FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Matemática 2º Ano – 3º Bimestre/2012

Plano de Trabalho 2

PIRÂMIDES E CONES

Cursista: Izabel Leal Vieira

Tutor: Paulo Alexandre Alves de Carvalho

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A elaboração deste plano de trabalho tem como objetivo levar o aluno a reconhecer pirâmides e cones por meio de suas principais características. Introduzir para o aluno pirâmides e cones através de imagens de monumentos e objetos que lembrem o formato dessas figuras e sua presença em situações do dia-a-dia. Dessa forma, poder auxiliar o aprendizado do aluno, pois a utilização do que está sendo trabalhado em situações do cotidiano torna o trabalho mais atrativo.

Levar o aluno a reconhecer pirâmides e cones através de suas planificações, utilizando a planificação de figuras para tornar o trabalho em sala de aula mais concreto e a partir das planificações montar as figuras geométricas para, a partir delas, estudar seus elementos. É necessário que o aluno esteja estimulado para realizar as atividades e a construção das figuras pode auxiliar nesse processo, permitindo uma melhor assimilação dos conteúdos por parte dos alunos. Trabalhar também o cálculo de área e volume de pirâmides de modo que ele possa aplicar esse conceito em atividades propostas.

Para trabalhar o que será proposto serão necessários 10 tempos de 50 minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e mais 2 tempos de 50 minutos para as atividades de avaliação da aprendizagem (além da avaliação que será feita no momento da aula, durante a realização das atividades).

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

HABILIDADE RELACIONADA: H04 – Reconhecer pirâmides por meio de suas principais características. Através da planificação, construir pirâmides. Elementos da pirâmide. Nomenclatura das pirâmides.

PRÉ-REQUISITOS: Figuras geométricas planas.

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, folhas xerocadas, figuras e resumos para serem apresentados em forma de slides, cartolina, cola e tesoura.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em duplas.

OBJETIVOS: Visualização de pirâmides através de figuras de monumentos com esse formato e também por meio da montagem de pirâmides a partir de sua planificação. Compreender a definição e representação de pirâmide. Apresentar os elementos de uma pirâmide e nomenclatura.

METODOLOGIA ADOTADA:

Introduzir o tema mostrando ao aluno monumentos em forma de pirâmide. Pedir ao aluno que cite figuras que lembrem essa figura. Definição, representação e elementos da pirâmide. Nomenclatura. Veja abaixo.

PIRÂMIDE

No terceiro milênio antes da Era Cristã, os egípcios construíram grandes monumentos para servir de tumbas aos seus faraós. Esses monumentos têm a forma de um poliedro chamado pirâmide. Veja a figura a seguir.

As três pirâmides de Gizé, construídas há mais de 4.500 anos para o sepultamento dos faraós Quéops, Quéfren e Miquerinos.

Veja onde mais encontramos figuras com esse formato:

O Museu do Louvre, instalado no Palácio do Louvre, em Paris, é um dos maiores e mais famosos museus do mundo. O seu pátio central é ocupado agora pela pirâmide de vidro. *A pirâmide do Louvre* inaugurada em 1988 está situada na praça central do museu e funciona como entrada principal.

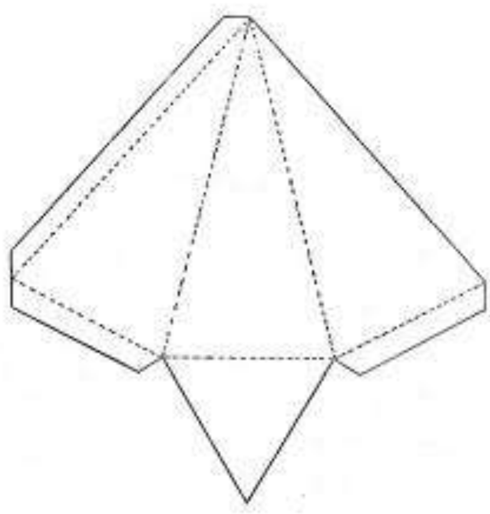
Monumento Estácio de Sá - o Monumento é uma homenagem ao fundador da Cidade do Rio de Janeiro, o português Estácio de Sá, que faleceu após dois anos de luta contra os franceses, para retomada da terra. O projeto do Monumento é de 1973, de autoria de Lúcio Costa.

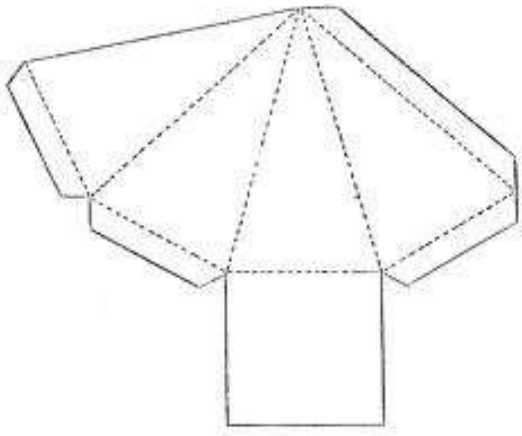
Imagem de tendas

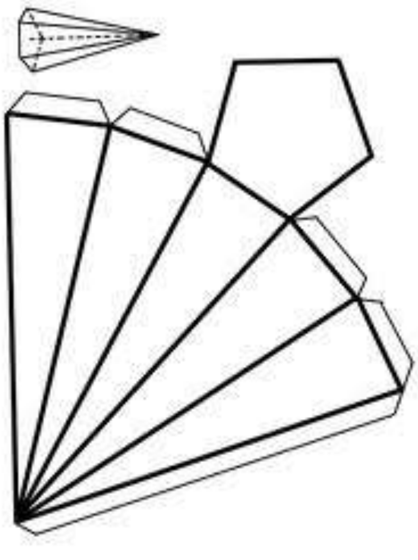
Nesse momento o professor pode pedir que os alunos dêem alguns exemplos de outros monumentos que eles tenham visto que lembrem a forma de pirâmides, ou então objetos do dia-a-dia que dêem a idéia dessa figura.

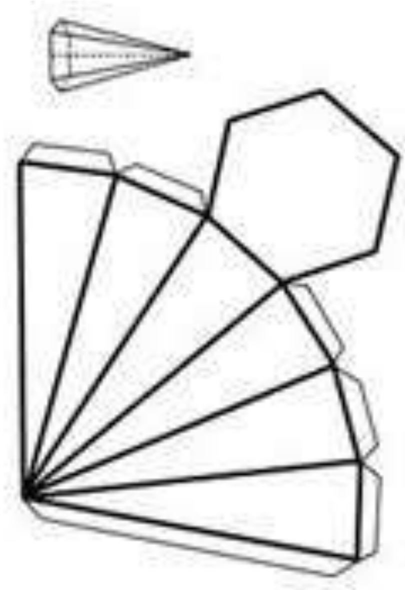
Em seguida, antes de iniciar a definição de pirâmides e falar de seus elementos, fazer a montagem de algumas pirâmides utilizando suas planificações. Desse modo o aluno terá um material concreto quando for definir pirâmides e classificá-las de acordo com o número de arestas.

Veja:





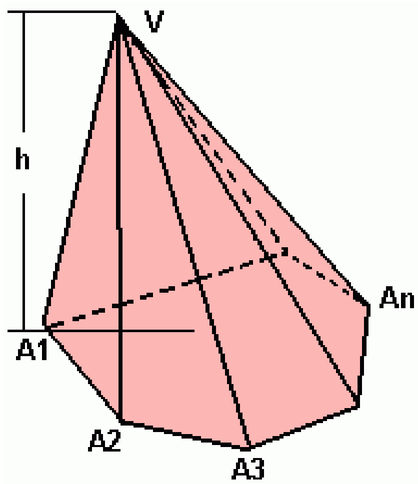




As pirâmides egípcias mostradas anteriormente por possuírem bases quadrangulares, são denominadas pirâmides quadrangulares. Na Geometria, o conceito de pirâmide é mais amplo, conforme a definição a seguir.

Seja um polígono convexo A_1A_2 $A_3 ... A_n$ contido em um plano α e um ponto V localizado fora desse plano. Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo V.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado pirâmide.



Elementos de uma pirâmide

Observando a pirâmide apresentada na definição acima, temos:

■ o ponto V é chamado vértice da pirâmide;

■ o polígono A_1A_2 $A_3 ... A_n$ é chamado de base da pirâmide;

■ as demais faces, exceto a base, são chamadas de faces laterais;

■ os lados da base são chamados arestas da base;

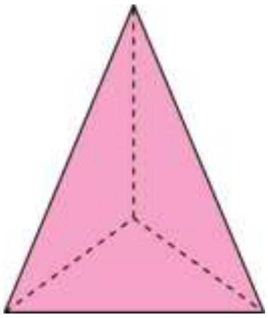
■ as demais arestas, exceto as da base, são chamadas de arestas laterais;

■ a distância entre o vértice V e o plano da base é chamada de altura da pirâmide.

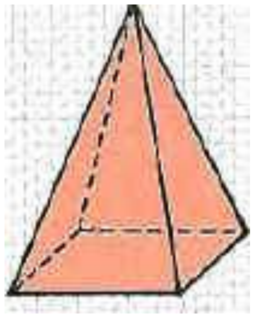
→ Pedir aos alunos para observar esses elementos nas pirâmides montadas por eles.

Nomenclatura

Uma pirâmide é classificada de acordo com o número de arestas da base:



pirâmide triangular



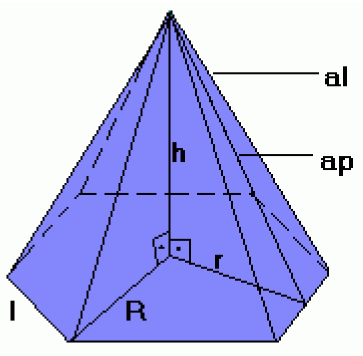
pirâmide quadrangular

e assim por diante.

→ Pedir aos alunos que dêem nome a cada pirâmide montada anteriormente.

<u>Pirâmide regular</u>

Uma pirâmide é regular se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro dessa base.

	R	raio do círculo circunscrito
	r	raio do círculo inscrito (ou apótema da base)
	l	aresta da base
	ap	apótema de uma face lateral (é o segmento de reta que tem um extremo no vértice da pirâmide e outro no ponto médio de uma face lateral)
	h	altura da pirâmide
	al	aresta lateral
As faces laterais são triângulos isósceles congruentes		

ATIVIDADE 2

HABILIDADE RELACIONADA: H24 - Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido: pirâmide. C6 - Calcular a medida da área total de uma pirâmide, com ou sem a informação de fórmulas. H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume. C3 - Calcular a medida do volume de uma pirâmide, com ou sem a informação de fórmulas.

PRÉ-REQUISITOS: Área de figuras geométricas planas; volume de um prisma.

TEMPO DE DURAÇÃO: 250 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, quadro e caneta, folhas xerocadas, sala de informática para apresentação de um vídeo.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

OBJETIVOS: Cálculo da área e do volume de uma pirâmide.

METODOLOGIA ADOTADA:

Trabalhar área e volume de uma pirâmide e resolver problemas através do cálculo da área e do volume. Veja os tópicos abaixo.

Áreas de uma pirâmide

Numa pirâmide, temos as seguintes áreas:

a) área lateral ($\mathbf{A_L}$): reunião das áreas das faces laterais.

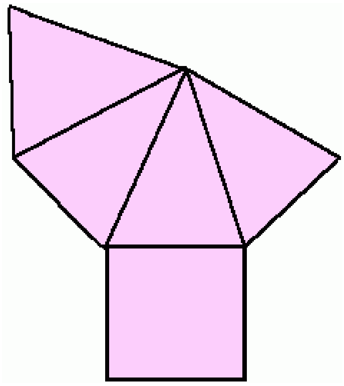
b) área da base ($\mathbf{A_B}$): área do polígono convexo (base da pirâmide).

c) área total ($\mathbf{A_T}$): união da área lateral com a área da base

$$\mathbf{A_T = A_L + A_B}$$

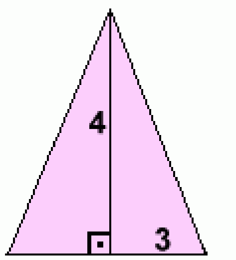
Exemplos:

1) Calcular a área lateral da pirâmide quadrangular regular que está planificada na figura abaixo, cuja aresta da base mede 6 cm e cujo apótema mede 4 cm.

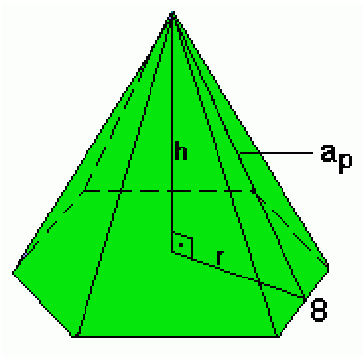


Resolução:

Como área lateral ($\mathbf{A_L}$) = n . área da face ($\mathbf{A_f}$) e como a pirâmide é quadrangular temos n=4 triângulos isósceles, a área da face lateral é igual à área de um dos triângulos, assim:

A(face) = $\frac{b\,.h}{2} = \frac{6\,.4}{2}$ = 12 A(lateral) = 4.12 = 48 cm²	

2) A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 8 cm e a altura 10 cm. Calcular a área lateral e a área total dessa pirâmide.



Resolução:

Sejam *ap* a medida do apótema da pirâmide e *r* a medida do apótema da base. Tomaremos a aresta com a = 8 cm e a altura com h = 10 cm.

Primeiro vamos calcular a medida r do apótema da base.

$r^2 + 4^2 = 8^2$

$r^2 = 64 – 16$

$r^2 = 48$

$r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Agora vamos calcular a medida ap do apótema da face lateral.

$(ap)^2 = h^2 + r^2$

$(ap)^2 = 10^2 + (4\sqrt{3})^2$

$(ap)^2 = 100 + 48$

$ap = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

Assim, cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de base 8cm e altura $2\sqrt{37}$ cm:

Sendo $\mathbf{A_f}$ a área de uma face lateral, temos:

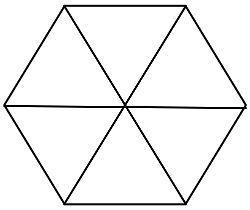
$$\mathbf{A_f} = \frac{8\,.\,2\sqrt{37}}{2} = 8\sqrt{37}\ \text{cm}^2$$

A área lateral $\mathbf{A_l}$ da pirâmide é seis vezes a área de uma face lateral, portanto:

$$\mathbf{A_l} = 6.\ 8\sqrt{37}\ \text{cm}^2 = 48\sqrt{37}\ \text{cm}^2$$

A área da base do hexágono regular que é base da pirâmide é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 8 cm, ou seja:

$\mathbf{A_b} = 6.\dfrac{8\,.\,4\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

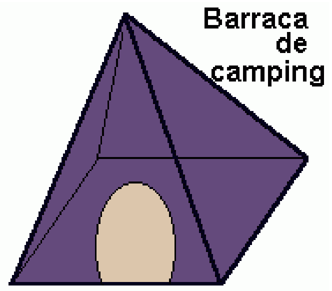


Concluindo, a área total $\mathbf{A_t}$ é a soma da área lateral $\mathbf{A_l}$ com a área da base $\mathbf{A_b}$**:**

$\mathbf{A_t} = \mathbf{A_l} + \mathbf{A_b}$

$\mathbf{A_t} = (48\sqrt{37} + 96\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

Exemplo 3) Um grupo de escoteiros quer obter a área total de suas barracas, as quais têm forma piramidal quadrangular. Para isso, eles usam medidas escoteiras. Cada dois passos de um escoteiro mede 1 metro. A barraca tem 4 passos escoteiros de lado da base e 2 passos de apótema. Calcular a área da base, área lateral e a área total.



Resolução:

Como a barraca tem 4 passos escoteiros de lado da base, temos base medindo 2 metros. E como a barraca tem 2 passos escoteiros de apótema, temos apótema medindo 1 metro.

$$A(base) = 2 \cdot 2 = 4\ m^2$$

$$A(face) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1\ m^2$$

$$A(lateral) = 4 \cdot 1 = 4\ m^2$$

Logo, a área total da barraca é: A(total) = A(lateral) + A(base) = 4+4 = 8 m²

→ Utilizar exercícios do livro didático, para fixar o conteúdo.

Volume

Antes de apresentar a fórmula do volume para o aluno, passar um vídeo que explica e demonstra a fórmula do volume das pirâmides, levando o aluno a perceber que o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma que tem a mesma base e a mesma altura da pirâmide.
(vídeo disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=zUngfdgUj3w)

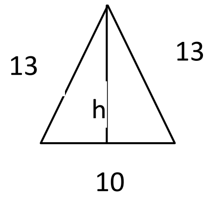
Portanto, o volume de uma pirâmide qualquer é igual a um $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

Logo, **V = é** $\frac{1}{3}$ **. BH**

Exemplos:

1) Calcular o volume de uma pirâmide de altura 6 cm, cujo polígono da base é um triângulo isósceles de lados 13 cm, 13 cm e 10 cm.

Resolução:

Sendo a base o seguinte triângulo  temos:

$13^2 = h^2 + 5^2$

$h^2 = 169 - 25$

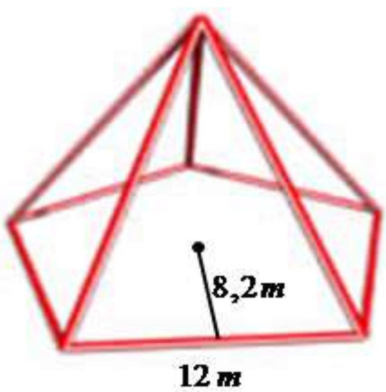
$h^2 = 144$

$h = 12$

Logo, $A_b = \frac{10 . 12}{2} = 60$

Portanto, $V = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} . 60 . 6 = \frac{360}{3} = 120 \text{ cm}^3$

2) A figura abaixo representa uma pirâmide de base pentagonal com lados regulares medindo 12 metros e a apótema da base medindo 8,2 metros, aproximadamente. Sabendo que a altura dessa pirâmide é igual a 20 metros, qual será sua capacidade sabendo que 1 m³ corresponde a 1000 litros?



Área da base e Volume

$$Ab = p * a \Rightarrow Ab = \frac{5*12*8,2}{2} \Rightarrow Ab = 246m^2$$

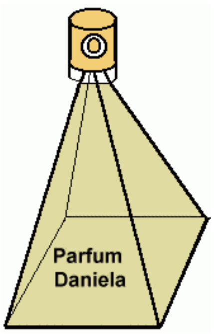
$$V = \frac{Ab*h}{3} \Rightarrow V = \frac{246*20}{3} \Rightarrow V = 1640m^3$$

Se 1m³ corresponde a 1000 litros, temos que:

$1640m^3 = 1640 * 1000 = 1\ 640\ 000$ litros de capacidade.

3) Juliana tem um perfume contido em um frasco com a forma de uma pirâmide regular com base quadrada. A curiosa Juliana quer saber o volume de perfume que o frasco contém. Para isso ela usou uma régua e tirou duas informações:

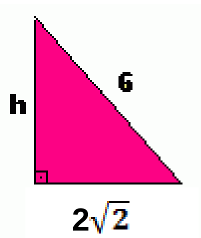
a medida da aresta da base é de 4 cm; e a medida da aresta lateral é 6 cm.



Resolução:

Como o volume da pirâmide é $V = \frac{1}{3} . BH$ devemos calcular a área da base e a medida da altura. Como a base tem forma quadrada de lado a = 4 cm, temos que $A(base) = a^2 = 4 .4 =16\ cm^2$.

A altura h da pirâmide pode ser obtida como a medida de um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é dada pela medida l = 6 cm da aresta lateral e o outro cateto $2\sqrt{2}$ que é a metade da medida da diagonal do quadrado.



Dessa forma:

$6^2 = h^2 + (2\sqrt{2})^2$,

$h^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2$

$h^2 = 36 - 8$

$h^2 = 28$

$h = 2\sqrt{7}$

Portanto, $V = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} . 16 . 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3}\ cm^3$

→ **Utilizar exercícios do livro didático, para fixar o conteúdo.**

<u>ATIVIDADE 3</u>

HABILIDADE RELACIONADA: H04 – Reconhecer cones por meio de suas principais características. Através da planificação, construir cones. Elementos do cone.

PRÉ-REQUISITOS: Figuras geométricas planas.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, folhas xerocadas, figuras e resumos para serem apresentados em forma de slides, cartolina, cola e tesoura.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em duplas.

OBJETIVOS: Reconhecer figuras com a forma cônica na natureza e também em objetos do nosso dia-a-dia. Montagem de cones a partir de sua planificação. Compreender a definição e representação de cones. Apresentar os elementos de um cone.

METODOLOGIA ADOTADA:

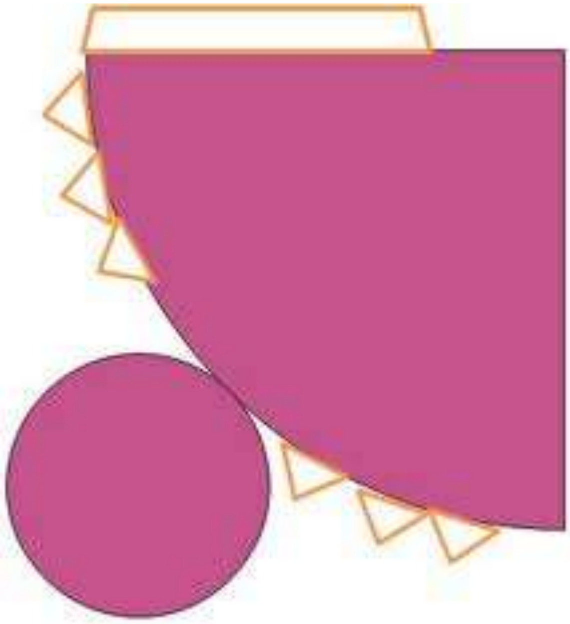
Introduzir o tema mostrando ao aluno exemplos de figuras com forma cônica. Pedir ao aluno que cite exemplos de figuras que lembrem cones. Definição, representação e elementos de um cone. Veja abaixo.

Podemos descrever os formatos de um tornado e da concha abaixo como alongados e afunilados. Uma descrição equivalente é que eles têm, aproximadamente, a forma cônica.

Essa forma, frequente na natureza, também está presente nas construções feitas pelo homem, desde uma simples casquinha de sorvete ou chapeuzinhos de festa até grandes estruturas, por exemplo, em partes de silos de armazenamento de grãos. Veja abaixo.

Nesse momento o professor pode pedir que os alunos dêem alguns exemplos de outros objetos que eles tenham visto que lembrem a forma de cone. Perguntar se na casa deles tem algum objeto com esse formato (como por exemplo, o salto de algumas sandálias, o funil de cozinha).

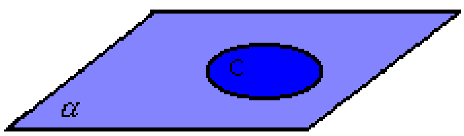
Em seguida, antes de iniciar a definição de cones e falar de seus elementos, fazer a montagem de cones utilizando suas planificações. Desse modo o aluno terá um material concreto quando for definir cones e conhecer seus elementos.

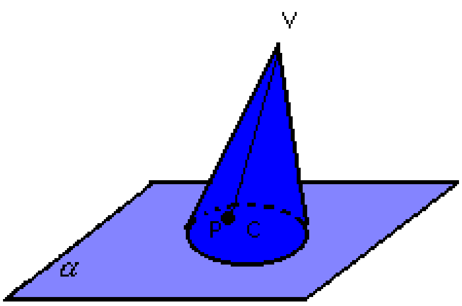


Os objetos apresentados acima lembram o cone circular, que é caracterizado por ter uma base circular e por todos os seus pontos formarem segmentos de reta com um extremo nessa base e o outro extremo em um mesmo ponto V, fora da base, conforme definimos a seguir.

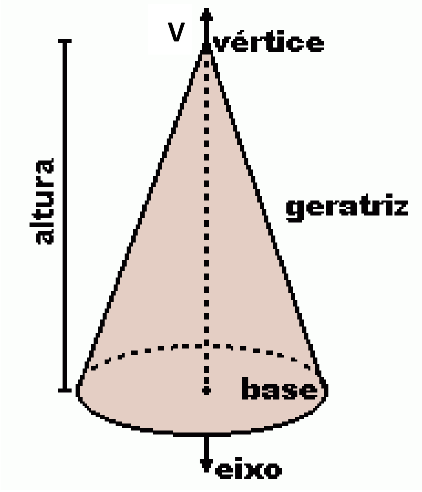
Sejam um círculo **C**, contido num plano α, e um ponto **V** (*vértice*) fora de α. Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao círculo C e o outro no ponto V.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de cone circular.





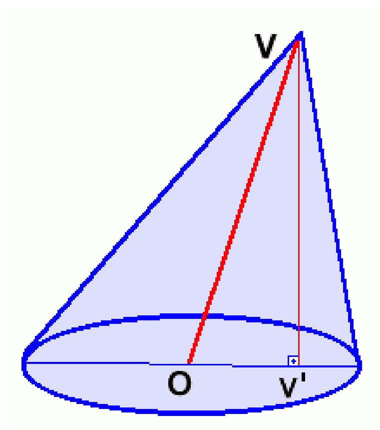
<u>Elementos de um cone</u>



- **Base**: A base do cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
- **Vértice**: O vértice do cone é o ponto V.
- **Eixo**: Quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice V e pelo centro da base.
- **Geratriz**: Qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
- **Altura**: Distância do vértice do cone ao plano da base.
- **Superfície lateral**: A superfície lateral do cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em V e a outra na curva que envolve a base.
- **Superfície do cone**: A superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
- **Seção meridiana**: A seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

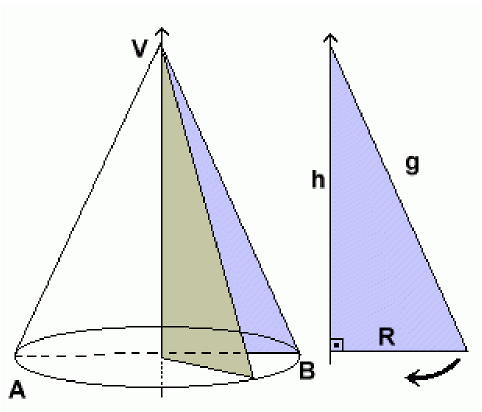
→ Pedir aos alunos para observar esses elementos no cone montado por eles.

Classificação do cone



Quando observamos a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito **reto** quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é **oblíquo** quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.

Observações sobre um cone circular reto



1. Um cone circular reto é chamado **cone de revolução** por ser obtido pela rotação (revolução) de 360º de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos

2. Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida de cada geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos: $\mathbf{g^2 = h^2 + R^2}$

AVALIAÇÃO

A avaliação dos alunos ocorrerá durante todas as atividades (1, 2 e 3). Os alunos serão avaliados no momento da realização dos exercícios, como eles se envolveram com as atividades. Serão observadas as dificuldades apresentadas por eles no momento de fazer as atividades propostas e através dessa observação serão dadas explicações extras que possam auxiliá-los. O aluno que apresentar mais facilidade na resolução das questões também poderá auxiliar àqueles com maior dificuldade.

Os conhecimentos também serão avaliados através de um teste escrito individual com duração de 100 minutos – 2 tempos de aula, que abrangerá o que foi estudado na Atividade 2. Outra forma de avaliação será a realização de um trabalho, que contará como nota, em que os alunos deverão pesquisar sobre o que foi trabalhado nas atividades 1, 2 e 3 e entregar ao professor. Nesse trabalho constarão exemplos, atividades resolvidas e também outras figuras de objetos e monumentos que lembrem o formato desses sólidos.

Através dessas avaliações, que envolvem professor e aluno pode-se observar como foram desenvolvidas as competências trabalhadas e a compreensão dos alunos acerca dos conteúdos abordados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Pirâmides e Cones - Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 3º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.

PAIVA, Manoel – Matemática Paiva: volume 2 – 1ª edição – São Paulo: Moderna, 2009.

Endereços eletrônicos acessados de 05/09/2012 a 14/09/2012, citados ao longo do trabalho:

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/piramide/piramide.htm
http://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-espacial-cone.html
http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial21.php
http://www.youtube.com/watch?v=zUngfdgUj3w