ALMEIDA, Nilze de. Matemática: Ciência e Aplicações. 6ª edição. São Paulo. Editora Saraiva, 2010. Volume 2.

Endereços eletrônicos acessados:

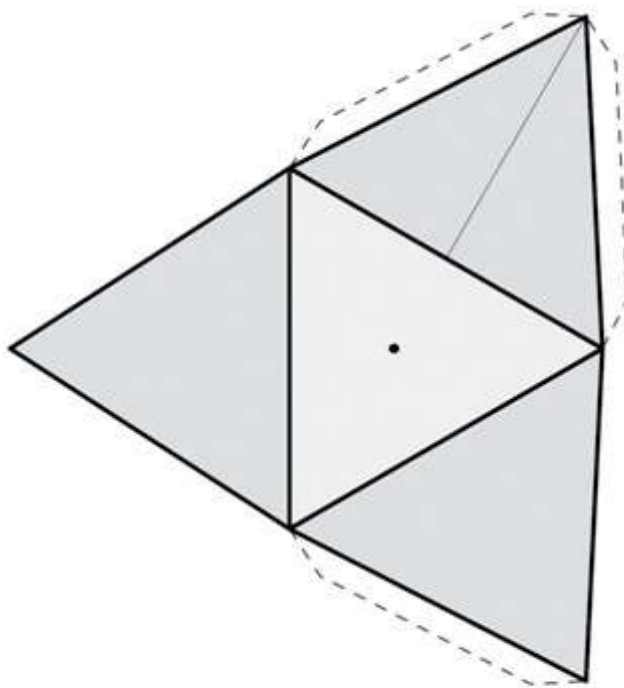
<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/piramide/piramide.htm> - acessado em 15/09/2012

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/piramides.htm> - acessado em 15/09/2012.

<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/search:pir%C3%A2mide> - acessado em 16/09/2012

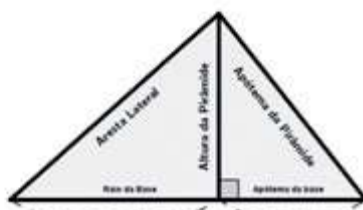
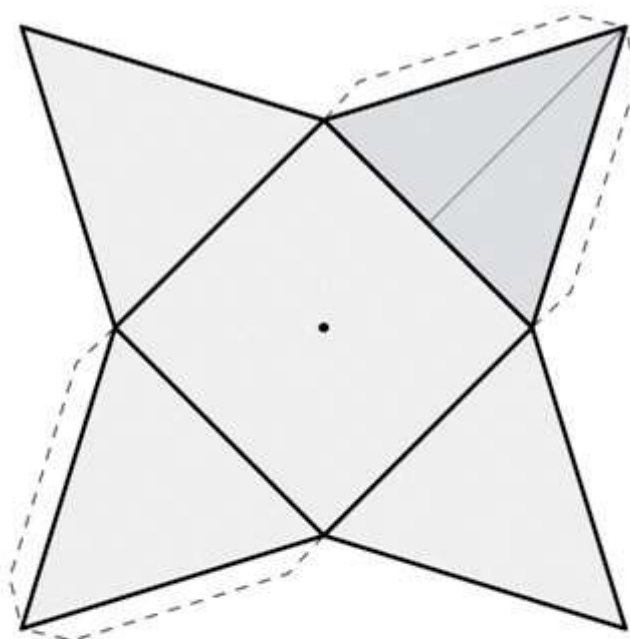
Anexo I:

PIRÂMIDE REGULAR TRIANGULAR

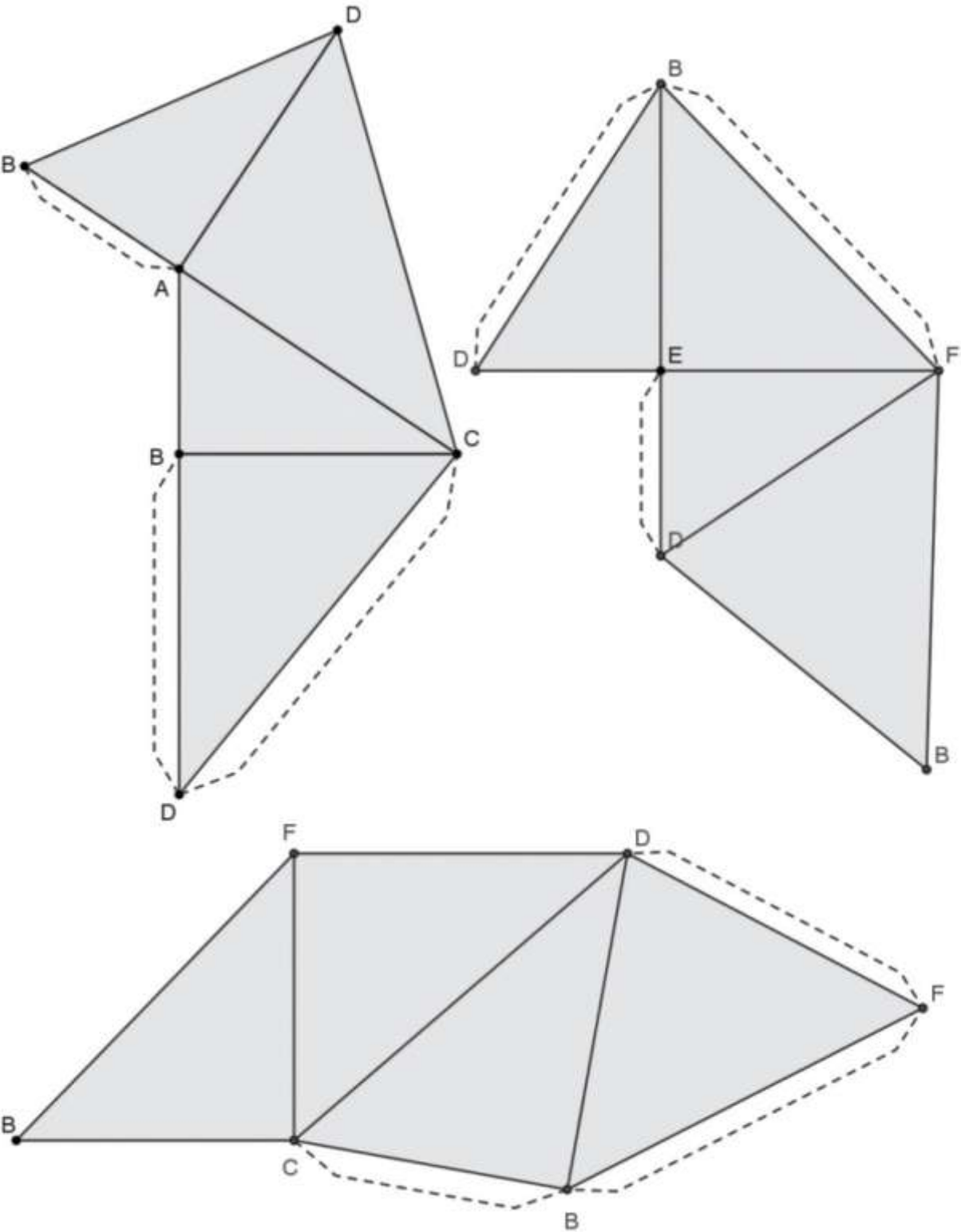


Anexo II:

PIRÂMIDE REGULAR QUADRANGULAR



Trisseccção do Prisma



Anexo IV:

Prisma de Base Triangular

